Aufgaben-Blatt: Die Türme von Hanoi

Stellen Sie sich drei Türme vor, einen links, einen in der Mitte und einen rechts. Anfangs liegen auf dem linken Turm drei Scheiben der Größe 1, 2 und 3, wobei die größte Scheibe unten liegt, Scheibe 2 liegt in der Mitte und Scheibe 1 liegt oben. Die anderen beiden Türme sind leer.

```
               |                   |                  |
              111                  |                  |
             22222                 |                  |
            3333333                |                  |
      ============================================================
```

Ihre Aufgabe besteht darin, die Scheiben so zu verschieben, dass am Ende die erste Scheibe auf dem zweiten Turm liegt, die zweite Scheibe auf dem ersten Turm und die dritte Scheibe auf dem dritten Turm liegt. Dabei dürfen Sie in jedem Zug eine Scheibe von einem Turm nehmen und auf einen anderen Turm legen, wobei Sie aber niemals eine Scheibe x auf eine andere Scheibe y legen dürfen, wenn die Scheibe x größer als y ist.

Sie sollen die Aufgabe mit Hilfe des Gerüstes, dass Sie unter

`http://www.dhbw-stuttgart.de/stroetmann/Logic/SetlX/hanoi-frame.stlx`

finden, lösen. Bearbeiten Sie dazu die folgenden Teilaufgaben:

1. Definieren Sie in Zeile 100 eine Prozedur `partition`(s_1, s_2, s_3, a) die genau dann `true` zurück liefert, wenn die Menge $\{s_1, s_2, s_3\}$ eine Partition der Menge a ist.

   Hinweis: Der Begriff der Partition ist im Skript wie folgt definiert:

   Definition: Ist $\mathcal{P} \subseteq 2^M$ eine Menge von Teilmengen von M, so sagen wir, dass $\mathcal{P}$ eine *Partition* von M ist, falls folgende Eigenschaften gelten:

   (a) $\forall x \in M : \exists K \in \mathcal{P} : x \in K$,
   jedes Element aus M findet sich also in einer Menge aus $\mathcal{P}$ wieder.

   (b) $\forall K \in \mathcal{P} : \forall L \in \mathcal{P} : K \cap L = \emptyset \vee K = L$,
   zwei <u>verschiedene</u> Mengen aus $\mathcal{P}$ sind also disjunkt.

   Beispiele: Es gilt also

   (a) `partition`$\big(\{1,3\}, \{\}, \{2\}, \{1,2,3\}\big) =$ `true`,
   denn jedes Element aus der Menge $\{1,2,3\}$ kommt in einer der drei Mengen, $S_1 = \{1,3\}$, $S_2 = \{\}$, $S_3 = \{2\}$ genau einmal vor.

   (b) `partition`$\big(\{1,3\}, \{1\}, \{2\}, \{1,2,3\}\big) =$ `false`,
   denn das Element 1 aus der Menge $\{1,2,3\}$ kommt sowohl in der Menge $S_1 = \{1,3\}$ als auch in der Menge $S_2 = \{1\}$ vor.

   (c) `partition`$\big(\{1\}, \{\}, \{2\}, \{1,2,3\}\big) =$ `false`,
   denn das Element 3 aus der Menge $\{1,2,3\}$ kommt in keiner der Mengen $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{\}$, $S_3 = \{2\}$ vor.

2. Definieren Sie in Zeile 147 eine Menge p von Punkten. Jeder Punkt aus p soll einem Zustand der drei Türme entsprechen. Zweckmäßig ist eine Darstellung der verschiedenen Zustände durch ein Tripel $\langle s_1, s_2, s_3 \rangle$, wobei die Komponenten s_1, s_2 und s_3 Mengen sind, die die Zustände der einzelnen Türme repräsentieren.

3. Die Prozedur `movePossible`(*source*, *target*) in Zeile 114 nimmt als Argumente zwei Mengen, die jeweils den Zustand eines Turms repräsentieren. Die Funktion liefert das Ergebnis `true`, wenn die oberste Scheibe von dem Turm *source* auf den Turm *target* gelegt werden darf.

4. Definieren Sie jetzt eine Relation r_{12} auf der Menge p. Ein Paar $\langle a, b \rangle$ soll genau dann in R_{12} liegen, wenn der Zustand b aus dem Zustand a dadurch hervorgeht, dass im Zustand a die oberste Scheibe von dem Turm 1 auf den Turm 2 gelegt wird. Dabei soll natürlich darauf geachtet werden, dass keine große Scheibe auf eine kleinere Scheibe gelegt wird.

5. Definieren Sie analog zu der letzten Teilaufgabe die fünf Relationen r_{21}, r_{31}, r_{13}, r_{23}, r_{32} so, dass die Relation

   $$r := r_{12} \cup r_{21} \cup r_{31} \cup r_{13} \cup r_{23} \cup r_{32}$$

   in Zeile 157 alle erlaubten Zustands-Übergange beschreibt.

   Wenn Sie statt einer Copy-und-Paste-Lösung eine besonders elegante Lösung implementieren wollen, dan implementieren Sie in Zeile 82 die Prozedur `relation`(p, i, j), die aus der Menge p aller Zustände für zwei Indizes $i, j \in \{1, 2, 3\}$ die Relation r_{ij} berechnet. In diesen Fall müssen Sie Zeile einkommentieren und Zeile 159 auskommentieren.

6. Definieren Sie nun die Variablen `start` und `goal` so, dass `start` die Situation beschreibt, bei der alle Scheiben auf dem linken Turm liegen, während `goal` die Situation beschreibt, bei die erste Scheibe auf dem zweiten Turm liegt, die zweite Scheibe auf dem ersten Turm und die dritte Scheibe auf dem rechten Turm liegt.