Bitte die Blätter nicht trennen!

Matrikelnummer:			
KLAUSUR		Fakultät	**Technik**
		Studiengang:	**Informatik**
		Jahrgang / Kurs :	**TINF19B/E**
		Studienhalbjahr:	**3. Semester**
Datum:	**27. November 2020**	Bearbeitungszeit:	**120 Minuten**
Modul:	**T3INF2002**	Dozent:	**Jan Hladik**
Unit:	**Formale Sprachen 1/2**		
Hilfsmittel:	**Open-Book-Klausur, beliebige nicht-elektronische Dokumente**		

Aufgabe	Thema	erreichbar	erreicht
1	RE und NEA	10	
2	Chomsky-Hierarchie	9	
3	Produktautomat	9	
4	Kontextfreie Sprachen	10	
5	NEA und DEA	10	
6	RA und DEA	11	
7	Chomsky-NF	9	
8	Kellerautomat	9	
9	CYK-Algorithmus	9	
10	Turing-Maschine	12	
11	WHILE-Programm	8	
Summe		106	

1. Sind Sie gesund und prüfungsfähig?
2. Sind Ihre Taschen und sämtliche Unterlagen, insbesondere alle nicht erlaubten Hilfsmittel, seitlich an der Wand zum Gang hin abgestellt und nicht in Reichweite des Arbeitsplatzes?
3. Haben Sie auch außerhalb des Klausurraumes im Gebäude keine unerlaubten Hilfsmittel oder ähnliche Unterlagen liegen lassen?
4. Haben Sie Ihr Handy ausgeschaltet und abgegeben?

(Falls Ziff. 2 oder 3 nicht erfüllt sind, liegt ein Täuschungsversuch vor, der die Note „nicht ausreichend" zur Folge hat.)

Aufgabe 1 (7+3P)

Gegeben seien der reguläre Ausdruck $r = (\varepsilon + b)(ba)^*$ und die Sprache $L = L(r)$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

a) Verwenden Sie *exakt* das in der Vorlesung gezeigte Verfahren, um aus dem regulären Ausdruck r einen nichtdeterministischen endlichen Automaten, der L erkennt, zu konstruieren. Berücksichtigen Sie insbesondere alle ε-Übergänge. Es reicht die Darstellung des Ergebnisses in graphischer Form.

b) Zeigen Sie (mit Hilfe der algebraischen Äquivalenzen aus der Vorlesung) oder widerlegen Sie (durch Angabe eines geeigneten Wortes): $L((\varepsilon + b)a(ba + a)^*) = L((ba + a)^*(\varepsilon + b)a)$

Aufgabe 2 (2+3+2+2P)

Gegeben seien die Grammatiken G_1 und G_2:

$$\begin{aligned} G_1 &= (\{S, A\}, \{a, b, c\}, P_1, S_1) \\ P_1 &= \{S \rightarrow bSc|bS|Sc|ASA|A, \\ &\quad A \rightarrow a|\varepsilon\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2 &= (\{T, B\}, \{a, b\}, P_2, T) \\ P_2 &= \{T \rightarrow aBBa, \\ &\quad BB \rightarrow BBBB|\varepsilon, \\ &\quad B \rightarrow b\} \end{aligned}$$

Beantworten Sie die folgenden Fragen jeweils für G_1 und G_2.

a) Welcher ist der maximale Typ der *Grammatik* (in der Chomsky-Hierarchie)?
Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Geben Sie die von der Grammatik erzeugte Sprache formal als Menge an.

c) Welcher ist der maximale Typ dieser *Sprache* (in der Chomsky-Hierarchie)?

d) Falls die Sprache vom Typ 3 ist, geben Sie einen regulären Ausdruck für die Sprache an.

Aufgabe 3 (2+6+1P)

Betrachten Sie die deterministischen endlichen Automaten A_1 und A_2.

a) Geben Sie beide Automaten in Tabellenschreibweise an.

b) Erzeugen Sie einen Produktautomaten A_p mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren und stellen Sie das Ergebnis in graphischer Form dar.

c) Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die von A_p akzeptierte Sprache beschreibt.

Abbildung 1: Automat A_1 und A_2

Aufgabe 4 (3+3+4P)

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Sei $L_4 = \{a^n w \mid n \in \mathbb{N}, w \in \Sigma^*, |w| = n\}$.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $\mathcal{L}(G) = L_4$ an. Verwenden Sie hierzu möglichst wenige Nichtterminalsymbole.

b) Bestimmen Sie, welche der folgenden Wörter in L_4 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.

   b1) $aacb$

   b2) $aacca$

   b3) $abab$

   b4) $aaaaaaaa$

c) Zeigen Sie (durch Angabe eines geeigneten endlichen Automaten oder regulären Ausdrucks) oder widerlegen Sie (mittels Pumping-Lemma): L_4 ist regulär.

Aufgabe 5 (2+2+6P)

Betrachten Sie den nichtdeterministischen endlichen Automaten A_5 über $\Sigma = \{a, b\}$ in Abbildung 2.

a) Geben Sie zwei Läufe des Automaten A_5 auf der Eingabe $aabbaa$ an, von denen einer akzeptierend und einer nicht akzeptierend ist.

b) Geben Sie einen regulären Ausdruck für $L(A_5)$ an.

c) Konvertieren Sie A_5 mit dem in der Vorlesung angegebenen Verfahren in einen deterministischen endlichen Automaten. Geben Sie das Ergebnis als *Tabelle* an.

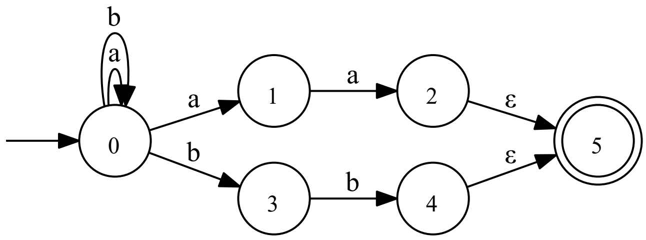

Abbildung 2: Automat A_5

Aufgabe 6 (2+4+5P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Betrachten Sie den DEA A_6 in Abbildung 3.

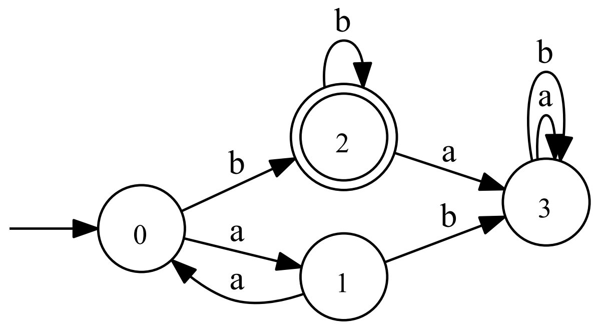

Abbildung 3: Automat A_6

a) Geben Sie je einen Lauf von A_6 auf den folgenden Worten an:

   a1) $w_1 = aaaabb$

   a2) $w_2 = aaabbb$

   Gilt jeweils $w_1 \in L(A_6)$ und $w_2 \in L(A_6)$?

b) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, das die an den verschiedenen Zuständen akzeptierten Sprachen beschreibt.

c) Lösen Sie dieses Gleichungssystem und geben Sie so einen regulären Ausdruck an, der die von A_6 akzeptierte Sprache beschreibt.

Aufgabe 7 (9 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Grammatik $G_7 = (N, \Sigma, P, S)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $N = \{S, R, T\}$, und P mit den folgenden Produktionen:

1. $S \to bSb$
2. $S \to T$
3. $T \to aTa$
4. $T \to bR$
5. $R \to \varepsilon$

Konvertieren Sie G_7 mit dem Verfahren aus der Vorlesung in Chomsky-Normalform. Geben Sie nach jedem wesentlichen Zwischenschritt den Zustand der Regelmengen an, am Ende die gesamte entstandene Grammatik in CNF.

Aufgabe 8 (1+2+2+4P)

Betrachten sie das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, die Sprache $L_8 = \{a^n b a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und den Kellerautomaten A_8.

$A_8 = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, 0, Z)$ mit $Q = \{0, 1\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, Z\}$ und Δ gemäß folgender Tabelle:

Q (Ausgangs-zustand)	Σ (Alphabet-symbol)	Γ (gelesenes Stacksymbol)	Γ^* (geschriebene Stacksymbole)	Q (Ziel-zustand)
0	a	Z	AZ	0
0	a	A	AA	0
0	ε	Z	ε	0
0	b	A	A	1
1	a	A	ε	1
1	ε	Z	ε	1

a) Ist A_8 deterministisch? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Geben Sie jeweils ein Wort mit Länge 7 und 8 aus L_8 an oder begründen Sie, warum es kein solches Wort gibt.

c) Geben Sie einen akzeptierenden Lauf von A_8 auf dem Wort $aabaa$ ab.

d) Akzeptiert der Automat A_8 genau die Sprache L_8?

Falls ja, begründen Sie dieses.

Falls nein, zeigen Sie ein Gegenbeispiel als Lauf, und geben Sie an, wie man A_8 verändern muss, damit er genau die Sprache L_8 akzeptiert.

Aufgabe 9 (5+4P)

Betrachten Sie die Grammatik $G_9 = (\{S, A, B, C, M, N, O\}, \{m, n, o\}, P, S)$ mit

$$P = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & AB \\ A & \rightarrow & OM \\ B & \rightarrow & NA \\ B & \rightarrow & NC \\ C & \rightarrow & AB \\ M & \rightarrow & m \\ N & \rightarrow & n \\ O & \rightarrow & o \end{array} \right\}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des CYK-Algorithmus, ob die folgenden Wörter in $L(G_9)$ enthalten sind:

a) $w_1 = nomnom$

b) $w_2 = omnom$

Aufgabe 10 (1+6+4+1P)

Gegeben sei die Turing-Maschine $\mathcal{M} = (\{0,1,2,3,4,5\}, \{a,b\}, \{a,b,\square\}, \Delta, 0, \{5\})$, wobei Δ in der folgenden Tabelle gegeben ist:

Q (Ausgangs-zustand)	Γ (gelesenes Bandsymbol)	Γ (geschriebenes Bandsymbol)	$\{\ell, r, n\}$ (Kopf-bewegung)	Q (Folge-zustand)
0	a	$\square$	r	2
0	b	$\square$	r	1
1	a	a	r	2
1	b	b	r	2
1	$\square$	$\square$	n	5
2	a	a	r	2
2	b	b	r	2
2	$\square$	$\square$	ℓ	3
3	a	$\square$	ℓ	4
3	b	$\square$	ℓ	4
4	a	a	ℓ	4
4	b	b	ℓ	4
4	$\square$	$\square$	r	0

1. Ist $\mathcal{M}$ deterministisch? Begründen Sie Ihre Antwort.
2. Geben Sie jeweils eine Berechnung von $\mathcal{M}$ auf den Wörtern bba, bab, und aa an, die in einer Stop-Konfiguration endet. Welche(s) der Wörter werden (wird) akzeptiert?
3. Beschreiben Sie $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ formal als Menge.
4. Wie viele Schritte führt $\mathcal{M}$ für eine Eingabe der Länge n aus ($\mathcal{O}$-Notation)?

Aufgabe 11 (4+4P)

Betrachten Sie das folgende WHILE-Programm mit den Eingabevariablen x_1, x_2 und der Ausgabevariable x_0.

while x_1 **do**
  $x_3 := x_2 + 0;$
  while x_3 **do**
    $x_2 := x_2 + 1;$
    $x_3 := x_3 \dot{-} 1$
  end while;
  $x_1 := x_1 \dot{-} 1$
end while;
$x_0 := x_2 + 0$

a) Welche Ausgabe erzeugt das Programm für die Eingabe $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$?

b) Was berechnet das Programm? Geben Sie die Antwort als Funktion $f(x_1, x_2)$.