**Bitte die Blätter nicht trennen!**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Matrikelnummer: | | | |
| DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Stuttgart<br>**TESTAT** | | Fakultät<br>Studiengang:<br>Jahrgang / Kurs :<br>Studienhalbjahr: | **Technik**<br>**Informatik**<br>**TINFXXB/E**<br>**3. Semester** |
| Datum: | **XX. XX. 20XX** | Bearbeitungszeit: | **60 Minuten** |
| Modul:<br>Unit: | **T2INF2002**<br>**Formale Sprachen 1/2** | Dozent: | **Hladik** |
| Hilfsmittel: | **Formelsammlung 10 Seiten A4** | | |

| Aufgabe | Thema | gesamt | erreicht |
|---|---|---|---|
| 1 | Reguläre Sprachen | 9 | |
| 2 | Chomsky-Hierarchie | 9 | |
| 3 | DFA-Minimierung | 9 | |
| 4 | KFG und Pumping-Lemma | 11 | |
| 5 | NFA und DFA | 9 | |
| 6 | REs aus DFA | 8 | |
| 7 | Automatentheorie | 5 | |
| Summe | | 60 | |

1. Sind Sie gesund und prüfungsfähig?
2. Sind Ihre Taschen und sämtliche Unterlagen, insbesondere alle nicht erlaubten Hilfsmittel, seitlich an der Wand zum Gang hin abgestellt und nicht in Reichweite des Arbeitsplatzes?
3. Haben Sie auch außerhalb des Klausurraumes im Gebäude keine unerlaubten Hilfsmittel oder ähnliche Unterlagen liegen lassen?
4. Haben Sie Ihr Handy ausgeschaltet und abgegeben?

(Falls Ziff. 2 oder 3 nicht erfüllt sind, liegt ein Täuschungsversuch vor, der die Note „nicht ausreichend“ zur Folge hat.)

**Aufgabe 1(2+4+3 P)**

Betrachten Sie das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ und die Sprache $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid aa \text{ und } bb \text{ sind Teilworte von } w\}$, z.B. $aabb \in L_1$.

a) Geben Sie einen regulären Ausdruck $r$ mit $L(r) = L_1$ an.

b) Geben Sie einen endlichen Automaten $A$ mit $L(A) = L_1$ in graphischer Darstellung an.

c) Geben Sie eine kontext-freie Grammatik $G$ mit $L(G) = L_1$ an. Verwenden Sie möglichst wenige Nichtterminalsymbole.

**Lösung:**

**Lösung:**

a) $r = (a+b)^*aa(a+b)^*bb(a+b)^* + (a+b)^*bb(a+b)^*aa(a+b)^*$

b) Nichtdeterministisch ist hier ok

c) $G = (N, \Sigma, P, S)$ mit $N = \{S, R\}$ und
$P$:
$S \to RaaRbbR|RbbRaaR$
$R \to aR|bR|\epsilon$

(Platz für Aufgabe 1)

**Aufgabe 2 (1+2+3+3 P)**

Betrachten Sie die Grammatik $G_1 = (N, \Sigma, P, S)$ mit $N = \{S, X, Y, Z\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und folgenden Produktionen:

$$\begin{aligned} P \quad = \{ \quad & S \to XSZ \\ & XS \to XY \\ & XX \to cc \\ & XY \to Xb \\ & Xb \to cb \\ & YY \to bb \\ & YZ \to YYZ|bZ \\ & ZZ \to aa \\ & bZ \to ba\} \end{aligned}$$

a) Welcher ist der maximale Typ der *Grammatik* (in der Chomsky-Hierarchie)?
Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Geben Sie Ableitungen für zwei Worte aus $L(G_1)$.

c) Geben Sie die von der Grammatik erzeugte Sprache formal als Menge an.

d) Welcher ist der maximale Typ dieser *Sprache* (in der Chomsky-Hierarchie)?
Geben Sie eine äquivalente Grammatik mit dem maximal möglichen Typ an. Verwenden Sie möglichst wenige Nichtterminalsymbole.

**Lösung:**

**Lösung:**

a) Typ 1. Nicht Typ 2 oder 3, weil komplexe linke Seiten vorkommen. Nicht Typ 0, weil keine Regel verkürzend ist. (1P)

b)
- $S \Rightarrow XSZ \Rightarrow XYZ \Rightarrow XbZ \Rightarrow cbZ \Rightarrow cba$
- $S \Rightarrow XSZ \Rightarrow XYZ \Rightarrow XYYZ \Rightarrow XbbZ \Rightarrow cbbZ \Rightarrow cbba$

c) $L(G_1) = \{c^m b^n a^m \mid n, m \in \mathbb{N}^+\}$

d) Typ 2 (kontextfrei). Grammatik z.B.:

$$\begin{aligned} P \quad = \{ \quad & S \to cSa|cBa \\ & B \to bB|b\} \end{aligned}$$

(Platz für Aufgabe 2)

**Aufgabe 3 (1+6+2 P)**

Betrachten Sie den Automaten $A_3$.

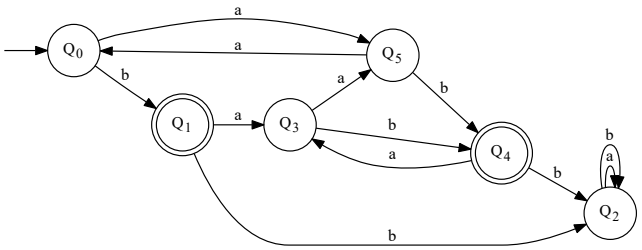


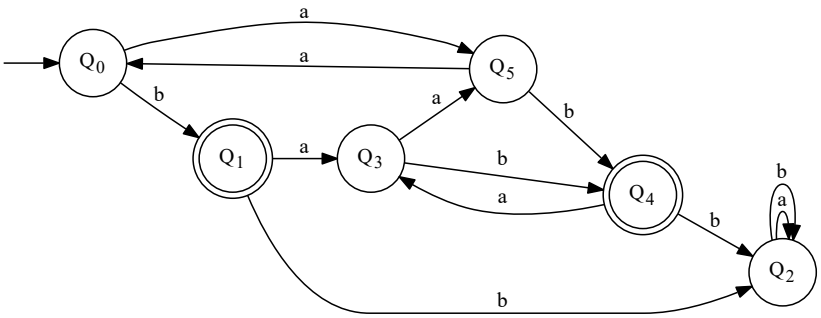

Abbildung 1: Automat $A_3$

a) Stellen Sie den Automaten in tabellarischer Form dar.

b) Minimieren Sie den Automaten mit dem in der Vorlesung beschriebenen Verfahren. Sie können die auf der nächsten Seite abgedruckte Tabelle nutzen. Geben Sie das Ergebnis in graphischer Form an.

c) Beschreiben Sie $L(A_3)$ formal als Menge oder durch Angabe eines regulären Ausdrucks.

(Platz für Aufgabe 3)




| | $S_0$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | $S_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_0$ | $=$ | | | | | |
| $S_1$ | | $=$ | | | | |
| $S_2$ | | | $=$ | | | |
| $S_3$ | | | | $=$ | | |
| $S_4$ | | | | | $=$ | |
| $S_5$ | | | | | | $=$ |

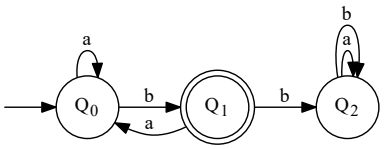
**Lösung:**

**Lösung:**

a) `tbd`

b) (2 Punkte pro korrektem Merge mit korrekter Darstellung)

```
# Adding (Q2, Q5) to V because delta(Q2,b)=Q2, delta(Q5,b)=Q4, and (Q2,Q4) in V
# Adding (Q2, Q3) to V because delta(Q2,a)=Q2, delta(Q3,a)=Q5, and (Q2,Q5) in V
# Adding (Q0, Q2) to V because delta(Q0,a)=Q5, delta(Q2,a)=Q2, and (Q5,Q2) in V
# Merging Q5 into Q0
# Q5 already removed
# Merging Q3 into Q0
# Merging Q4 into Q1
# +---+---+---+---+---+---+---+
# |   | Q0| Q1| Q2| Q3| Q4| Q5|
# +---+---+---+---+---+---+---+
# | Q0| o | X | X | o | X | o |
# +---+---+---+---+---+---+---+
# | Q1| X | o | X | X | o | X |
# +---+---+---+---+---+---+---+
# | Q2| X | X | o | X | X | X |
# +---+---+---+---+---+---+---+
# | Q3| o | X | X | o | X | o |
# +---+---+---+---+---+---+---+
# | Q4| X | o | X | X | o | X |
# +---+---+---+---+---+---+---+
# | Q5| o | X | X | o | X | o |
# +---+---+---+---+---+---+---+
```




c) $L(A_3) = L(a^*(baa^*)^*b)$

**Aufgabe 4 (3+3+3+2 P)**

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Sei $L_{4a} = \{w | \forall i \forall j (w[i] = a \wedge w[j] = b \rightarrow i < j)\}$.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G$ mit $\mathcal{L}(G) = L_{4a}$ an. Verwenden Sie hierzu möglichst wenige Nichtterminalsymbole und Regeln.

b) Bestimmen Sie, welche der folgenden Wörter in $L_{4a}$ sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in $G$ an.

b1) *caabc*

b2) *cabbca*

b3) *cacabcb*

c) Zeigen Sie (durch Angabe eines geeigneten endlichen Automaten oder regulären Ausdrucks) oder widerlegen Sie (mittels Pumping-Lemma): $L_{4a}$ ist regulär.

d) Gegeben die zu $L_{4a}$ ähnliche Sprache $L_{4b} = \{w | \forall i \forall j (w[i] = a \wedge w[j] = b \rightarrow i > j)\}$. Gelten folgende Aussagen?

d1) $L_{4a} \cup L_{4b}$ *ist regulär.*

d2) $L_{4a} \cap L_{4b}$ *ist regulär.*

Begründen Sie ihre Entscheidung kurz. Ein vollständiger Beweis ist nicht notwendig.

**Lösung:**

**Lösung:**

a) $G = (N, \Sigma, P, S)$ mit

- $N = \{S\}$
- $P = \{S \rightarrow cS|aS|B$
  $B \rightarrow cB|bB|\epsilon\}$

b1) $S \Rightarrow cS \Rightarrow caS \Rightarrow caaS \Rightarrow caaB \Rightarrow caabB \Rightarrow caabcB \Rightarrow caabc \in L_{4a}$ (1P)

b2) $cabbca \notin L_4$ , kein a nach Wechsel auf B ableitbar (1P)

b3) $S \Rightarrow cS \Rightarrow caS \Rightarrow cacS \Rightarrow cacaS \Rightarrow cacaB \Rightarrow cacabB \Rightarrow cacabcB \Rightarrow cacabcbB \Rightarrow cacabcb \in L_{4a}$ (P)

c) $L_4a$ ist regulär. (a+c)*(b+c)*

d) $L_{4b}$ ist regulär analog zu $L_{4a}$ ((b+c)*(a+c)*)

d1) ja, ist regulär, denn reguläre Sprachen sind unter Vereinigung abgeschlossen

d2) ja, ist regulär, denn reguläre Sprachen sind unter Schnitt abgeschlossen

(Platz für Aufgabe 4)

**Aufgabe 5 (1+2+6 P)**

Betrachten Sie den nichtdeterministischen endlichen Automaten (NFA) $A_5$ über $\Sigma = \{a, b\}$ in Abbildung 2.

a) Geben Sie einen Lauf (*run*) des Automaten $A_5$ auf der Eingabe *baba* an, bei dem das Wort akzeptiert wird.

b) Geben Sie einen regulären Ausdruck $r$ mit $L(r) = L(A_5)$ an. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen.

c) Konvertieren Sie $A_5$ mit dem in der Vorlesung angegebenen Verfahren in einen deterministischen endlichen Automaten (DFA). Geben Sie das Ergebnis auch graphisch an.

(Der Automat ist auf der nächsten Seite noch einmal abgebildet, falls Sie mehr als eine Seite benötigen.)

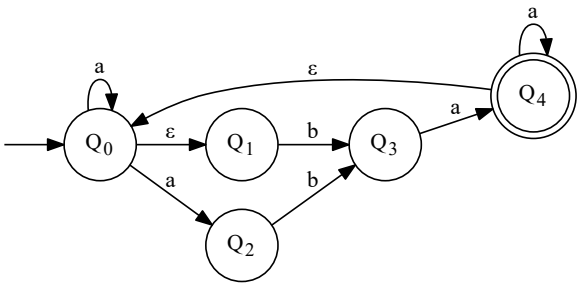
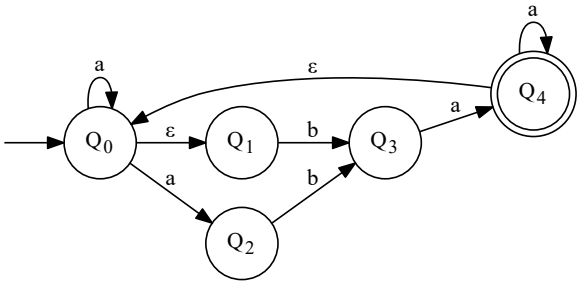



Abbildung 2: Automat $A_5$

(Platz für Aufgabe 5)




**Lösung:**

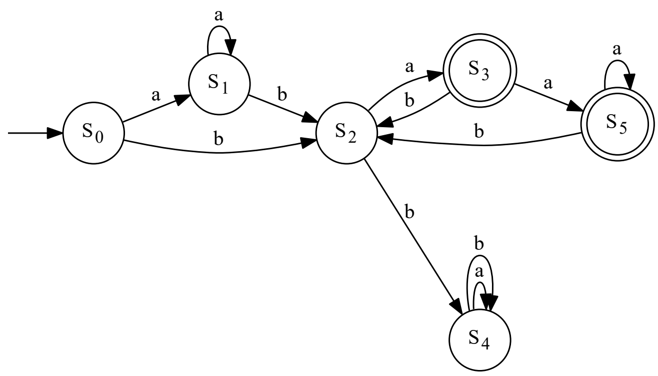
**Lösung**

a) – $(q_0, baba), (q_1, baba), (q_3, aba), (q_4, ba), (q_0, ba), (q_1, ba), (q_3, a), (q_4, \varepsilon)$ (akzeptierend)

b) $r = a^*(baa^*)^*baa^*$. 2P

c) 1P pro Zustand

```
#S0 = frozenset({'Q1', 'Q0'})
#Delta(S0, a) =  frozenset({'Q2', 'Q0', 'Q1'})
#Delta(S0, b) =  frozenset({'Q3'})
#Delta(S1, a) =  frozenset({'Q2', 'Q0', 'Q1'})
#State is equal to  S1
#Delta(S1, b) =  frozenset({'Q3'})
#State is equal to  S2
#Delta(S2, a) =  frozenset({'Q1', 'Q0', 'Q4'})
#Delta(S2, b) =  frozenset()
#Delta(S3, a) =  frozenset({'Q1', 'Q0', 'Q4', 'Q2'})
#Delta(S3, b) =  frozenset({'Q3'})
#State is equal to  S2
#Delta(S4, a) =  frozenset()
#State is equal to  S4
#Delta(S4, b) =  frozenset()
#State is equal to  S4
#Delta(S5, a) =  frozenset({'Q1', 'Q0', 'Q4', 'Q2'})
#State is equal to  S5
#Delta(S5, b) =  frozenset({'Q3'})
#State is equal to  S2
```


a
a
b
b
a
b
a
a
b
b
b
a
s0
s1
s2
s3
s4
s5

**Aufgabe 6 (2+2+4 P)**

Betrachten Sie den Automaten $A_6$ in tabellarischer Form:

| $A_6 : \delta$ | | a | b |
|---|---|---|---|
| $\rightarrow$ | 0 | 3 | 1 |
| | 1 | 0 | 2 |
| | 2 | 3 | 3 |
| $*$ | 3 | 3 | 3 |

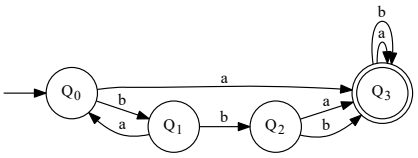
a) Stellen Sie den Automaten in graphischer Form dar.

b) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, das die an den verschiedenen Zuständen akzeptierten Sprachen beschreibt.

c) Lösen Sie dieses Gleichungssystem und geben Sie so einen regulären Ausdruck an, der die von $A_6$ akzeptierte Sprache beschreibt.

**Lösung:**

**Lösung:**




a) (0.5P pro korrektem Zustand)

b) (1/2P pro Gleichung)

- $L_0 = aL_3 + bL_1$
- $L_1 = aL_0 + bL_2$
- $L_2 = aL_3 + bL_3$
- $L_3 = aL_3 + bL_3 + \varepsilon$

c) (Je 1/2 P für $L_2, L_3$, 1P für $L_1$, 2P für $L_0$).

$$
\begin{array}{lcll}
L_3 & = & aL_3 + bL_3 + \varepsilon & \\
 & = & (a+b)L_3 + \varepsilon & \text{Ausklammern } L_3 \\
 & = & (a+b)^*\varepsilon & \text{Arden} \\
 & = & (a+b)^* & \text{Vereinfachen} \\
L_2 & = & aL_3 + bL_3 & \\
 & = & (a+b)L_3 & \text{Ausklammern } L_3 \\
 & = & (a+b)(a+b)^* & \text{Einsetzen } L_3 \\
L_1 & = & aL_0 + bL_2 & \\
 & = & aL_0 + b(a+b)(a+b)^* & \text{Einsetzen } L_2 \\
L_0 & = & aL_3 + bL_1 & \\
 & = & a(a+b)^* + bL_1 & \text{Einsetzen } L_3 \\
 & = & a(a+b)^* + b(aL_0 + b(a+b)(a+b)^*) & \text{Einsetzen } L_1 \\
 & = & a(a+b)^* + baL_0 + bb(a+b)(a+b)^* & \text{Distributivgesetz} \\
 & = & baL_0 + a(a+b)^* + bb(a+b)(a+b)^* & \text{Kommutativgesetz} \\
 & = & (ba)^*(a(a+b)^* + bb(a+b)(a+b)^*) & \text{Arden}
\end{array}
$$

(Platz für Aufgabe 6)

**Aufgabe 7 (5 P)**

Gegeben ist die aus der Vorlesung bekannte Definition eines deterministischen endlichen Automaten $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle für jede Aussage an, ob diese für **alle** Automaten $A$ zwingend gilt oder nicht.

| Aussage | wahr | falsch |
|---|---|---|
| $\|\Sigma\| \neq \infty$ | | |
| $\|\delta\| = \|Q\| \cdot \|\Sigma\|$ | | |
| $q_0 \in F \rightarrow \varepsilon \in L(A)$ | | |
| $F = Q \rightarrow L(A) = \Sigma^*$ | | |
| $\|F\| > 0 \rightarrow \|L(A)\| > 0$ | | |

**Lösung:** Lösung:

| Aussage | wahr | falsch |
|---|---|---|
| $\|\Sigma\| \neq \infty$ | x | |
| $\|\delta\| = \|Q\| \cdot \|\Sigma\|$ | x | |
| $q_0 \in F \rightarrow \varepsilon \in L(A)$ | x | |
| $F = Q \rightarrow L(A) = \Sigma^*$ | x | |
| $\|F\| > 0 \rightarrow \|L(A)\| > 0$ | | x |

Einen Punkt pro komplett richtig ausgefüllter Zeile.

# Ende