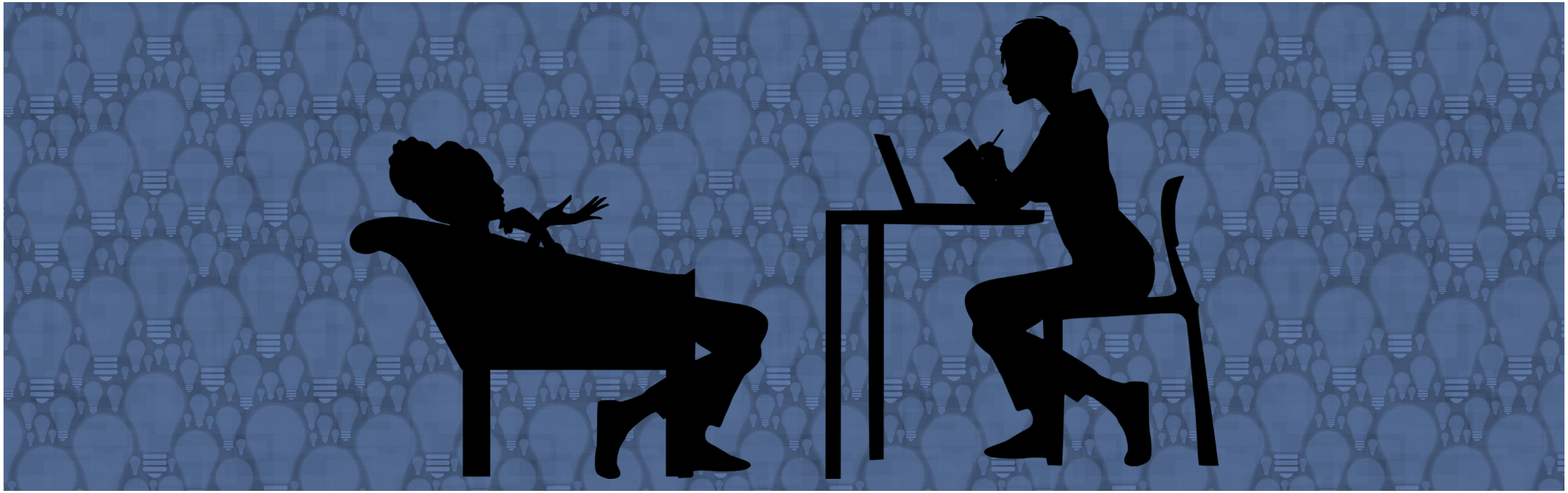
Logik – Übungen zum Selbststudium

DHBW Stuttgart, Prof. Falko Kötter, basierend auf Skripten von Prof. Bernd Schwinn und Prof. Jan Hladik



Bildquelle: https://pixabay.com/de/illustrations/zur%c3%bcck-in-der-schule-die-gl%c3%bchbirne-5861038/
https://pixabay.com/de/vectors/beratung-therapeut-silhouette-3630323/?download

Hinweise

- Die Aufgaben sind nach der Themenreihenfolge im Skript geordnet
- Für jede Aufgabe finden Sie auf der darauffolgenden Folie die Lösung
- Aufgaben variieren im Schwierigkeitsgrad
  - In der Regel steigt der Schwierigkeitsgrad mit fortlaufender Nummerierung (a,b,c,…)
  - Beachten Sie, dass zum Lernen manche Aufgaben unter Klausurniveau sind
- Die Aufgaben werden im Laufe der Vorlesungen bei Bedarf erweitert
- Tipp: Konzentrieren Sie sich auf die Aufgaben, die für Sie einen Lernfortschritt bedeuten

Logelei

"Wer von Euch hat den Ball in mein Fenster geworfen? schreit der Mann voller Zorn. Zitternd stehen die vier Kinder da.

Arno sagt: "Emil war es."

Emil sagt: "Gustav hat es getan."

Fritz sagt: "Ich war es nicht."

Gustav sagt: "Emil lügt."

Ein Passant, der den Wurf beobachtet hat, sagt: "Eins der Kinder war es, aber Vorsicht: Nur eins der Kinder sagt die Wahrheit."

Wer hat den Ball geworfen?

Logelei – Lösung

- Arno sagt: "Emil war es."
- Emil sagt: "Gustav hat es getan."
- Fritz sagt: "Ich war es nicht."
- Gustav sagt: "Emil lügt."
- Betrachte nacheinander die Fälle:

1. Arno sagt die Wahrheit. Dann lügen Emil, Fritz und Gustav. Wenn aber Gustav lügt, wenn er sagt "Emil lügt", dann sagt Emil die Wahrheit. Das ist ein Widerspruch.
2. Emil sagt die Wahrheit. Dann lügen Arno, Fritz und Gustav. Wenn aber Fritz lügt, wenn er sagt "Ich war es nicht", dann lügt Emil. Das ist ein Widerspruch.
3. Fritz sagt die Wahrheit. Dann lügen Arno, Emil, und Gustav. Wenn aber Gustav lügt, wenn er sagt "Emil lügt", dann sagt Emil die Wahrheit. Das ist ein Widerspruch.

- Folgerung: Gustav sagt die Wahrheit. Also lügt Fritz. Also hat Fritz den Ball geworfen.

Bildquelle: https://pixabay.com/de/vectors/baseball-ball-sport-naht-stiche-146883/

MIU revisited

Gegeben ist ein formales System mir den folgenden Regeln:

1. Alle Wörter bestehen aus den Buchstaben **M**, **I** und **U**
2. Wenn ein Wort mit **I** endet, darf man **U** anhängen
3. **III** darf durch **U** ersetzt werden
4. **UU** darf entfernt werden
5. Das Teilwort nach einem **M** darf verdoppelt werden
6. Eine Ableitung beginnt immer mit **MI**

Leiten Sie folgende Wörter ab:

a. MUI
b. MIUI
c. MUIUUIU

Bildquelle: https://pixabay.com/de/vectors/kuh-rinder-tier-bauernhof-vektor-1712150/

MIU revisited – Lösung

Gegeben ist ein formales System mir den folgenden Regeln:

1. Alle Wörter bestehen aus den Buchstaben **M**, **I** und **U**
2. Wenn ein Wort mit **I** endet, darf man **U** anhängen
3. **III** darf durch **U** ersetzt werden
4. **UU** darf entfernt werden
5. Das Teilwort nach einem **M** darf verdoppelt werden
6. Eine Ableitung beginnt immer mit **MI**

Leiten Sie folgende Wörter ab:

a. MI ⊢ MII ⊢ MIIII ⊢ MUI
b. MI ⊢ MII ⊢ MIIII ⊢ MIIIIIIII ⊢ MIIIIIIIIU ⊢ MIIIIIUU ⊢ MIIIII ⊢ MIUI
c. MI ⊢ MII ⊢ MIIII ⊢ MIIIIU ⊢ MUIU ⊢ MUIUUIU

Mengenverhältnisse

Gegeben sind folgende Mengen:

$$M_1 = \{1, 2, 3, 4\} \qquad M_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$M_2 = \{2, 3, 4, 5\} \qquad M_6 = \{5,4,2,3\}$$
$$M_3 = \{1,3,5\} \qquad M_7 = \{\ 2, 3, 4\}$$
$$M_4 = \{3\} \qquad M_8 = \{2, 4\}$$

a. Berechnen Sie die Mächtigkeit aller Mengen

b. Prüfen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind

$M_7 \subseteq M_1$	$\|M_3\| > \|M_8\|$	$\|M_2\| = \|M_7\|$	$\|M_5\| \geq \|M_2\|$	$2 \in \|M_2\|$	$M_1 \subseteq M_5$
$M_2 \subset \mathbb{Z}$	$M_4 \subset M_3$	$3 \in M_2$	$5 \notin M_7$	$M_4 = M_6$	$M_3 \subset M_3$
$M_1 \subseteq M_6$	$M_8 \supseteq M_7$	$M_2 \subseteq M_1$	$M_6 \subset M_2$	$\|M_1\| = \|M_6\|$	$M_5 \in \mathbb{N}$
$M_2 = M_6$	$M_8 \subseteq M_8$	$M_4 = \|M_7\|$	$M_4 \in M_7$	$M_7 \supseteq M_8$	$\|M_3\| = \|M_7\|$

Mengenverhältnisse – Lösung

Gegeben sind folgende Mengen:

a. Berechnen Sie die Mächtigkeit aller Mengen

$M_1 = \{1, 2, 3, 4\}$	$\lvert M_1\rvert = 4$	$M_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\lvert M_5\rvert = 5$
$M_2 = \{2, 3, 4, 5\}$	$\lvert M_2\rvert = 4$	$M_6 = \{5,4,2,3\}$	$\lvert M_6\rvert = 4$
$M_3 = \{1,3,5\}$	$\lvert M_3\rvert = 3$	$M_7 = \{\,2, 3, 4\}$	$\lvert M_7\rvert = 3$
$M_4 = \{3\}$	$\lvert M_4\rvert = 1$	$M_8 = \{2, 4\}$	$\lvert M_8\rvert = 2$

b. Prüfen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind

⚡ falsch

$M_7 \subseteq M_1$	$\lvert M_3\rvert > \lvert M_8\rvert$	$\lvert M_2\rvert = \lvert M_7\rvert$ ⚡	$\lvert M_5\rvert \geq \lvert M_2\rvert$	$2 \in \lvert M_2\rvert$ ⚡	$M_1 \subseteq M_5$
$M_2 \subset \mathbb{Z}$	$M_4 \subset M_3$	$3 \in M_2$	$5 \notin M_7$	$M_4 = M_6$ ⚡	$M_3 \subset M_3$ ⚡
$M_1 \subseteq M_6$ ⚡	$M_8 \supseteq M_7$ ⚡	$M_2 \subseteq M_1$ ⚡	$M_6 \subset M_2$ ⚡	$\lvert M_1\rvert = \lvert M_6\rvert$	$M_5 \in \mathbb{N}$ ⚡
$M_2 = M_6$	$M_8 \subseteq M_8$	$M_4 = \lvert M_7\rvert$ ⚡	$M_4 \in M_7$ ⚡	$M_7 \supseteq M_8$	$\lvert M_3\rvert = \lvert M_7\rvert$

Venn-Diagramme

Erstellen Sie Venn-Diagramme für folgende Gruppen von Mengen:

a. $M_1 = \{1, 2, 3, 4\},\ M_2 = \{4,5,6,7\}$

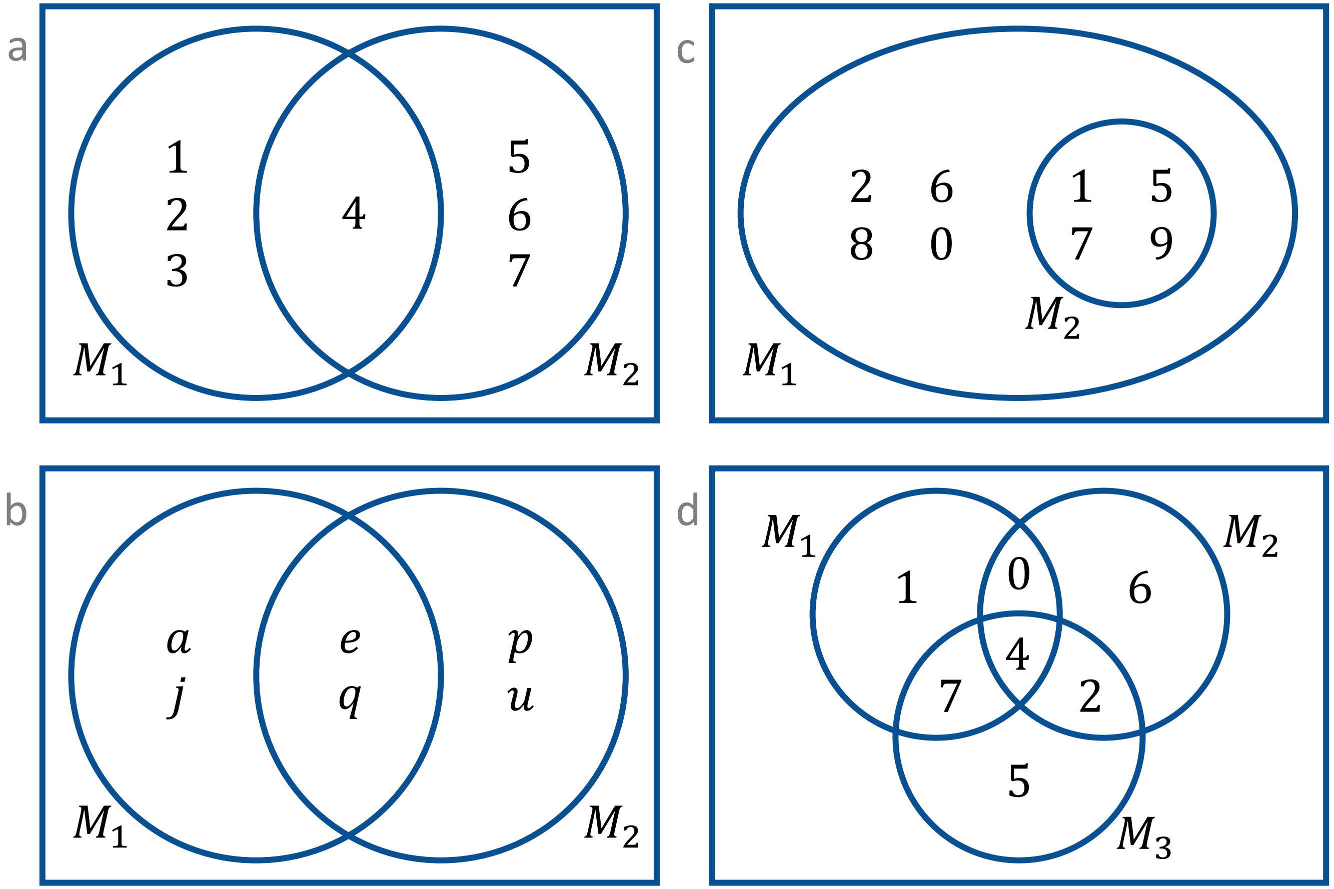
b. $M_1 = \{a, j, e, q\},\ M_2 = \{e, p, q, u\}$

c. $M_1 = \{1,2,5,6,7,8,9,0\},\ M_2 = \{1, 9, 7, 5\}$

d. $M_1 = \{1,4,7,0\},\ M_2 = \{0,2,4,6\}, M_3 = \{2,4,5,7\}$

Bildquelle: https://pixabay.com/de/vectors/venn-diagramm-diagramm-einstellen-41218/

Venn-Diagramme – Lösung



Mengenoperationen

Gegeben sind die Trägermenge $T = \{1, 2, 3, 4,6,7,8,9,0\}$ und folgende Mengen:

$$M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$M_2 = \{6, 7, 8, 9\}$$
$$M_3 = \{0,2, 4, 6, 8\}$$

Bestimmen Sie folgende Mengen durch explizite Aufzählung:

a. $(M_1 \cup M_2) \cap M_3$
b. $M_1 \cup (M_2 \cap M_3)$
c. $\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3}$
d. $(M_1 \setminus M_3) \cup (M_2 \setminus M_3)$

Bildquelle: https://pixabay.com/de/vectors/zahlen-kreis-vektor-clip-art-2773773/

Mengenoperationen – Lösung

Gegeben sind die Trägermenge $T = \{1, 2, 3, 4,6,7,8,9,0\}$ und folgende Mengen:

$$M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$M_2 = \{6, 7, 8, 9\}$$
$$M_3 = \{0,2, 4, 6, 8\}$$

Bestimmen Sie folgende Mengen durch explizite Aufzählung:

a. $(M_1 \cup M_2) \cap M_3 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \cap M_3 = \{2,4,6,8\}$

b. $M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = M_1 \cup \{6,8\} = \{1,2,3,4,5,6,8\}$

c. $\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3} = (\{0,6,7,8,9\} \cap \{0,1,2,3,4,5\}) \cap \{1,3,5,7,9\} = \emptyset$

d. $(M_1 \setminus M_3) \cup (M_2 \setminus M_3) = \{1,3,5\} \cup \{7,9\} = \{1,3,5,7,9\}$

Bildquelle: https://pixabay.com/de/vectors/zahlen-kreis-vektor-clip-art-2773773/

Mengenknobelei

Gegeben sind die aus dem Skript bekannten Mengen
$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}^{\geq 1}, \mathbb{N}$ sowie die Operatoren $\cup, \cap, \setminus, ()$

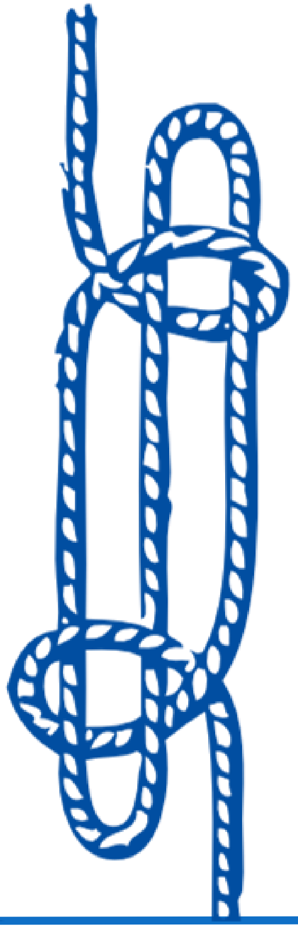
Finden Sie eine regelkonforme Formel aus Mengen und Operatoren, um folgende Mengen zu erzeugen.

a. Eine Menge mit Mächtigkeit 0 (also die leere Menge $\emptyset$)

b. Eine Menge Mit Mächtigkeit 1

Allerdings muss Ihre Formel folgende **Regeln** befolgen:

- Die Mengen dürfen nur in der obigen Reihenfolge in ihrer Formel stehen (Erlaubt: $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Z}$, Verboten: $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}$)
- Keine Menge darf in Ihrer Formel mehr als einmal vorkommen (Verboten: $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}$)
- Das Komplement ist kein erlaubter Operator (Verboten: $\overline{\mathbb{Z}}$)



Mengenknobelei – Lösung

a. $(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) \cap \mathbb{N}$

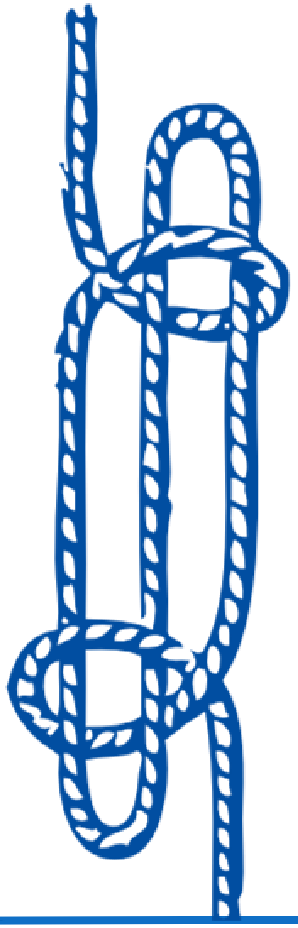
In Worten: Die rationalen Zahlen außer den ganzen Zahlen (also diejenigen Brüche, bei denen es eine „Nachkommstelle“ gäbe) geschnitten mit den natürlichen Zahlen. Da die natürlichen Zahlen eine Teilmenge der ganzen Zahlen sind, ist die Schnittmenge leer und hat damit die Mächtigkeit 0.

b. $(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^{\geq 1}) \cap \mathbb{N} = \{0\}$

In Worten: Die ganzen Zahlen außer die natürlichen Zahlen größer Null {0,-1,-2,…} geschnitten mit den natürlichen Zahlen {0,1,2,…}. Die einzige gemeinsame Zahl ist die Null, die Schnittmenge hat also ein Element und damit die Mächtigkeit 1.

Andere Lösungen sind möglich.

Achtung: Triviale Lösungen wie $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q}$ und $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}^{\geq 1}$ sind aufgrund der Reihenfolge-Regel nicht erlaubt.



Bildquelle: https://pixabay.com/de/vectors/knoten-seil-segel-nautisch-segeln-312006/

Rechnen mit Mengen

Gegeben seien die (beliebigen) Mengen A, B, C und die Trägermenge T.

Beweisen Sie durch Anwendung der Rechenregeln folgende Gleichungen:

a. $(A \cap \bar{B}) \cap (\bar{A} \cap B) = \emptyset$

b. $\overline{C \cap \overline{(A \cup B)}} = A \cup B \cup \bar{C}$

c. $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Tipp: Denken Sie an diesen Herrn

Rechnen mit Mengen – Lösung

Gegeben seien die (beliebigen) Mengen A, B, C und die Trägermenge T.

Beweisen Sie durch Anwendung der Rechenregeln folgende Gleichungen:

a. $(A \cap \bar{B}) \cap (\bar{A} \cap B) = \emptyset$

$(A \cap \bar{B}) \cap (\bar{A} \cap B) =$	Kommutativ
$(A \cap \bar{A}) \cap (\bar{B} \cap B) =$	Inverse Elemente
$(\emptyset) \cap (\emptyset) =$	Absorbierendes Element
$\emptyset$	

Rechnen mit Mengen – Lösung

Gegeben seien die (beliebigen) Mengen A, B, C und die Trägermenge T.

Beweisen Sie durch Anwendung der Rechenregeln folgende Gleichungen:

b. $\overline{C \cap \overline{(A \cup B)}} = A \cup B \cup \bar{C}$

$\overline{C \cap \overline{(A \cup B)}} =$	De Morgen
$\bar{C} \cup \overline{\overline{(A \cup B)}} =$	Doppelte Negation
$\bar{C} \cup (A \cup B) =$	Assoziativ, Kommutativ
$A \cup B \cup \bar{C}$	

Rechnen mit Mengen – Lösung

Gegeben seien die (beliebigen) Mengen A, B, C und die Trägermenge T.

Beweisen Sie durch Anwendung der Rechenregeln folgende Gleichungen:

c. $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$\bar{A} \cup \bar{B} \cup \overline{A \cup B} =$	De Morgan
$\bar{A} \cup \bar{B} \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) =$	Kommutativ
$\bar{A} \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup \bar{B} =$	Distributiv
$(\bar{A} \cap T) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup \bar{B} =$	Neutrales Element
$(\bar{A} \cap (T \cup \bar{B})) \cup \bar{B} =$	Distributiv
$(\bar{A} \cap T) \cup \bar{B} =$	Absorbierendes Element
$\bar{A} \cup \bar{B}$	Neutrales Element

Kartesisches Produkt und Potenzmenge

Gegeben sind die Trägermenge folgende Mengen:

$$M_1 = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$M_2 = \{a, b, c\}$$
$$M_3 = \{x, y\}$$

Bestimmen Sie folgende Mengen durch explizite Aufzählung:

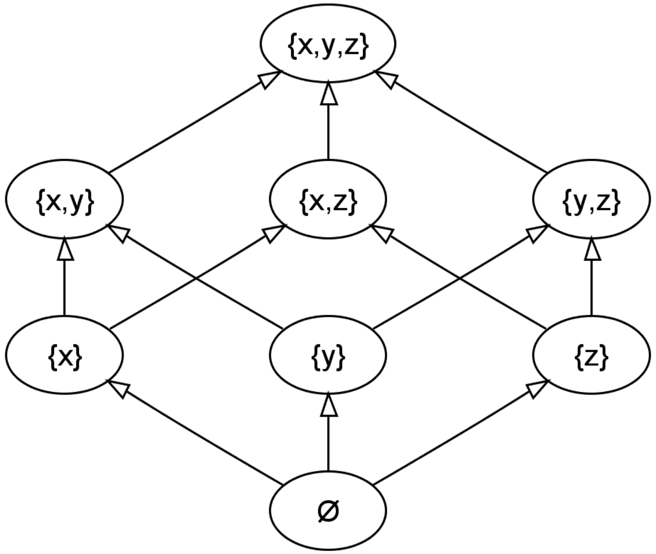
a. $M_1 \times M_2$

b. 2^{M_3}

c. $M_3 \times M_2$

d. $(M_1 \times M_3) \cap (M_3 \times M_1)$

e. $2^{M_1} \cap 2^{M_2}$



Potenzmenge von {x,y,z}

Kartesisches Produkt und Potenzmenge – Lösungen

Gegeben sind die Trägermenge folgende Mengen:

$$M_1 = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$M_2 = \{a, b, c\}$$
$$M_3 = \{x, y\}$$

Bestimmen Sie folgende Mengen durch explizite Aufzählung:

a. $M_1 \times M_2 = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a),$
$(1, b), (2, b), (3, b), (4, b), (1, c), (2, c), (3, c), (4, c)\}$

b. $2^{M_3} = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$

c. $M_3 \times M_2 = \{(x, a), (y, a), (x, b), (y, b), (x, c), (y, c)\}$

d. $(M_1 \times M_3) \cap (M_3 \times M_1) = \emptyset$

e. $2^{M_1} \cap 2^{M_2} = \{\emptyset\}$

Mengenlehre – wahr oder falsch?

Aussage	Wahr	Falsch
Wenn $M_1 \subseteq M_2$ und $M_1 \supseteq M_2$, dann $M_1 = M_2$		
Wenn $M_1 \subseteq M_2$, dann $\|M_1\| < \|M_2\|$		
$\|\{\emptyset\}\| = 0$		
$\|2^M\| = 2^{\|M\|}$		
$\|M_1 \times M_2\| = \|M_1\| \times \|M_2\|$		
$M_1 \cap M_2 = \overline{M_1} \backslash \overline{M_2}$		
Jede Relation $R \in 2^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ ist homogen		
Die Mächtigkeit einer Menge $\|M\|$ ist eine homogene Relation		
$M_1 \times M_2$ ist eine Menge aus Mengen		
2^M ist eine Menge aus Tupeln		
Die Wurzel in den reellen Zahlen $x \rightarrow \sqrt{x} \in 2^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ ist linkstotal		
$\{(1, a), (2, a), (3, b), (4, b)\}$ ist rechtseindeutig		
$\{(a, 1), (a, 2), (b, 3), (b, 4)\}$ ist rechtseindeutig		

Mengenlehre – wahr oder falsch? – Lösungen

Aussage	Wahr	Falsch	Kommentar
Wenn $M_1 \subseteq M_2$ und $M_1 \supseteq M_2$, dann $M_1 = M_2$	X		
Wenn $M_1 \subseteq M_2$, dann $\|M_1\| < \|M_2\|$		X	$\|M_1\| \leq \|M_2\|$
$\|\{\emptyset\}\| = 0$		X	$\|\{\emptyset\}\| = 1$, Menge enthält $\emptyset$
$\|2^M\| = 2^{\|M\|}$	X		
$\|M_1 \times M_2\| = \|M_1\| \times \|M_2\|$	X		
$M_1 \cap M_2 = \overline{M_1} \backslash \overline{M_2}$		X	Unfug, Gegenbeispiel einfach
Jede Relation $R \in 2^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ ist homogen	X		
Die Mächtigkeit einer Menge $\|M\|$ ist eine homogene Relation		X	Bildet Menge auf Zahl ab
$M_1 \times M_2$ ist eine Menge aus Mengen		X	Aus Tupeln
2^M ist eine Menge aus Tupeln		X	Aus Mengen
Die Wurzel in den reellen Zahlen $x \rightarrow \sqrt{x} \in 2^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ ist linkstotal		X	z.B. $\sqrt{-1}$ nicht in $\mathbb{R}$
$\{(1, a), (2, a), (3, b), (4, b)\}$ ist rechtseindeutig	X		
$\{(a, 1), (a, 2), (b, 3), (b, 4)\}$ ist rechtseindeutig		X	z.B. für a zwei Möglichkeiten

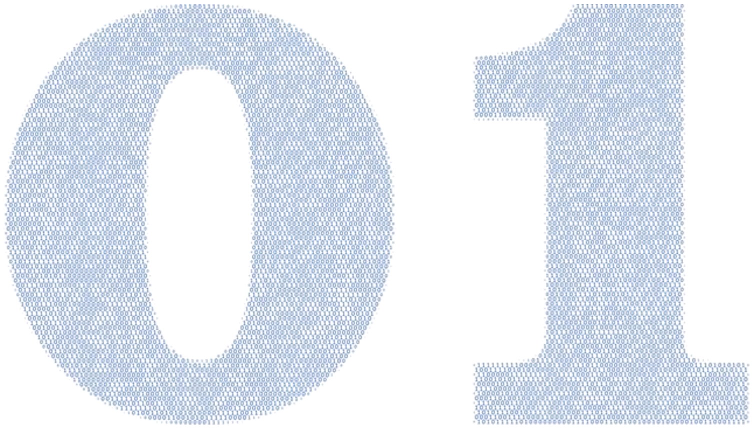
Interpretationen

Finden Sie für jede Formel eine Belegung, die die Formel wahr und eine Belegung, die die Formel falsch macht:

a. $(A \wedge \neg B) \vee C$

b. $A \vee B \rightarrow \neg A \vee \neg B$

c. $\neg\big((A \wedge B) \vee (\neg B \wedge \neg D) \vee (C \rightarrow \neg A)\big)$



Bildquelle: https://pixabay.com/de/vectors/bin%c3%a4r-null-eins-typografie-code-6121765/

Interpretationen – Lösung

Finden Sie für jede Formel eine Belegung, die die Formel wahr und eine Belegung, die die Formel falsch macht:

a. $(A \land \neg B) \lor C$

$$\text{wahr: } \{A \rightarrow 1, B \rightarrow 0, C \rightarrow 1\}$$
$$\text{falsch: } \{A \rightarrow 0, B \rightarrow 0, C \rightarrow 0\}$$

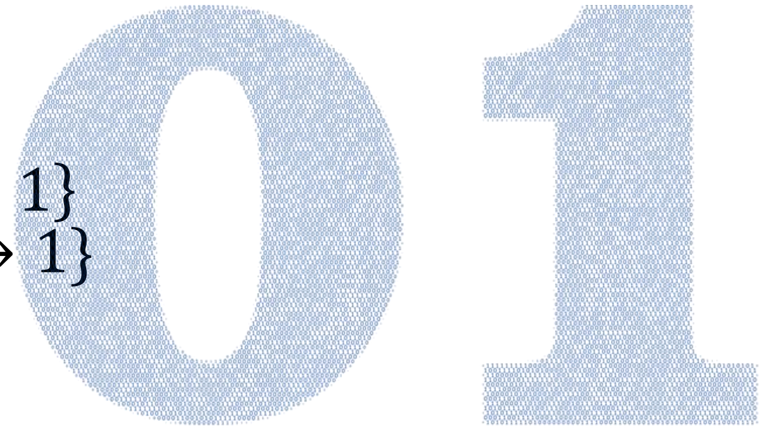
b. $A \lor B \rightarrow \neg A \lor \neg B$

$$\text{wahr: } \{A \rightarrow 0, B \rightarrow 0\}$$
$$\text{falsch: } \{A \rightarrow 1, B \rightarrow 1\}$$

c. $\neg\big((A \land B) \lor (\neg B \land \neg D) \lor (C \rightarrow \neg A)\big)$

$$\text{wahr: } \{A \rightarrow 1, B \rightarrow 0, C \rightarrow 1, D \rightarrow 1\}$$
$$\text{falsch: } \{A \rightarrow 1, B \rightarrow 1, C \rightarrow 1, D \rightarrow 1\}$$

Hinweis: Andere Lösungen sind möglich



Bildquelle: https://pixabay.com/de/vectors/bin%c3%a4r-null-eins-typografie-code-6121765/

Wahrheitstabellen

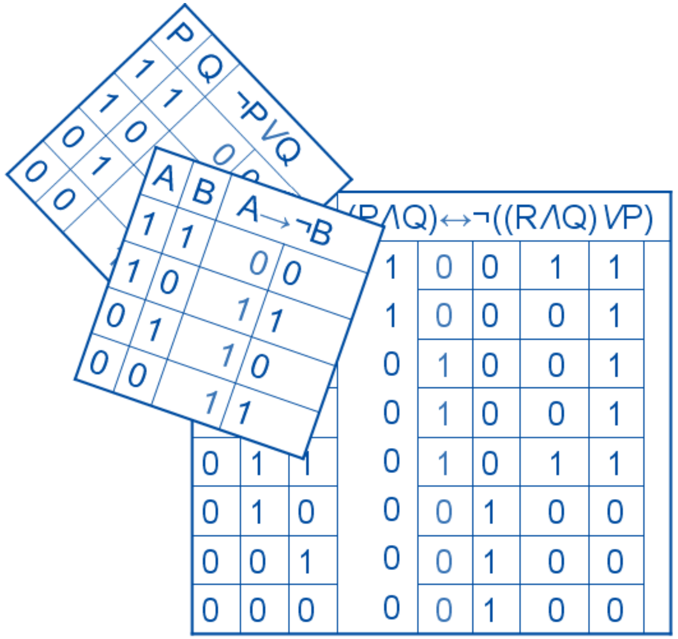
Legen Sie für folgende Formeln eine Wahrheitstabelle an, in der der Wahrheitswert für jede mögliche Belegung angegeben ist:

a. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

b. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$

c. $((A \wedge B) \rightarrow C) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow C)$

d. $((A \vee B) \rightarrow C) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C))$



Wahrheitstabellen – Lösung

Legen Sie für folgende Formeln eine Wahrheitstabelle an, in der der Wahrheitswert für jede mögliche Belegung angegeben ist:

a. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

A	B	$(A \rightarrow B)$	$\leftrightarrow$	$(\neg B$	$\rightarrow$	$\neg A)$
0	**0**	1	**1**	1	1	1
0	**1**	1	**1**	0	1	1
1	**0**	0	**1**	1	0	0
1	**1**	1	**1**	0	1	0

Wahrheitstabellen – Lösung

Legen Sie für folgende Formeln eine Wahrheitstabelle an, in der der Wahrheitswert für jede mögliche Belegung angegeben ist:

b. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$

A	B	$(A \rightarrow B)$	$\leftrightarrow$	$(\neg A$	$\rightarrow$	$\neg B)$
0	**0**	1	**1**	1	1	1
0	**1**	1	**0**	1	0	0
1	**0**	0	**0**	0	1	1
1	**1**	1	**1**	0	1	0

Wahrheitstabellen – Lösung

Legen Sie für folgende Formeln eine Wahrheitstabelle an, in der der Wahrheitswert für jede mögliche Belegung angegeben ist:

c. $((A \wedge B) \rightarrow C) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow C)$

A	B	C	$((A \wedge B)$	$\rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$((A \rightarrow B)$	$\rightarrow C)$
0	**0**	**0**	0	1	**0**	1	0
0	**0**	**1**	0	1	**1**	1	1
0	**1**	**0**	0	1	**0**	1	0
0	**1**	**1**	0	1	**1**	1	1
1	**0**	**0**	0	1	**1**	0	1
1	**0**	**1**	0	1	**1**	0	1
1	**1**	**0**	1	0	**1**	1	0
1	**1**	**1**	1	1	**1**	1	1

Wahrheitstabellen – Lösung

Legen Sie für folgende Formeln eine Wahrheitstabelle an, in der der Wahrheitswert für jede mögliche Belegung angegeben ist:

d. $((A \vee B) \rightarrow C) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C))$

A	B	C	$((A \vee B)$	$\rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$((A \rightarrow B)$	$\wedge$	$(B \rightarrow C))$
0	**0**	**0**	0	1	**1**	1	1	1
0	**0**	**1**	0	1	**1**	1	1	1
0	**1**	**0**	1	0	**1**	1	0	0
0	**1**	**1**	1	1	**1**	1	1	1
1	**0**	**0**	1	0	**1**	0	0	1
1	**0**	**1**	1	1	**0**	0	0	1
1	**1**	**0**	1	0	**1**	1	0	0
1	**1**	**1**	1	1	**1**	1	1	1

Inspektor Craig – Teil 1

Ein Fall aus den Akten von Inspektor Craig:

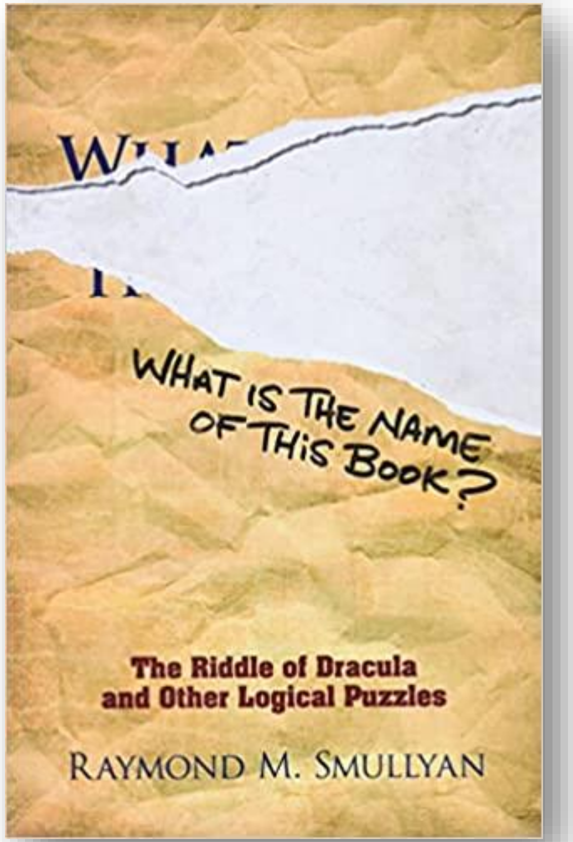
"Was fängst du mit diesen Fakten an?" fragt Inspektor Craig den Sergeant McPherson.

1. Wenn A schuldig und B unschuldig ist, so ist C schuldig.
2. C arbeitet niemals allein.
3. A arbeitet niemals mit C.
4. Niemand außer A, B oder C war beteiligt, und mindestens einer von ihnen ist schuldig

Der Sergeant kratzte sich den Kopf und sagte: "Nicht viel, tut mir leid, Sir. Können Sie nicht aus diesen Fakten schließen, wer unschuldig und wer schuldig ist? " "Nein", entgegnete Craig, "aber das Material reicht aus, um wenigstens einen von ihnen zu beschuldigen."

Wer ist auf jeden Fall schuldig?

Stellen Sie aussagelogische Formeln für alle vier Fakten auf und verwenden Sie eine Wahrheitstabelle.



(aus R. Smullyan: "Wie heißt dieses Buch?")

Bildquelle: https://www.amazon.de/What-Name-This-Book-Recreational/dp/0486481980/ref=pd_lpo_1?pd_rd_i=0486481980&psc=1

Inspektor Craig – Teil 1 – Lösung

Formalisierung: A = A ist schuldig, etc.

1. Wenn A schuldig und B unschuldig ist, so ist C schuldig:
$$A \land \neg B \to C$$
2. C arbeitet niemals allein:
$$C \to A \lor B$$
3. A arbeitet niemals mit C:
$$A \to \neg C$$
4. Niemand außer A, B oder C war beteiligt, und mindestens einer von ihnen ist schuldig:
$$A \lor B \lor C$$

Inspektor Craig – Teil 1 – Lösung

A	B	C	$A \wedge \neg B \rightarrow C$	$C \rightarrow A \vee B$	$A \rightarrow \neg C$	$A \vee B \vee C$
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1

Wir wissen: Alle vier Fakten sind wahr.

Dies ist nur für drei Zeilen der Wahrheitstabelle gegeben, daher wissen wir, eine der drei Belegungen ist die zutreffende.

In jeder Belegung ist B schuldig, insofern ist B auf jeden Fall schuldig.

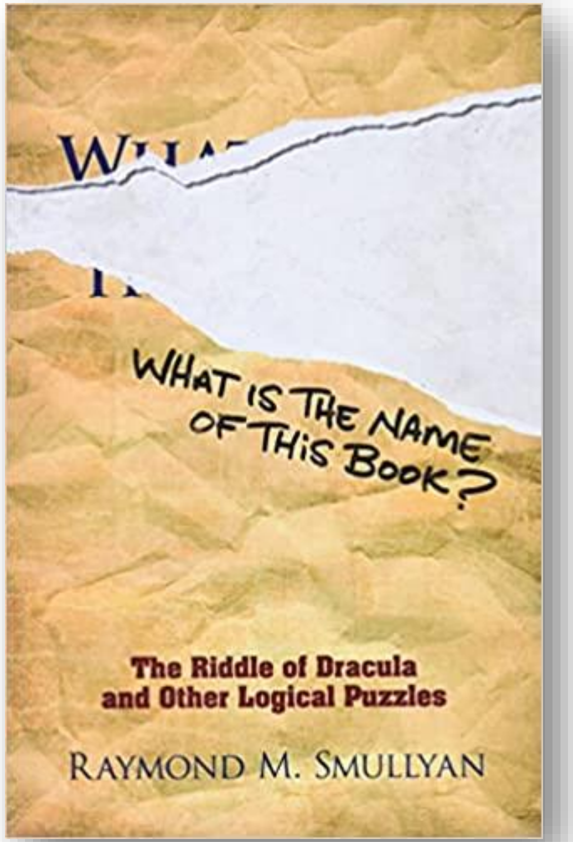
Ob er allein gehandelt hat, oder ob er einen Komplizen (entweder A oder C) hatte, ist mit den vorliegenden Fakten noch unklar.

Inspektor Craig – Teil 2

Mr. McGregor, ein Londoner Ladeninhaber, rief bei Scotland Yard an und teilte mit, dass sein Laden ausgeraubt worden sei. Drei Verdächtige, A, B und C, wurden zum Verhör geholt. Folgende Tatbestände wurden ermittelt:

1. Jeder der Männer A, B und C war am Tag des Geschehens in dem Laden gewesen, und kein anderer hatte den Laden an dem Tag betreten.
2. Wenn A schuldig ist, so hat er genau einen Komplizen.
3. Wenn B unschuldig ist, so ist auch C unschuldig.
4. Wenn genau zwei schuldig sind, dann ist A einer von ihnen.
5. Wenn C unschuldig ist, so ist auch B unschuldig.

Wen hat Inspektor Craig beschuldigt?
Stellen Sie aussagelogische Formeln für alle fünf Fakten auf und verwenden Sie eine Wahrheitstabelle.



(aus R. Smullyan: "Wie heißt dieses Buch?")

Inspektor Craig – Teil 2 – Lösung

Formalisierung: A = A ist schuldig, etc.

1. Jeder der Männer A, B und C war am Tag des Geschehens in dem Laden gewesen, und kein anderer hatte den Laden an dem Tag betreten:
$$A \lor B \lor C$$
2. Wenn A schuldig ist, so hat er genau einen Komplizen:
$$A \to (B \land \neg C) \lor (\neg B \land C)$$
3. Wenn B unschuldig ist, so ist auch C unschuldig:
$$\neg B \to \neg C$$
4. Wenn genau zwei schuldig sind, dann ist A einer von ihnen:
$$\neg(B \land C \land \neg A)$$
5. Wenn C unschuldig ist, so ist auch B unschuldig:
$$\neg C \to \neg B$$

Inspektor Craig – Teil 2 – Lösung

A	B	C	$A \vee B \vee C$	$A \rightarrow (B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C)$	$\neg B \rightarrow \neg C$	$\neg(B \wedge C \wedge \neg A)$	$\neg C \rightarrow \neg B$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	1	0	1	1	1

Alle Zeilen sind falsch. Ergo können nicht alle Fakten stimmen.

Vielleicht haben wir einen Fehler in unserer Formalisierung?

Lösung auf der nächsten Folie.

Inspektor Craig – Teil 2 – Lösung

Ladeninhaber McGregor, der die Anschuldigung erhoben hat, war an dem Tag natürlich auch im Laden. Verdächtig…

1. Jeder der Männer A, B und C war am Tag des Geschehens in dem Laden gewesen, und kein anderer hatte den Laden an dem Tag betreten:
$$A \vee B \vee C \vee M$$

A	B	C	M	$A \vee B \vee C \vee M$	$A \to (B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C)$	$\neg B \to \neg C$	$\neg(B \wedge C \wedge \neg A)$	$\neg C \to \neg B$
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

Ergo ist McGregor der Schuldige, er hat den Raub fingiert.

Äquivalenzumformungen

Zeigen Sie durch Verwendung der Rechenregeln folgende Äquivalenzen:

a. $(A \wedge \neg B) \rightarrow C \equiv C \vee (A \rightarrow B)$

b. $A \leftrightarrow B \equiv \neg((\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B))$

c. $A \wedge (B \rightarrow C) \vee \neg A \wedge C \equiv A \wedge \neg B \vee ((C \vee B) \wedge (C \vee \neg B))$

Tipp: Sie dürfen frei auswählen, wie Sie die Äquivalenz zeigen. Sie können also die rechte Seite zur linken oder die linke Seite zur rechten umformen. Sie können auch beide Seiten zu einer gleichen dritten Formel umformen.

Bildquelle: https://pixabay.com/de/vectors/symbol-silhouette-waage-1302201/

Äquivalenzumformungen

Zeigen Sie durch Verwendung der Rechenregeln folgende Äquivalenzen:

a. $(A \land \neg B) \rightarrow C \equiv C \lor (A \rightarrow B)$

$(A \land \neg B) \rightarrow C$	Implikation auflösen
$\neg(A \land \neg B) \lor C$	DeMorgan
$\neg A \lor B \lor C$	Kommutativ
$C \lor \neg A \lor B$	Implikation
$C \lor (A \rightarrow B)$	

Bildquelle: https://pixabay.com/de/vectors/symbol-silhouette-waage-1302201/

Äquivalenzumformungen

Zeigen Sie durch Verwendung der Rechenregeln folgende Äquivalenzen:

b. $A \leftrightarrow B \equiv \neg((\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B))$

$\neg((\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B))$	DeMorgan
$\neg(\neg A \vee \neg B) \vee \neg(A \vee B)$	DeMorgan
$\neg\neg A \wedge \neg\neg B \vee \neg(A \vee B)$	Doppelte Negation
$A \wedge B \vee \neg(A \vee B)$	DeMorgan
$A \wedge B \vee \ \neg A \wedge \neg B$	Äquivalenz
$A \leftrightarrow B$	

Bildquelle: https://pixabay.com/de/vectors/symbol-silhouette-waage-1302201/

Äquivalenzumformungen

Zeigen Sie durch Verwendung der Rechenregeln folgende Äquivalenzen:

c. $A \land (B \to C) \lor \neg A \land C \equiv A \land \neg B \lor ((C \lor B) \land (C \lor \neg B))$

Links:

$A \land (B \to C) \lor \neg A \land C$	Auflösen Implikation
$A \land (\neg B \lor C) \lor \neg A \land C$	Distributivgesetz
$A \land \neg B \lor A \land C \ \lor \neg A \land C$	Distributivgesetz
$A \land \neg B \lor (A \lor \neg A) \land C$	Tautologie
$A \land \neg B \lor \top \land C$	Neutrales Element
$A \land \neg B \lor C$	

Rechts:

$A \land \neg B \lor ((C \lor B) \land (C \lor \neg B))$	Distributivgesetz
$A \land \neg B \lor (C \lor (B \land \neg B))$	Kontradiktion
$A \land \neg B \lor (C \lor \bot)$	Neutrales Element
$A \land \neg B \lor C$	

Bildquelle: https://pixabay.com/de/vectors/symbol-silhouette-waage-1302201/

Aussagenlogik – gültig, kontingent oder unerfüllbar?

Aussage	Gültig	Kontingent	Unerfüllbar
$A \wedge \neg A$			
$A \vee \neg A$			
$A \vee A$			
$\neg(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$			
$(A \wedge B \wedge C) \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$			
$A \wedge B \rightarrow \neg(A \vee B)$			
$\neg A \vee (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$			
$A \wedge \neg A \rightarrow B \vee \neg B$			
$A \vee \neg A \rightarrow B \wedge \neg B$			
$A \wedge B \vee C \wedge \neg B \vee \neg A \wedge C$			
$A \vee B \vee \neg(A \wedge B) \rightarrow A \wedge B \wedge \neg(A \vee B)$			

Aussagenlogik – gültig, kontingent oder unerfüllbar?

Aussage	Gültig	Kontingent	Unerfüllbar
$A \wedge \neg A$			X
$A \vee \neg A$	X		
$A \vee A$		X	
$\neg(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$	X		
$(A \wedge B \wedge C) \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$	X		
$A \wedge B \rightarrow \neg(A \vee B)$		X	
$\neg A \vee (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$	X		
$A \wedge \neg A \rightarrow B \vee \neg B$	X		
$A \vee \neg A \rightarrow B \wedge \neg B$			X
$A \wedge B \vee C \wedge \neg B \vee \neg A \wedge C$		X	
$A \vee B \vee \neg(A \wedge B) \ \rightarrow A \wedge B \wedge \neg(A \vee B)$			X

Konjunktive Normalform

Wandeln Sie folgende Formeln mittels des in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus in KNF um:

a. $(A \land \neg B) \rightarrow (\neg C \lor D)$

b. $\neg\big(A \land (B \lor \neg C) \land \neg(A \land D)\big)$

c. $(C \land \neg C) \lor (B \land D) \lor \neg A$

d. $\neg(A \land \neg B) \lor \neg\big((D \lor \neg C) \land \neg(\neg B \rightarrow \neg A)\big)$

e. $(A \lor \neg B) \land (C \lor A) \land \neg D$

Konjunktive Normalform – Lösungen

Wandeln Sie folgende Formeln mittels des in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus in KNF um:

a. $(A \land \neg B) \rightarrow (\neg C \lor D)$

$$\neg(A \land \neg B) \lor (\neg C \lor D)$$
$$(\neg A \lor \neg\neg B) \lor (\neg C \lor D)$$
$$\neg A \lor B \lor \neg C \lor D$$

b. $\neg\big(A \land (B \lor \neg C) \land \neg(A \land D)\big)$

$$\neg A \lor \neg(B \lor \neg C) \lor \neg\neg(A \land D)$$
$$\neg A \lor (\neg B \land \neg\neg C) \lor (A \land D)$$
$$\neg A \lor (\neg B \land C) \lor (A \land D)$$
$$((\neg A \lor \neg B) \land (\neg A \lor C)) \lor (A \land D)$$
$$\big(((\neg A \lor \neg B) \land (\neg A \lor C)) \lor A\big) \land \big(((\neg A \lor \neg B) \land (\neg A \lor C)) \lor D\big)$$
$$((\neg A \lor \neg B \lor A) \land (\neg A \lor C \lor A)) \land ((\neg A \lor \neg B \lor D) \land (\neg A \lor C \lor D))$$
$$((\top \lor \neg B) \land (\top \lor C)) \land ((\neg A \lor \neg B \lor D) \land (\neg A \lor C \lor D))$$
$$(\top \land \top) \land ((\neg A \lor \neg B \lor D) \land (\neg A \lor C \lor D))$$
$$\top \land ((\neg A \lor \neg B \lor D) \land (\neg A \lor C \lor D))$$
$$(\neg A \lor \neg B \lor D) \land (\neg A \lor C \lor D)$$

Konjunktive Normalform – Lösungen

Wandeln Sie folgende Formeln mittels des in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus in KNF um:

c. $(C \land \neg C) \lor (B \land D) \lor \neg A$

$(C \land \neg C) \lor \big((B \lor \neg A) \land (D \lor \neg A)\big)$

$\Big(\big(C \lor \big((B \lor \neg A) \land (D \lor \neg A)\big)\big) \land \big(\neg C \lor ((B \lor \neg A) \land (D \lor \neg A))\big)\Big)$

$(C \lor B \lor \neg A) \land (C \lor D \lor \neg A) \land (\neg C \lor D \lor \neg A) \land (\neg C \lor B \lor \neg A)$

d. $\neg(A \land \neg B) \lor \neg\big((D \lor \neg C) \land \neg(\neg B \to \neg A)\big)$

$(\neg A \lor \neg\neg B) \lor \neg\big((D \lor \neg C) \land \neg(\neg B \to \neg A)\big)$

$(\neg A \lor B) \lor \neg\big((D \lor \neg C) \land \neg(\neg\neg B \lor \neg A)\big)$

$(\neg A \lor B) \lor \neg\big((D \lor \neg C) \land (\neg\neg\neg B \land \neg\neg A)\big)$

$(\neg A \lor B) \lor \neg\big((D \lor \neg C) \land (\neg B \land A)\big)$

$(\neg A \lor B) \lor \big(\neg(D \lor \neg C) \lor \neg(\neg B \land A)\big)$

$(\neg A \lor B) \lor \big((\neg D \land \neg\neg C) \lor (\neg\neg B \lor \neg A)\big)$

$(\neg A \lor B) \lor (\neg D \land C) \lor (B \lor \neg A)$

$(\neg D \land C) \lor (\neg A \lor B \lor B \lor \neg A)$

$(\neg D \land C) \lor (\neg A \lor B)$

$(\neg D \lor \neg A \lor B) \land (C \lor \neg A \lor B)$

e. $(A \lor \neg B) \land (C \lor A) \land \neg D$

Bereits in KNF ☺

Resolventen

Finden Sie für jede Klauselmenge möglichst viele Resolventen.
Ist die Klauselmenge erfüllbar?

a. $S = \{\{A\}, \{\neg A, \neg C\}, \{\neg B\}, \{B, C\}\}$

b. $S = \{\{A, B, C\}, \{\neg A, B\}, \{\neg B, C\}, \{\neg C, A\}\}$

c. $S = \{\{D\}, \{\neg A, B\}, \{A, \neg B\}, \{\neg D\}\}$

Bildquelle: https://pixabay.com/de/illustrations/aquarell-hohe-aufl%c3%b6sung-texturen-5233379/

Resolventen – Lösung

Finden Sie für jede Klauselmenge möglichst viele Resolventen.
Ist die Klauselmenge erfüllbar?

a. $\mathrm{S} = \{\{A\}, \{\neg A, \neg C\}, \{\neg B\}, \{\mathrm{B}, \mathrm{C}\}\}$
Unerfüllbar, Resolventen: $\{\neg C\}, \{\neg A, B\}, \{C\}$

b. $\mathrm{S} = \{\{A, B, C\}, \{\neg A, B\}, \{\neg B, C\}, \{\neg C, A\}\}$
Erfüllbar, Resolventen:
$\{B, C\}, \{A, C\}, \{A, B\}, \{B, \neg C\}, \{\neg A, C\}, \{\neg B, A\}$

c. $\mathrm{S} = \{\{D\}, \{\neg A, B\}, \{A, \neg B\}, \{\neg D\}\}$
Unerfüllbar, Resolventen: $\square$, $\{B, \neg B\}, \{A, \neg A\}$

Rote Nasen

Folgende Fakten dürften jedem Kind bekannt sein:

1. Wer eine rote Nase hat, ist ein Rentier, Clown oder Säufer.
2. Clowns und Säufer haben zwei Beine.
3. Rentiere haben vier Beine.
4. Wer zwei Beine hat, hat nicht vier Beine (und umgekehrt).
5. Rudolph hat eine rote Nase und vier Beine.

Stellen Sie aussagelogische Formeln für alle Fakten auf und zeigen Sie mittels Resolution, dass Rudolph ein Rentier ist.

Bildquelle: https://pixabay.com/de/vectors/rentier-nase-schnee-geweih-5976378/
https://pixabay.com/de/vectors/karikatur-kinder-clown-comic-1751223/

Rote Nasen – Lösung

Folgende Fakten dürften jedem Kind bekannt sein:

1. Wer eine rote Nase hat, ist ein Rentier, Clown oder Säufer.
$$N \to R \vee C \vee S$$
2. Clowns und Säufer haben zwei Beine.
$$C \vee S \to Z$$
3. Rentiere haben vier Beine.
$$R \to V$$
4. Wer zwei Beine hat, hat nicht vier Beine (und umgekehrt).
$$Z \leftrightarrow \neg V$$
5. Rudolph hat eine rote Nase und vier Beine.
$$N \wedge V$$

Zu zeigende Implikation: Rudolph ist ein Rentier

$$(N \to R \vee C \vee S) \wedge (C \vee S \to Z) \wedge (R \to V) \wedge (Z \leftrightarrow \neg V) \wedge (N \wedge V) \to R$$

Bildquelle: https://pixabay.com/de/vectors/rentier-nase-schnee-geweih-5976378/
https://pixabay.com/de/vectors/karikatur-kinder-clown-comic-1751223/

Rote Nasen – Lösung

Teste die Implikation mittels Resolution (Unerfüllbarkeit, dass die Implikation nicht gilt):

$(N \rightarrow R \vee C \vee S) \wedge (C \vee S \rightarrow Z) \wedge (R \rightarrow V) \wedge (Z \leftrightarrow \neg V) \wedge (N \wedge V) \wedge \neg R$

Bilde KNF: Implikationen und Äquivalenzen auflösen:

$(\neg N \vee R \vee C \vee S) \wedge (\neg(C \vee S) \vee Z) \wedge (\neg R \vee V) \wedge ((Z \vee V) \wedge (\neg Z \vee \neg V))$
$\wedge (N \wedge V) \wedge \neg R$

Regeln von DeMorgan:

$(\neg N \vee R \vee C \vee S) \wedge ((\neg C \wedge \neg S) \vee Z) \wedge (\neg R \vee V)$
$\wedge ((Z \vee V) \wedge (\neg Z \vee \neg V)) \wedge (N \wedge V) \wedge \neg R$

Distributivgesetze:

$(\neg N \vee R \vee C \vee S) \wedge ((\neg C \vee Z) \wedge (\neg S \vee Z)) \wedge (\neg R \vee V)$
$\wedge ((Z \vee V) \wedge (\neg Z \vee \neg V)) \wedge (N \wedge V) \wedge \neg R$

Assoziativgesetze:

$(\neg N \vee R \vee C \vee S) \wedge (\neg C \vee Z) \wedge (\neg S \vee Z) \wedge (\neg R \vee V) \wedge (Z \vee V) \wedge (\neg Z$
$\vee \neg V) \wedge N \wedge V \wedge \neg R$

Bildquelle: https://pixabay.com/de/vectors/rentier-nase-schnee-geweih-5976378/
https://pixabay.com/de/vectors/karikatur-kinder-clown-comic-1751223/

Rote Nasen – Lösung

Klauselmenge aus Formel in KNF:
$\{\neg N, R, C, S\}, \{\neg C, Z\}, \{\neg S, Z\}, \{\neg R, V\}, \{Z, V\}, \{\neg Z, \neg V\}, \{N\}, \{V\}, \{\neg R\}$

Resolution:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \{V\} \arrow[dr] & & \{\neg Z, \neg V\} \arrow[dl] & & & \{N\} \arrow[dr] & & \{\neg N, R, C, S\} \arrow[dl] & \\
\{\neg C, Z\} \arrow[dr] & & \{\neg Z\} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \{\neg S, Z\} \arrow[dl] & & & \{R, C, S\} \arrow[dr] & & \{\neg R\} \arrow[dl] \\
 & \{\neg C\} \arrow[ddr] & & \{\neg S\} \arrow[drr] & & & & & \{C, S\} \arrow[dlll] & \\
 & & & & & \{C\} \arrow[dlll] & & & & \\
 & & \square & & & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Die Formel ist unerfüllbar.
→Die Implikation gilt.
→Rudolph ist ein Rentier.

Tableaus

Beweisen Sie mittels eines Tableaus, dass die Formel unerfüllbar ist:

$$(A \vee \neg B \vee C) \wedge (C \rightarrow D) \wedge \neg(A \wedge B) \wedge (\neg D \vee B) \wedge (\neg A \rightarrow C) \wedge (A \leftrightarrow D)$$

Bildquelle: https://pixabay.com/de/illustrations/gehirn-geist-graue-substanz-dachte-2146160/

Tableaus – Lösung

Beweisen Sie mittels eines Tableaus, dass die Formel unerfüllbar ist:
$(A \lor \neg B \lor C) \land (C \to D) \land \neg(A \land B) \land (\neg D \lor B) \land (\neg A \to C) \land (A \leftrightarrow D)$

Umwandlung in NNF: Implikationen und Äquivalenzen auflösen:
$(A \lor \neg B \lor C) \land (\neg C \lor D) \land \neg(A \land B) \land (\neg D \lor B) \land (\neg\neg A \lor C)$
$\land ((\neg A \lor D) \land (A \lor \neg D))$

Gesetze von DeMorgan:
$(A \lor \neg B \lor C) \land (\neg C \lor D) \land (\neg A \lor \neg B) \land (\neg D \lor B) \land (\neg\neg A \lor C)$
$\land ((\neg A \lor D) \land (A \lor \neg D))$

Doppelte Negationen entfernen:
$(A \lor \neg B \lor C) \land (\neg C \lor D) \land (\neg A \lor \neg B) \land (\neg D \lor B) \land (A \lor C)$
$\land ((\neg A \lor D) \land (A \lor \neg D))$

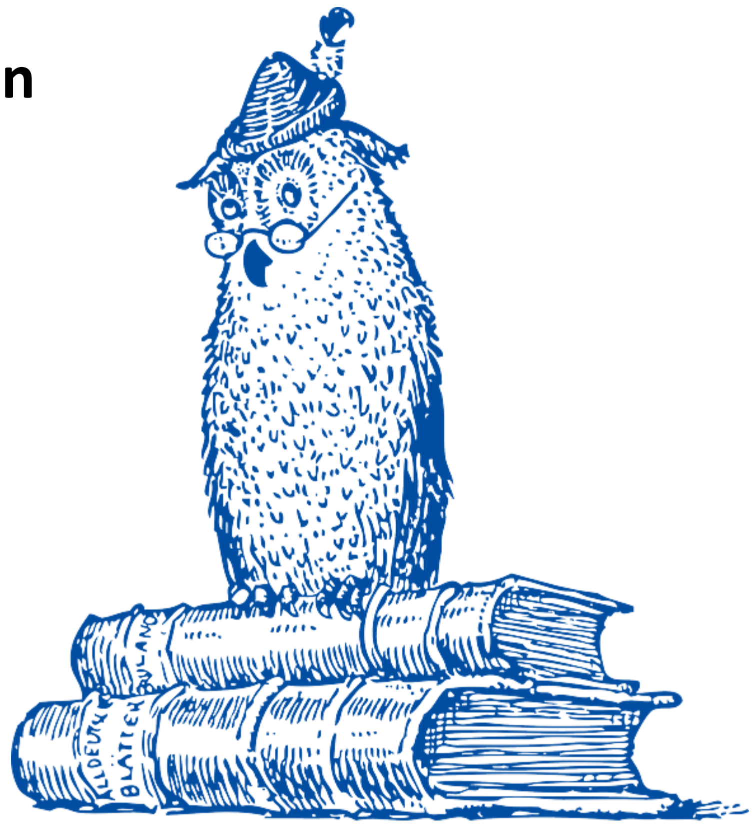
Bildquelle: https://pixabay.com/de/illustrations/gehirn-geist-graue-substanz-dachte-2146160/

<table>
<tr><td>1</td><td colspan="8">$(A \lor \neg B \lor C) \land (\neg C \lor D) \land (\neg A \lor \neg B) \land (\neg D \lor B) \land (A \lor C)$
$\land ((\neg A \lor D) \land (A \lor \neg D))$</td><td>Eingabe</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="8">$A \lor \neg B \lor C$</td><td>1: $\land$</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="8">$\neg C \lor D$</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="8">$\neg A \lor \neg B$</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="8">$\neg D \lor B$</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="8">$A \lor C$</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td colspan="8">$(\neg A \lor D) \land (A \lor \neg D)$</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td colspan="8">$\neg A \lor D$</td><td>7: $\land$</td></tr>
<tr><td>9</td><td colspan="8">$A \lor \neg D$</td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td colspan="4">A</td><td colspan="4">$\neg D$</td><td>9: $\lor$</td></tr>
<tr><td>11</td><td>$\neg A$↯</td><td colspan="3">D</td><td colspan="4"></td><td>8: $\lor$</td></tr>
<tr><td>12</td><td>↯</td><td>$\neg D$↯</td><td colspan="2">B</td><td colspan="4"></td><td>5: $\lor$</td></tr>
<tr><td>13</td><td>↯</td><td>↯</td><td>$\neg A$↯</td><td>$\neg B$↯</td><td colspan="4"></td><td>4: $\lor$</td></tr>
<tr><td>14</td><td>↯</td><td>↯</td><td>↯</td><td>↯</td><td colspan="3">$\neg C$</td><td>D↯</td><td>3: $\lor$</td></tr>
<tr><td>15</td><td>↯</td><td>↯</td><td>↯</td><td>↯</td><td>C↯</td><td colspan="2">A</td><td>↯</td><td>6: $\lor$</td></tr>
<tr><td>16</td><td>↯</td><td>↯</td><td>↯</td><td>↯</td><td>↯</td><td>$\neg A$↯</td><td>D↯</td><td>↯</td><td>8: $\lor$</td></tr>
</table>

Sprichwörter

Stellen Sie prädikatenlogische Formeln für die folgenden Sprichwörter auf:

a. Hunde, die bellen, beißen nicht.
b. Ohne Fleiß kein Preis.
c. Es ist noch kein Meister vom Himmel gefallen.
d. Wer andern eine Grube gräbt, fällt selbst hinein.
e. Zwei Tode kann niemand sterben.



Bildquelle:https://pixabay.com/de/vectors/eule-b%c3%bccher-wissen-weisheit-lernen-31691/

Sprichwörter – Lösung

Stellen Sie prädikatenlogische Formeln für die folgenden Sprichwörter auf:

a. Hunde, die bellen, beißen nicht.

$$\forall h(Hund(h) \land Bell(h) \rightarrow \neg Beiss(h))$$

b. Ohne Fleiß kein Preis.

$$\neg f \rightarrow \neg p$$

c. Es ist noch kein Meister vom Himmel gefallen.

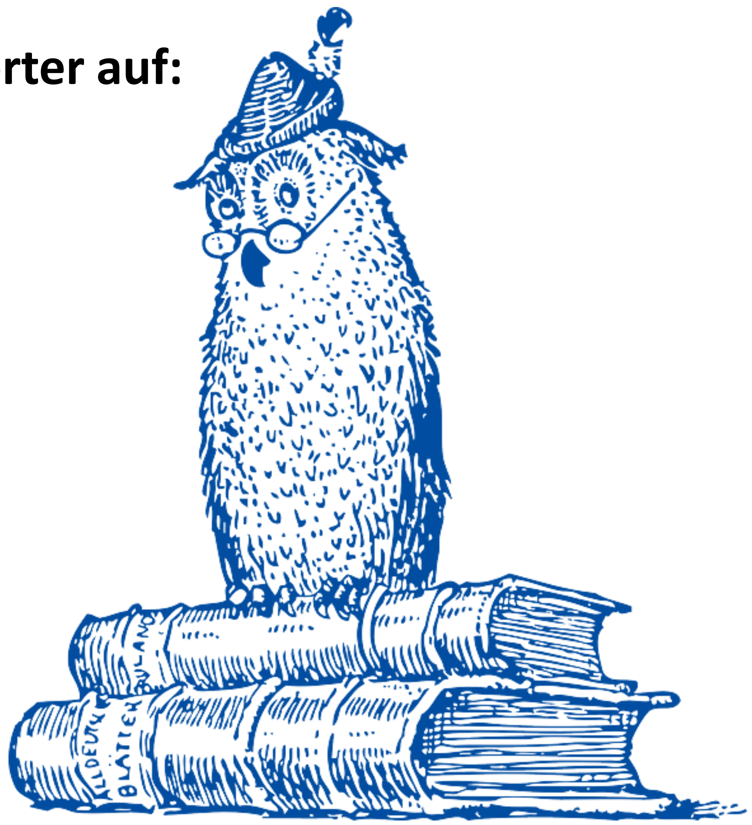
$$\neg \exists x(Meister(x) \land VomHimmel(x))$$

d. Wer andern eine Grube gräbt, fällt selbst hinein.

$$\forall x \forall g \begin{pmatrix} Grube(g) \land Graebt(x,g) \\ \land \exists y(x \neq y \land Fuer(y,g)) \rightarrow FaelltIn(x,g) \end{pmatrix}$$

e. Zwei Tode kann niemand sterben.

$$\neg \exists x(\exists y \exists z(Tod(y) \land Tod(z) \land y \neq z \land Stirbt(x,y) \land Stirbt(x,z)))$$



Prädikatenlogik – Terme und Atome (Mehrfachantworten möglich)

Variablen: $\{x, y, z\}$

Funktionen: $\{a^{(0)}, b^{(0)}, c^{(0)}, f^{(1)}, g^{(1)},\ {}^{2(1)}, +^{(2)}, \surd^{(2)}\}$

Prädikate: $\{Prim^{(1)}, =^{(2)}, >^{(2)}, f^{(1)}, g^{(1)}\}$

Term	Grundterm	Kein Grundterm	Atom
$\sqrt[3]{17}$			
$x > y$			
$f(x) + g(x)$			
π^{ε}			
$17\ mod\ 2 = 0$			
$Prim(x) \land Prim(x+1)$			
$\cos 2x = \cos x$			
$\exists x(Prim(x * 2))$			
$a^2 + b^2 = c^2$			
$f(g(a+b))$			

Prädikatenlogik – Terme und Atome – Lösung

Variablen: $\{x, y, z\}$

Funktionen: $\{a^{(0)}, b^{(0)}, c^{(0)}, f^{(1)}, g^{(1)}, \quad {}^{2(1)}, +^{(2)}, \vee^{(2)}\}$

Prädikate: $\{Prim^{(1)}, =^{(2)}, >^{(2)}, f^{(1)}, g^{(1)}\}$

Term	Grundterm	Kein Grundterm	Atom
$\sqrt[3]{17}$	X		
$x > y$		X	X
$f(x) + g(x)$		X	
π^{ε}	X		
$17\ mod\ 2 = 0$	X		X
$Prim(x) \land Prim(x+1)$			
$\cos 2x = \cos x$		X	X
$\exists x(Prim(x * 2))$			
$a^2 + b^2 = c^2$	X		X
$f(g(a+b))$	X		

Tierwelt

Übersetzen Sie die prädikatenlogischen Sätze in natürliche Sprache und geben Sie an, ob sie wahr sind :

a. $\forall x\big(Schal(x) \rightarrow Gestreift(Schwanz(x))\big)$

b. $\exists x\big(Banane(x) \land \neg Affe(x)\big)$

c. $\forall x\big(Vogel(x) \leftrightarrow \neg(Beine(x) = 4)\big)$

d. $\forall x(Gegenstände(x) = 0 \rightarrow \exists y(y \neq x \land Gegenstände(y) > Gegenstände(x)))$

e. $\forall x(Affe(x) \rightarrow (Banane(x) \leftrightarrow \neg Hut(x)))$

f. $\forall x(Vogel(x) \rightarrow Hut(x))$

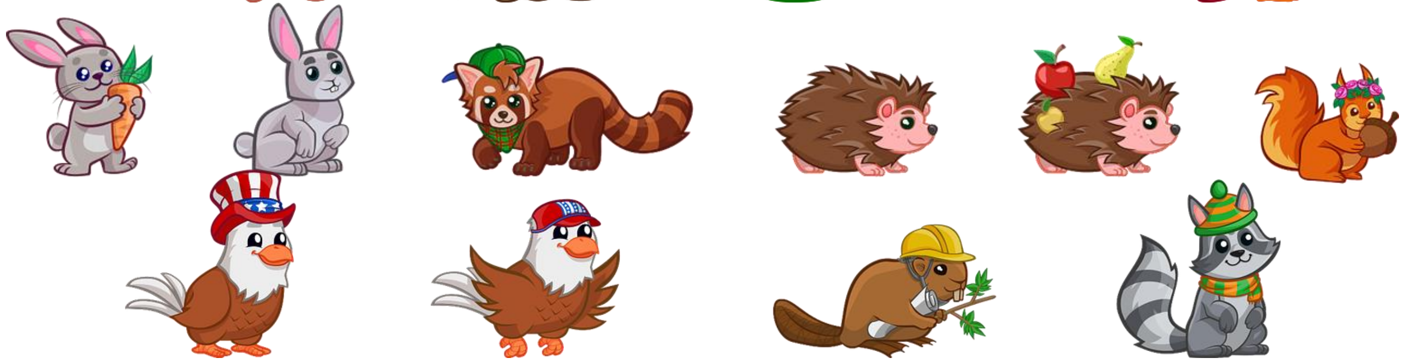
g. $\exists x \forall y\big(Gegenstände(x) > Gegenstände(y)\big)$

h. $\forall y \exists x\big(Gegenstände(y) = Gegenstände(x)\big)$

i. $\exists x \exists y(Frucht(x) = Frucht(y))$

j. $\forall x \forall y((y \neq x) \rightarrow (Spezies(x) = Spezies(y) \lor Gegenstände(x) \neq Gegenstände(y)))$

Tierwelt – Lösung



Übersetzen Sie die prädikatenlogischen Sätze in natürliche Sprache und geben Sie an, ob sie wahr sind :

a. $\forall x\big(Schal(x) \rightarrow Gestreift(Schwanz(x))\big)$

b. $\exists x\big(Banane(x) \land \neg Affe(x)\big)$

c. $\forall x\big(Vogel(x) \leftrightarrow \neg(Beine(x) = 4)\big)$

d. $\forall x(Gegenstände(x) = 0 \rightarrow \exists y(y \neq x \land Gegenstände(y) > Gegenstände(x)))$

e. $\forall x(Affe(x) \rightarrow (Banane(x) \leftrightarrow \neg Hut(x)))$

a. Wer einen Schal trägt, hat einen gestreiften Schwanz (wahr)

b. Es gibt ein Tier, das eine Banane hat und kein Affe ist (wahr)

c. Alle Tiere sind entweder Vögel oder haben vier Beine (falsch)

d. Für jedes Tier, das keine Gegenstände hat, gibt es ein Tier, das mehr Gegenstände hat (wahr)

e. Alle Affen haben entweder eine Banane oder einen Hut (falsch)

Tierwelt – Lösung

Übersetzen Sie die prädikatenlogischen Sätze in natürliche Sprache und geben Sie an, ob sie wahr sind :

f. $\forall x(Vogel(x) \rightarrow Hut(x))$

g. $\exists x \forall y\big(Gegenstände(x) > Gegenstände(y)\big)$

h. $\forall y \exists x\big(Gegenstände(y) = Gegenstände(x)\big)$

i. $\exists x \exists y(Frucht(x) = Frucht(y))$

j. $\forall x \forall y((y \neq x) \rightarrow (Spezies(x) = Spezies(y) \vee Gegenstände(x) \neq Gegenstände(y)))$

f. Alle Vögel tragen einen Hut (wahr)

g. Es gibt ein Tier, das die meisten Gegenstände hat (falsch)

h. Für alle Tiere gibt es ein anderes Tier, das gleichviele Gegenstände hat (wahr)

i. Es gibt zwei Tiere, die die gleiche Frucht haben (wahr)

j. Zwei verschiedene Tiere haben entweder die gleiche Spezies oder eine verschiedene Anzahl an Gegenständen (falsch)

Bildquelle: https://pixabay.com/de/users/graphicmama-team-2641041/

Skolemisierung

Wandeln Sie folgende Formeln mittels des in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus in Skolem-Form um:

a. $\exists y(\neg\forall x P(x,y))$

b. $\forall x \neg\exists y(P(x,y) \leftrightarrow \neg P(y,x))$

c. $\forall z \exists x(\neg(\exists y Q(x,y,z) \land \exists y Q(z,y,x)))$

Skolemisierung – Lösung

Wandeln Sie folgende Formeln mittels des in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus in Skolem-Form um:

a. $\exists y(\neg\forall x P(x,y))$

NNF:

$\exists y(\exists x \neg P(x,y))$

Skolemisierung:

$\exists x \neg P(x,c)$

$\neg P(d,c)$

Skolemisierung – Lösung

Wandeln Sie folgende Formeln mittels des in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus in Skolem-Form um:

b. $\forall x \neg \exists y (P(x,y) \leftrightarrow \neg P(y,x))$

NNF:

$\forall x \neg \exists y ((P(x,y) \vee P(y,x)) \wedge (\neg P(x,y) \vee \neg P(y,x)))$

$\forall x \forall y \neg ((P(x,y) \vee P(y,x)) \wedge (\neg P(x,y) \vee \neg P(y,x)))$

$\forall x \forall y\ (\neg (P(x,y) \vee P(y,x)) \vee \neg(\neg P(x,y) \vee \neg P(y,x)))$

$\forall x \forall y\ ((\neg P(x,y) \wedge \neg P(y,x)) \vee\ (\neg\neg P(x,y) \wedge \neg\neg P(y,x)))$

$\forall x \forall y\ ((\neg P(x,y) \wedge \neg P(y,x)) \vee\ (P(x,y) \wedge P(y,x)))$

Skolemisierung:

$\forall x \forall y\ ((\neg P(x,y) \wedge \neg P(y,x)) \vee\ (P(x,y) \wedge P(y,x)))$

(hat bereits keine Existenzquantoren)

Skolemisierung – Lösung

Wandeln Sie folgende Formeln mittels des in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus in Skolem-Form um:

c. $\forall z \exists x(\neg(\exists y Q(x,y,z) \wedge \exists y Q(z,y,x)))$

NNF:

$\forall z \exists x(\neg \exists y Q(x,y,z) \vee \neg \exists y Q(z,y,x))$

$\forall z \exists x(\forall y \neg Q(x,y,z) \vee \forall y \neg Q(z,y,x))$

Skolemisierung:

$\forall z(\forall y \neg Q(f(z),y,z) \vee \forall y \neg Q(z,y,f(z)))$

Bildquelle: https://openlogicproject.org/skolemline/ (CC-BY)

Skolemisierung mit Miniscoping

Wandeln Sie folgende Formeln mittels des in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus in Skolem-Form mit Miniscoping um:

a. $\neg\forall x\exists y(P(x,x) \rightarrow P(x,y))$

b. $\forall x(\exists y(P(x,y) \wedge Q(y)) \wedge \exists z(Q(z) \vee \neg P(x,z)))$

c. $\forall x\neg\exists y(\forall z(Q(x,y,z) \rightarrow \neg Q(z,y,x)) \wedge (\exists z P(z) \wedge (Q(x,z,x) \rightarrow Q(z,z,z))))$

Bildquelle: https://pixabay.com/de/vectors/teleskop-vergr%c3%b6%c3%9fern-linse-29232/

Skolemisierung mit Miniscoping – Lösung

Wandeln Sie folgende Formeln mittels des in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus in Skolem-Form mit Miniscoping um:

a. $\neg\forall x\exists y(P(x,x) \rightarrow P(x,y))$

NNF:

$\neg\forall x\exists y(\neg P(x,x) \vee P(x,y))$

$\exists x\neg\exists y(\neg P(x,x) \vee P(x,y))$

$\exists x\forall y\neg(\neg P(x,x) \vee P(x,y))$

$\exists x\forall y\,(\neg\neg P(x,x) \wedge \neg P(x,y))$

$\exists x\forall y(P(x,x) \wedge \neg P(x,y))$

Miniscoping:

$\exists x\,(P(x,x) \wedge \forall y\neg P(x,y))$

Skolemisierung

$P(c,c) \wedge \forall y\neg P(c,y)$

Skolemisierung mit Miniscoping – Lösung

Wandeln Sie folgende Formeln mittels des in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus in Skolem-Form mit Miniscoping um:

b. $\forall x(\exists y(P(x,y) \wedge Q(y)) \wedge \exists z(Q(z) \vee \neg P(x,z)))$

(Bereits in NNF)

Miniscoping:

$\forall x(\exists y(P(x,y) \wedge Q(y)) \wedge (\exists z Q(z) \vee \exists z \neg P(x,z)))$

$\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y)) \wedge \forall x(\exists z Q(z) \vee \exists z \neg P(x,z))$

$\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y)) \wedge \ (\exists z Q(z) \vee \forall x \exists z \neg P(x,z))$

Skolemform:

$\forall x(P(x,f(x)) \wedge Q(f(x))) \wedge \ (\exists z Q(z) \vee \forall x \exists z \neg P(x,z))$

$\forall x(P(x,f(x)) \wedge Q(f(x))) \wedge \ (Q(c) \vee \forall x \exists z \neg P(x,z))$

$\forall x(P(x,f(x)) \wedge Q(f(x))) \wedge \ (Q(c) \vee \forall x \neg P(x,g(x)))$

Skolemisierung mit Miniscoping – Lösung

Wandeln Sie folgende Formeln mittels des in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus in Skolem-Form mit Miniscoping um:

c. $\forall x \neg \exists y (\forall z (Q(x,y,z) \to \neg Q(z,y,x)) \land \exists z (P(z) \land (Q(x,z,x) \to Q(z,z,z))))$

NNF:

$\forall x \neg \exists y (\forall z (\neg Q(x,y,z) \lor \neg Q(z,y,x)) \land \exists z (P(z) \land (\neg Q(x,z,x) \lor Q(z,z,z))))$

$\forall x \forall y \neg (\forall z (\neg Q(x,y,z) \lor \neg Q(z,y,x)) \land \exists z (P(z) \land (\neg Q(x,z,x) \lor Q(z,z,z))))$

$\forall x \forall y\ (\neg \forall z (\neg Q(x,y,z) \lor \neg Q(z,y,x)) \lor \neg \exists z (P(z) \land (\neg Q(x,z,x) \lor Q(z,z,z))))$

$\forall x \forall y\ (\exists z \neg (\neg Q(x,y,z) \lor \neg Q(z,y,x)) \lor \forall z \neg (P(z) \land (\neg Q(x,z,x) \lor Q(z,z,z))))$

$\forall x \forall y\ (\exists z\ (\neg\neg Q(x,y,z) \land \neg\neg Q(z,y,x)) \lor \forall z (\neg P(z) \lor \neg(\neg Q(x,z,x) \lor Q(z,z,z))))$

$\forall x \forall y\ (\exists z\ (\neg\neg Q(x,y,z) \land \neg\neg Q(z,y,x)) \lor \forall z (\neg P(z) \lor\ (\neg\neg Q(x,z,x) \land \neg Q(z,z,z))))$

$\forall x \forall y\ (\exists z\ (Q(x,y,z) \land Q(z,y,x)) \lor \forall z (\neg P(z) \lor\ (Q(x,z,x) \land \neg Q(z,z,z))))$

Skolemisierung mit Miniscoping – Lösung

Wandeln Sie folgende Formeln mittels des in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus in Skolem-Form mit Miniscoping um:

c. $\forall x \neg \exists y (\forall z (Q(x,y,z) \rightarrow \neg Q(z,y,x)) \wedge \exists z (P(z) \wedge (Q(x,z,x) \rightarrow Q(z,z,z))))$

NNF:

$\forall x \forall y\ (\exists z\ (Q(x,y,z) \wedge Q(z,y,x)) \vee \forall z (\neg P(z) \vee\ (Q(x,z,x) \wedge \neg Q(z,z,z))))$

(bereits im Miniscope)

Skolemisierung:

$\forall x \forall y\ ((Q(x,y,f(x,y)) \wedge Q(f(x,y),y,x)) \vee \forall z (\neg P(z) \vee\ (Q(x,z,x) \wedge \neg Q(z,z,z))))$

Bildquelle: https://pixabay.com/de/vectors/teleskop-vergr%c3%b6%c3%9fern-linse-29232/

Unifikatoren

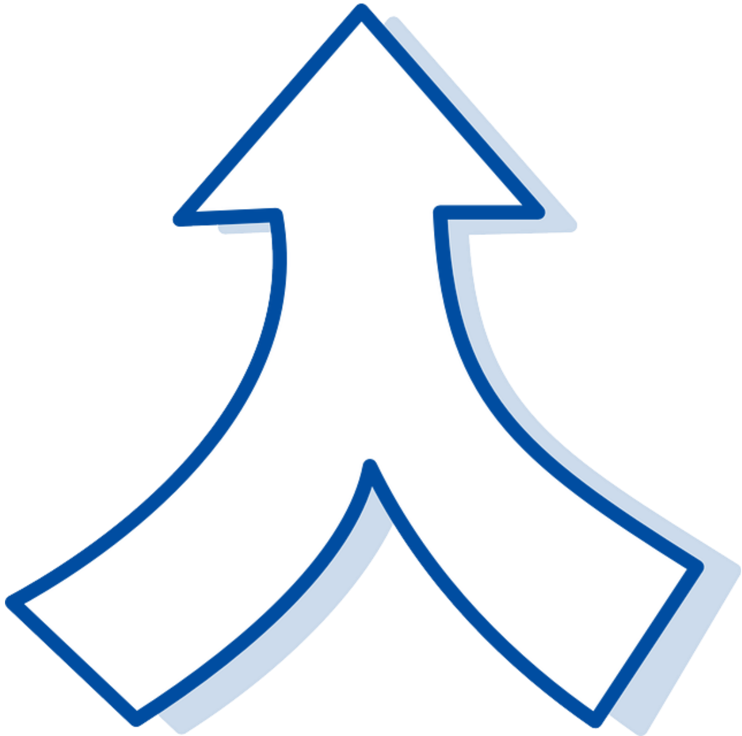
Versuchen Sie, Unifikatoren für folgende Paare von Atomen zu finden, falls möglich:

a. $P(f(x))$ und $P(f(g(y)))$

b. $P(f(g(x)))$ und $P(g(y))$

c. $Q(x, f(y))$ und $Q(g(y), x)$

d. $R(x, y, f(y))$ und $R(x, f(z), z)$



Bildquelle: https://pixabay.com/de/vectors/mischen-commix-vereinheitlichen-154513/

Unifikatoren – Lösungen

Versuchen Sie, Unifikatoren für folgende Paare von Atomen zu finden, falls möglich:

a. $P(f(x))$ und $P(f(g(y)))$
$[x/g(y)]$

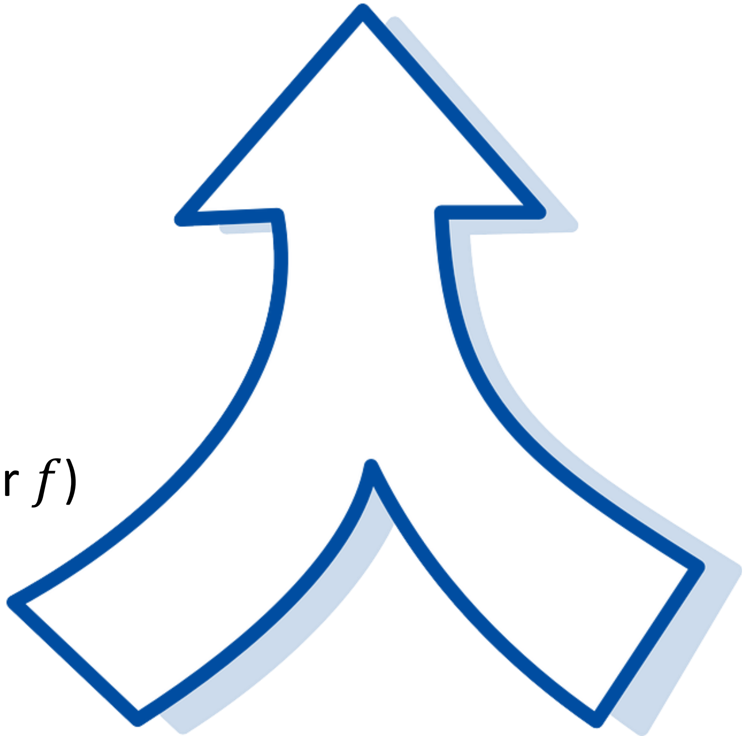
b. $P(f(g(x)))$ und $P\big(g(y)\big)$
Unifikation nicht möglich

c. $Q(x, f(y))$ und $Q(g(y), x)$
Variablenumbenennung: $Q(x, f(y))$ und $Q(g(v), w)$
$[x/g(v), w/f(y)]$

d. $R(x, y, f(y))$ und $R(x, f(z), z)$
Unifikation nicht möglich (nicht unifizierbar aufgrund Anzahl der f)

z.B. mit Algorithmus: $[y/f(z)]$
$R(x, f(z), f(f(z)))$ und $R(x, f(z), z)$

$[z/f(f(z))$ (scheitert an Occurs-Check)



Bildquelle: https://pixabay.com/de/vectors/mischen-commix-vereinheitlichen-154513/

Romeo und Julia

In Verona gelten seit jeher folgende Regeln:

1. Familie Montague ist mit den Capulets verfeindet.
2. Familie Capulet ist mit den Montagues verfeindet.
3. Seine Feinde liebt man nicht.

Nun trägt sich allerdings folgendes zu:

a. Romeo gehört zur Familie Montague.
b. Julia gehört zur Familie Capulet.
c. Romeo und Julia lieben sich.

Stellen Sie prädikatenlogische Formeln für Regeln und Fakten auf auf. Zeigen Sie mittels prädikatenlogischer Resolution, dass Regeln und Fakten nicht widerspruchsfrei sind.

Bildquelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Romeo_and_Juliet_(Lamb)#/media/File:Tales_from_Shakespeare-EP-0296.jpg

Romeo und Julia – Lösung

Regeln:

1. Familie Montague ist mit den Capulets verfeindet.
$$\forall x \forall y (M(x) \land C(y) \rightarrow Feind(x, y))$$
2. Familie Capulet ist mit den Montagues verfeindet.
$$\forall x \forall y (C(x) \land M(y) \rightarrow Feind(x, y))$$
3. Seine Feinde liebt man nicht.
$$\forall x \forall y (Feind(x, y) \rightarrow \neg Liebt(x, y))$$

Fakten:

a. Romeo gehört zur Familie Montague.
$$M(r)$$
b. Julia gehört zur Familie Capulet.
$$C(j)$$
c. Romeo und Julia lieben sich.
$$Liebt(r, j) \land Liebt(j, r)$$

Bildquelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Romeo_and_Juliet_(Lamb)#/media/File:Tales_from_Shakespeare-EP-0296.jpg

Romeo und Julia – Lösung

Widersruchfreiheit: Aus $1 \land 2 \land 3 \land a \land b \land c$ kann kein Widerspruch abgeleitet werden. Also, Anwendung des Resolutionsverfahrens, um die leere Klausel abzuleiten.

NNF:

1. $\forall x \forall y(\neg M(x) \lor \neg C(y) \lor Feind(x,y)) \land$
2. $\forall x \forall y(\neg C(x) \lor \neg M(y) \lor Feind(x,y)) \land$
3. $\forall x \forall y(\neg Feind(x,y) \lor \neg Liebt(x,y)) \land$

a. $M(r) \land$

b. $C(j) \land$

c. $Liebt(r,j) \land Liebt(j,r)$

Bereits in **Skolemform** (keine Existenzquantoren). ☺

Romeo und Julia – Lösung

Allquantoren entfernen, Variablen umbenennen:

1. $(\neg M(x) \vee \neg C(y) \vee Feind(x,y)) \wedge$
2. $(\neg C(u) \vee \neg M(v) \vee Feind(u,v)) \wedge$
3. $(\neg Feind(w,z) \vee \neg Liebt(w,z)) \wedge$

a. $M(r) \wedge$

b. $C(j) \wedge$

c. $Liebt(r,j) \wedge Liebt(j,r)$

Bereits in **KNF** ☺. ☺

Romeo und Julia – Lösung

Klauselmenge:

$$\{$$

$$\{\neg M(x), \neg C(y), Feind(x,y)\},$$
$$\{\neg C(u), \neg M(v), Feind(u,v)\},$$
$$\{\neg Feind(w,z), \neg Liebt(w,z)\},$$
$$\{M(r)\},$$
$$\{C(j)\},$$
$$\{Liebt(r,j)\},$$
$$\{Liebt(j,r)\}$$

$$\}$$

Bildquelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Romeo_and_Juliet_(Lamb)#/media/File:Tales_from_Shakespeare-EP-0296.jpg

Romeo und Julia – Lösung

Ableitung der leeren Klausel:

$\{M(r)\}$ $\{\neg M(x), \neg C(y), Feind(x,y)\}$

$[x/r]$

$\{C(j)\}$ $\{\neg C(y), Feind(r,y)\}$

$[y/j]$

$\{\neg Feind(w,z), \neg Liebt(w,z)\}$ $\{Feind(r,j)\}$

$[w/r, z/j]$

$\{Liebt(r,j)\}$ $\{\neg Liebt(r,j)\}$

$\square$

Regeln und Fakten sind nicht widerspruchsfrei. Romeos und Julias Liebe verstößt gegen die gesellschaftlichen Regeln. (Die Resolution funktioniert auch analog über Julias Liebe zu Romeo.)

Bildquelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Romeo_and_Juliet_(Lamb)#/media/File:Tales_from_Shakespeare-EP-0296.jpg

Piratenschatz

Sie sind auf der Suche nach einem alten Piratenschatz. Folgendes steht fest:

1. Der Schatz ist auf einer der vier Inseln Grenada, Barbados, St. Lucia, oder Martinique vergraben.
2. Martinique ist nördlich von St. Lucia.
3. St. Lucia ist nördlich von Barbados.
4. Barbados ist nördlich von Grenada.
5. Wenn A nördlich von B und B nördlich von C, dann ist A auch nördlich von C.
6. Wenn A nördlich von B ist, dann ist B südlich von A.
7. Keine Insel ist nördlich oder südlich von sich selbst.
8. Inseln sind entweder steinig oder sandig.
9. Inseln südlich von St. Lucia sind steinig.
10. Inseln nördlich von Barbados sind sandig.
11. In steinigen Böden kann man keinen Schatz vergraben.
12. Die Schatzinsel ist südlich von Martinique.

Finden Sie den Piratenschatz. Stellen Sie prädikatenlogische Formeln für alle Fakten auf. Stellen sie eine Hypothese auf, welches die Schatzinsel ist und beweisen Sie ihre Hypothese mit prädikatenlogischer Resolution.

Bildquelle: https://pixabay.com/de/vectors/schatzkarte-schatzsuche-153425/

Piratenschatz – Lösung

Sie sind auf der Suche nach einem alten Piratenschatz. Folgendes steht fest:

1. Der Schatz ist auf einer der vier Inseln Grenada, Barbados, St. Lucia, oder Martinique vergraben.
$$Sch(g) \lor Sch(b) \lor Sch(l) \lor Sch(m)$$
2. Martinique ist nördlich von St. Lucia.
$$N(m, l)$$
3. St. Lucia ist nördlich von Barbados.
$$N(l, b)$$
4. Barbados ist nördlich von Grenada.
$$N(b, g)$$
5. Wenn A nördlich von B und B nördlich von C, dann ist A auch nördlich von C.
$$\forall x \forall y \forall z (N(x, y) \land N(y, z) \rightarrow N(x, z))$$
6. Wenn A nördlich von B ist, dann ist B südlich von A.
$$\forall x \forall y (N(x, y) \rightarrow S(y, x))$$

Bildquelle: https://pixabay.com/de/vectors/schatzkarte-schatzsuche-153425/

Piratenschatz – Lösung

Sie sind auf der Suche nach einem alten Piratenschatz. Folgendes steht fest:

7. Keine Insel ist nördlich oder südlich von sich selbst.
$$\forall x(\neg N(x,x) \wedge \neg S(x,x))$$
8. Inseln sind entweder steinig oder sandig.
$$\forall x(Sa(x) \leftrightarrow \neg St(x))$$
9. Inseln südlich von St. Lucia sind steinig.
$$\forall x(S(x,l) \rightarrow St(x))$$
10. Inseln nördlich von Barbados sind sandig.
$$\forall x(N(x,b) \rightarrow Sa(x))$$
11. In steinigen Böden kann man keinen Schatz vergraben.
$$\forall x(St(x) \rightarrow \neg Sch(x))$$
12. Die Schatzinsel ist südlich von Martinique.
$$\forall x(Sch(x) \rightarrow S(x,m))$$

Hypothese: Der Schatz ist auf St. Lucia.
$$Sch(l)$$

Bildquelle: https://pixabay.com/de/vectors/schatzkarte-schatzsuche-153425/

Piratenschatz – Lösung

Formel für die Resolution:

$$Sch(g) \vee Sch(b) \vee Sch(l) \vee Sch(m) \wedge N(m,l) \wedge N(l,b) \wedge N(b,g) \wedge \forall x \forall y \forall z (N(x,y) \wedge N(y,z) \rightarrow N(x,z)) \wedge \forall x \forall y (N(x,y) \rightarrow S(y,x)) \wedge \forall x (\neg N(x,x) \wedge \neg S(x,x)) \wedge \forall x (Sa(x) \leftrightarrow \neg St(x)) \wedge \forall x (S(x,l) \rightarrow St(x)) \wedge \forall x (N(x,b) \rightarrow Sa(x)) \wedge \forall x (St(x) \rightarrow \neg Sch(x)) \wedge \forall x (Sch(x) \rightarrow S(x,m)) \wedge \neg Sch(l)$$

Piratenschatz – Lösung

NNF:

$$Sch(g) \vee Sch(b) \vee Sch(l) \vee Sch(m) \wedge N(m,l) \wedge N(l,b) \wedge N(b,g) \wedge \forall x \forall y \forall z(\neg N(x,y) \vee \neg N(y,z) \vee N(x,z)) \wedge \forall x \forall y(\neg N(x,y) \vee S(y,x)) \wedge \forall x(\neg N(x,x) \wedge \neg S(x,x)) \wedge \forall x((Sa(x) \vee St(x)) \wedge (\neg Sa(x) \vee \neg St(x))) \wedge \forall x(\neg S(x,l) \vee St(x)) \wedge \forall x(\neg N(x,b) \vee Sa(x)) \wedge \forall x(\neg St(x) \vee \neg Sch(x)) \wedge \forall x(\neg Sch(x) \vee S(x,m)) \wedge \neg Sch(l)$$

Bildquelle: https://pixabay.com/de/vectors/schatzkarte-schatzsuche-153425/

Piratenschatz – Lösung

Miniscoping: (bereits skolemisiert)

$$Sch(g) \lor Sch(b) \lor Sch(l) \lor Sch(m) \land N(m,l) \land N(l,b) \land N(b,g) \land \forall x \forall y \forall z(\neg N(x,y) \lor \neg N(y,z) \lor N(x,z)) \land \forall x \forall y(\neg N(x,y) \lor S(y,x)) \land \forall x \neg N(x,x) \land \forall x \neg S(x,x) \land \forall x((Sa(x) \lor St(x)) \land (\neg Sa(x) \lor \neg St(x))) \land \forall x(\neg S(x,l) \lor St(x)) \land \forall x(\neg N(x,b) \lor Sa(x)) \land \forall x(\neg St(x) \lor \neg Sch(x)) \land \forall x(\neg Sch(x) \lor S(x,m)) \land \neg Sch(l)$$

Piratenschatz – Lösung

Variablen umbenennen und Allquantoren weglassen:
$Sch(g) \lor Sch(b) \lor Sch(l) \lor Sch(m) \land N(m,l) \land N(l,b) \land N(b,g) \land \neg N(x,y) \lor \neg N(y,z)$
$\lor N(x,z) \land \neg N(v,w) \lor S(w,v) \land \neg N(c,c) \land \neg S(d,d) \land Sa(u) \lor St(u) \land \neg Sa(h)$
$\lor \neg St(h) \land \neg S(i,l) \lor St(i) \land \neg N(j,b) \lor Sa(j) \land \neg St(k) \lor \neg Sch(k) \land \neg Sch(q) \lor S(q,m)$
$\land \neg Sch(l)$

Piratenschatz – Lösung

Klauselmenge (bereits in KNF):

$$
\begin{aligned}
&\{\{Sch(g), Sch(b), Sch(l), Sch(m)\},\\
&\{N(m,l)\},\\
&\{N(l,b)\},\\
&\{N(b,g)\},\\
&\{\neg N(x,y), \neg N(y,z), N(x,z)\},\\
&\{\neg N(v,w), S(w,v)\},\\
&\{\neg N(c,c)\},\\
&\{\neg S(d,d)\},\\
&\{Sa(u), St(u)\},\\
&\{\neg Sa(h), \neg St(h)\},\\
&\{\neg S(i,l), St(i)\},\\
&\{\neg N(j,b), Sa(j)\},\\
&\{\neg St(k), \neg Sch(k)\},\\
&\{\neg Sch(q), S(q,m)\},\\
&\{\neg Sch(l)\}\}
\end{aligned}
$$

Bildquelle: https://pixabay.com/de/vectors/schatzkarte-schatzsuche-153425/

Piratenschatz – Lösung

Grundidee: Alle vier Inseln ausschließen, um aus
$\{Sch(g), Sch(b), Sch(l), Sch(m)\}$ die leere Klausel abzuleiten.

$$\{\neg Sch(q), S(q,m)\} \qquad \{\neg S(d,d)\}$$

$$[q/m, d/m]$$

$$\{\neg Sch(m)\}$$

Martinique ist nicht südlich von sich selbst, aber der Schatz muss südlich von Martinique sein. Ergo ist der Schatz nicht auf Martinique vergraben.

Piratenschatz – Lösung

$$
\begin{tikzcd}
\{N(l,b)\} \arrow[dr] & & \{\neg N(v,w), S(w,v)\} \arrow[dl, "{[v/l, w/b]}"] & & \\
& \{S(b,l)\} \arrow[dr] & & \{\neg S(i,l), St(i)\} \arrow[dl, "{[i/b]}"] & \\
& & \{St(b)\} \arrow[dr] & & \{\neg St(k), \neg Sch(k)\} \arrow[dl, "{[k/b]}"] \\
& & & \{\neg Sch(b)\} &
\end{tikzcd}
$$

Barbados ist südlich von St. Lucia, also ist Barbados steinig. Wenn Barbados steinig ist, kann der Schatz dort nicht vergraben sein.

Piratenschatz – Lösung

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \{N(l,b)\} \arrow[dr] & & \{\neg N(x,y), \neg N(y,z), N(x,z)\} \arrow[dl, "{[x/l, y/b]}"] & & \\
\{N(b,g)\} \arrow[dr] & & \{, \neg N(b,z), N(l,z)\} \arrow[dl, "{[z/g]}"] & & & \\
 & \{N(l,g)\} \arrow[dr] & & \{\neg N(v,w), S(w,v)\} \arrow[dl, "{[v/l, w/g]}"] & & \\
 & & \{S(g,l)\} \arrow[dr] & & \{\neg S(i,l), St(i)\} \arrow[dl, "{[i/g]}"] & \\
 & & & \{St(g)\} \arrow[dr] & & \{\neg St(k), \neg Sch(k)\} \arrow[dl, "{[k/g]}"] \\
 & & & & \{\neg Sch(g)\} &
\end{tikzcd}
$$

Grenada ist südlich von St. Lucia (was wir über Barbados zeigen müssen), also ist Grenada steinig. Wenn Grenada steinig ist, kann der Schatz dort nicht vergraben sein.

Piratenschatz – Lösung

$\{Sch(g), Sch(b), Sch(l), Sch(m)\}$ $\quad$ $\{\neg Sch(m)\}$

$\{Sch(g), Sch(b), Sch(l)\}$ $\quad$ $\{\neg Sch(b)\}$

$\{Sch(g), Sch(l)\}$ $\quad$ $\{\neg Sch(g)\}$

$\{Sch(l)\}$ $\quad$ $\{\neg Sch(l)\}$

$\square$

Mittels der Klauseln, die wir auf den vorigen Folien abgeleitet haben und der negierten Konklusion $\neg Sch(l)$ können wir nun die leere Klausel ableiten. Die Formel ist unerfüllbar, die Konklusion gilt also:
Der Schatz ist auf St. Lucia vergraben.

Maus und Elefant

Folgende Fakten sind bekannt:

1. Mäuse wohnen in Mäuselöchern.
2. Wer in einem Mausloch wohnt, ist klein.
3. Wer klein ist, ist nicht groß.
4. Elefanten sind groß.

Stellen Sie prädikatenlogische Formeln für alle Fakten auf und zeigen Sie mittels eines Tableaus, dass eine Maus kein Elefant ist.

Bildquelle: https://pixabay.com/de/photos/maus-elefant-blau-stofftiere-3013444/

Maus und Elefant – Lösung

Folgende Fakten sind bekannt:

1. Mäuse wohnen in Mäuselöchern.
$$\forall x(Maus(x) \rightarrow Loch(x))$$
2. Wer in einem Mausloch wohnt, ist klein.
$$\forall x(Loch(x) \rightarrow Klein(x))$$
3. Wer klein ist, ist nicht groß.
$$\forall x(Klein(x) \rightarrow \neg Groß(x))$$
4. Elefanten sind groß.
$$\forall x(Elefant(x) \rightarrow Groß(x))$$

Eine Maus ist kein Elefant:
$$\forall x(Maus(x) \rightarrow \neg Elefant(x))$$

Bildquelle: https://pixabay.com/de/photos/maus-elefant-blau-stofftiere-3013444/

Maus und Elefant – Lösung

$$\forall x(Maus(x) \rightarrow Loch(x)) \wedge \forall x(Loch(x) \rightarrow Klein(x)) \wedge \forall x(Klein(x) \rightarrow \neg Groß(x)) \wedge \forall x(Elefant(x) \rightarrow Groß(x)) \wedge \neg\forall x(Maus(x) \rightarrow \neg Elefant(x))$$

NNF

$$\forall x(\neg Maus(x) \vee Loch(x)) \wedge \forall x(\neg Loch(x) \vee Klein(x)) \wedge \forall x(\neg Klein(x) \vee \neg Groß(x)) \wedge \forall x(\neg Elefant(x) \vee Groß(x)) \wedge \neg\forall x(\neg Maus(x) \vee \neg Elefant(x))$$

$$\forall x(\neg Maus(x) \vee Loch(x)) \wedge \forall x(\neg Loch(x) \vee Klein(x)) \wedge \forall x(\neg Klein(x) \vee \neg Groß(x)) \wedge \forall x(\neg Elefant(x) \vee Groß(x)) \wedge \exists x\neg(\neg Maus(x) \vee \neg Elefant(x))$$

$$\forall x(\neg Maus(x) \vee Loch(x)) \wedge \forall x(\neg Loch(x) \vee Klein(x)) \wedge \forall x(\neg Klein(x) \vee \neg Groß(x)) \wedge \forall x(\neg Elefant(x) \vee Groß(x)) \wedge \exists x(\neg\neg Maus(x) \wedge \neg\neg Elefant(x))$$

$$\forall x(\neg Maus(x) \vee Loch(x)) \wedge \forall x(\neg Loch(x) \vee Klein(x)) \wedge \forall x(\neg Klein(x) \vee \neg Groß(x)) \wedge \forall x(\neg Elefant(x) \vee Groß(x)) \wedge \exists x(Maus(x) \wedge Elefant(x))$$

Bildquelle: https://pixabay.com/de/photos/maus-elefant-blau-stofftiere-3013444/

Maus und Elefant – Lösung

1	$\forall x(\neg Maus(x) \lor Loch(x)) \land \forall x(\neg Loch(x) \lor Klein(x)) \land \forall x(\neg Klein(x) \lor \neg Groß(x)) \land \forall x(\neg Elefant(x) \lor Groß(x)) \land \exists x(Maus(x) \land Elefant(x))$	**Eingabe**
2	$\forall x(\neg Maus(x) \lor Loch(x))$	**1:** $\land$
3	$\forall x(\neg Loch(x) \lor Klein(x))$	
4	$\forall x(\neg Klein(x) \lor \neg Groß(x))$	
5	$\forall x(\neg Elefant(x) \lor Groß(x))$	
6	$\exists x(Maus(x) \land Elefant(x))$	
7	$Maus(k) \land Elefant(k)$	**6:**$\exists(x/k)$
8	$Maus(k)$	**7:** $\land$
9	$Elefant(k)$	

Maus und Elefant – Lösung

<table>
<tr><td>10</td><td colspan="7">$\neg Elefant(k) \vee Groß(k)$</td><td>5:$\forall(x/k)$</td></tr>
<tr><td>11</td><td>$\neg Elefant(k)$ ↯9</td><td colspan="6">$Groß(k)$</td><td>10: $\vee$</td></tr>
<tr><td>12</td><td>↯</td><td colspan="6">$\neg Maus(k) \vee Loch(k)$</td><td>2:$\forall(x/k)$</td></tr>
<tr><td>13</td><td>↯</td><td colspan="2">$\neg Maus(k)$ ↯8</td><td colspan="4">$Loch(k)$</td><td>12: $\vee$</td></tr>
<tr><td>14</td><td>↯</td><td colspan="2">↯</td><td colspan="4">$\neg Loch(k) \vee Klein(k)$</td><td>3:$\forall(x/k)$</td></tr>
<tr><td>15</td><td>↯</td><td>↯</td><td colspan="3">$\neg Loch(k)$ ↯12</td><td colspan="2">$Klein(k)$</td><td>14: $\vee$</td></tr>
<tr><td>16</td><td>↯</td><td>↯</td><td colspan="3">↯</td><td colspan="2">$\neg Klein(k) \vee \neg Groß(k)$</td><td>4:$\forall(x/k)$</td></tr>
<tr><td>17</td><td>↯</td><td>↯</td><td colspan="2">↯</td><td colspan="2">$\neg Klein(k)$ ↯15</td><td>$\neg Groß(k)$ ↯11</td><td>16: $\vee$</td></tr>
</table>

Jedes Spalte des Tableaus enthält einen Clash, also ist die Formel in Zeile 1 unerfüllbar. Die Konklusion $\forall x(Maus(x) \rightarrow \neg Elefant(x))$ gilt also unter den Prämissen (unsere vier Fakten).

Ergo: **Eine Maus ist kein Elefant.**

$[t/d]$

Bildquelle: https://pixabay.com/de/photos/enten-spielzeuge-ente-baby-kind-452485/