Logik

Jan Hladik

DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Stuttgart

Inhalt

Inhalt

Dozent: Jan Hladik

1993–2001 Diplom Informatik, RWTH Aachen
- Diplomarbeit: Tableau-Algorithmus
- Nebenfach: Philosophie

2001–2007 Promotion, TU Dresden
- Dissertation: Tableaus vs. Automaten
- Leitung von Übungsgruppen

2008–2014 Industrieerfahrung, SAP Research Dresden
- Öffentlich geförderte Forschungsprojekte
- Betreuung von Studenten und Doktoranden

seit 2014 Professor, DHBW Stuttgart
- Logik
- Formale Sprachen und Automaten
- Semantic Web

Forschung Semantische Technologien
- Beschreibungslogik
- logische Schlussfolgerungsverfahren
- Semantic Web

Vorlesungsmaterial

- Präsentation, Übungsaufgaben
  - http://wwwlehre.dhbw-stuttgart.de/~hladik/Logik/
- Klausur
  - Dauer: 90 min
  - Hilfsmittel: Formelsammlung 10 Seiten DIN A4
- Literatur
  - Logik
    - Dirk W. Hoffmann: Theoretische Informatik
    - Kurt-Ulrich Witt: Mathematische Grundlagen für die Informatik
    - Karl Stroetmann: Theoretische Informatik I - Logik und Mengenlehre
      http://wwwlehre.dhbw-stuttgart.de/~stroetma/Logic/
  - Motivation
    - Apostolos Doxiadis, Christos Papadimitriou: Logicomix – Eine epische Suche nach der Wahrheit
    - Douglas R. Hofstadter: Gödel Escher Bach
  - Prolog
    - Patrick Blackburn et al.: Learn Prolog Now!
      HTML-Version: http://learnprolognow.org/
      mit Prolog-Interpreter: http://lpn.swi-prolog.org/
- Prolog-Interpreter
  - http://swi-prolog.org/

Struktur der Vorlesung

Inhalt

> *Logic is the beginning of wisdom, not the end.*
>
> Mr. Spock, 2293 (Stardate 9522.6)

> *Programming is a creative art form based in logic.*
>
> John Romero, 1993

- kein Selbstzweck im Informatik-Studium
- Grundlage für Programmierung, formale Sprachen, Mathematik, . . .
- notwendig für ein fundiertes Verständnis der Informatik

Informatik mit und ohne theoretische Grundlagen

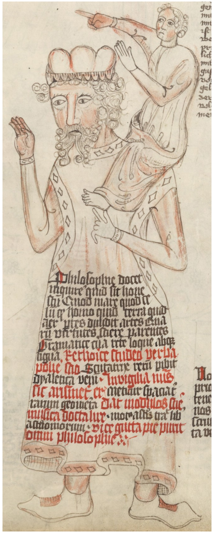
Ohne Theorie

- Trial and Error
- „Neuerfindung des Rades“ (und Wiederholung alter Fehler)
- Verwendung „bekannter und bewährter“ Techniken
- „Bauchgefühl“ für Lösungsansatz

Mit Theorie

- Abschätzung des Verhaltens eines Algorithmus im Voraus
- Verständnis der Gründe, warum etwas funktioniert oder nicht
- Bewusstsein der Grenzen von Computern und Algorithmen

> *Wir sind gleichsam Zwerge, die auf den Schultern von Riesen sitzen, um mehr und Entfernteres als diese sehen zu können – freilich nicht dank eigener scharfer Sehkraft oder Körpergröße, sondern weil die Größe der Riesen uns emporhebt.*
>
> Bernhard von Chartres, ca. 1120



Logik in der Informatik

- Technische Grundlagen
  - Boole'sche Schaltkreise (Digitaltechnik)
- Anwendung innerhalb der Informatik
  - Progammierung
    - Syntax und Semantik von Programmiersprachen
  - Datenbanken
    - Relationale Algebra
  - Spezifikation (Software-Engineering)
  - Programmverifikation
    - „Erfüllt mein Programm die Spezifikation?"
    - „Ermöglicht mein Kommunikationsprotokoll Deadlocks?"
  - Berechenbarkeit (Formale Sprachen und Automaten)
    - Verständnis der Fähigkeiten und Grenzen von Computern
    - „Schreiben Sie einen Test, ob zwei Programme sich gleich verhalten."
- Werkzeug für Anwendungen der Informatik außerhalb der Informatik
  - Wissensrepräsentation (Künstliche Intelligenz)
  - Automatisches Beweisen

Ziele der Vorlesung

- Begriffe
  - Syntax: Wann ist ein Ausdruck korrekt?
    - Korrektheit
    - Term, Formel
    - Funktions-, Relationssymbole
  - Semantik: Was bedeutet ein korrekter Ausdruck?
    - Wahrheit
    - Interpretation, Modell
    - Gültigkeit, Erfüllbarkeit
    - Folgerung
- Beweisverfahren
  - Resolution
  - Tableaus
- Praktische Anwendung von Logik
  - Formalisierung in Aussagen- und Prädikatenlogik
  - Prolog

Inhalt

Logik: Wortherkunft

Logos

λόγος

- verwandt mit λέγειν (sprechen)
- Wort, Satz, Rede
- Argumentation
- Beweis, Definition
- Vernunft, Rationalität

Gegenbegriff: Mythos

μῦθος

- Wort, Rede, Erzählung
- Legende
- Vermischung von Fakten und Glauben

Zentraler Begriff für Ursprung des abendländischen Denkens

- Übergang „vom Mythos zum Logos“ (Wilhelm Nestle, 1940)
- Wendung von Legenden zur Rationalität

Der Logos ist überall

Ἐν ἀρχῇ ἦν ὁ λόγος,	*Im Anfang war das Wort*
καὶ ὁ λόγος ἦν πρὸς τὸν θεόν,	*und das Wort war bei Gott*
καὶ θεὸς ἦν ὁ λόγος.	*und Gott war das Wort.*
...	...
Καὶ ὁ λόγος σὰρξ ἐγένετο	*Und das Wort ist Fleisch geworden*
καὶ ἐσκήνωσεν ἐν ἡμῖν, ...	*und hat unter uns gewohnt, ...*

Joh 1 1,14

Heutige Verwendung:

- Logik
- Wissenschaften enden auf -logie
- Logopädie (Sprecherziehung)
- Dialog („durch Wörter“)
- Trilogie („drei Werke“)
- Dekalog (Zehn Gebote)

- Aristoteles: „Metaphysik“
  - Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch

    > *Es ist unmöglich, dass dasselbe demselben in derselben Beziehung zugleich zukomme und nicht zukomme.*

  - Satz vom ausgeschlossenen Dritten

    > *Es ist unmöglich, dass es ein Mittleres zwischen den beiden Gliedern des Widerspruchs gibt, sondern man muss eben eines von beiden entweder bejahen oder verneinen.*

Aristoteles
384–322 v.C.

- Gottfried Wilhelm Leibniz
  - Dualsystem: 0 ⇝ Nichts; 1 ⇝ Gott

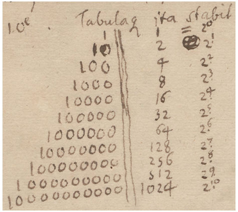
    > *Um alles aus dem Nichts herzuleiten, genügt Eines.*

  - Rechenmaschinen

    > *Denn es ist ausgezeichneter Menschen unwürdig, gleich Sklaven Stunden zu verlieren mit Berechnungen.*

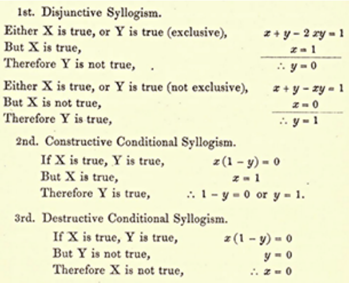
  - Idee der Formalisierung von Ausdrücken und Beweisen

    > *Philosophen werden nicht anders argumentieren als Rechenmeister. Sie werden die Feder in die Hand nehmen und sagen: Calculemus!*



G.W. Leibniz
1646–1716

- George Boole: „The Mathematical Analysis of Logic“
  - Operatoren $\times$ (und), $+$ (oder), $-$ (nicht)
  - Rechengesetze
  - disjunktive Normalform
  - Entscheidungsverfahren
  - ⇝ Aussagenlogik



1st. Disjunctive Syllogism.

Either X is true, or Y is true (exclusive),	$x + y - 2xy = 1$
But X is true,	$x = 1$
Therefore Y is not true,	$\therefore y = 0$
Either X is true, or Y is true (not exclusive),	$x + y - xy = 1$
But X is not true,	$x = 0$
Therefore Y is true,	$\therefore y = 1$

2nd. Constructive Conditional Syllogism.

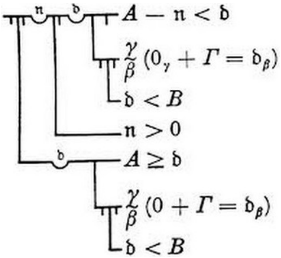
If X is true, Y is true,	$x(1 - y) = 0$
But X is true,	$x = 1$
Therefore Y is true,	$\therefore 1 - y = 0$ or $y = 1$.

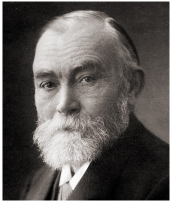
3rd. Destructive Conditional Syllogism.

If X is true, Y is true,	$x(1 - y) = 0$
But Y is not true,	$y = 0$
Therefore X is not true,	$\therefore x = 0$

George Boole
1815–1864

- Gottlob Frege: „Begriffsschrift“
  - Formalisierung mathematischer Aussagen
  - „für alle x gilt ...“
  - „es gibt ein x, für das gilt ...“
  - ⇝ Prädikatenlogik





Gottlob Frege
1848–1925

Principia Mathematica

- Bertrand Russell, Alfred North Whitehead: „Principia Mathematica“
  - Ziel: Fundierung der Mathematik auf Logik
  - Formalisierung von Beweisen
  - Inferenz-Regeln

$$\ast 54\cdot 43. \quad \vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$$

Dem.

$$\vdash . \ast 54\cdot 26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$$

$$[\ast 51\cdot 231] \qquad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$$

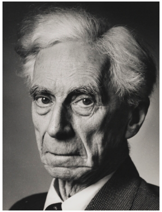
$$[\ast 13\cdot 12] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$$

$$\vdash . (1) . \ast 11\cdot 11\cdot 35 . \supset$$

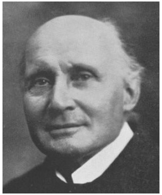
$$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$$

$$\vdash . (2) . \ast 11\cdot 54 . \ast 52\cdot 1 . \supset \vdash . \text{Prop}$$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.



Bertrand Russell
1872–1970



A.N. Whitehead
1861–1947

- David Hilbert: Hilbert-Programm
  - Formalisierung aller Bereiche der Mathematik
  - Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Formalisierung
  - Nachweis der Vollständigkeit der Beweisverfahren
  - $\rightsquigarrow$ Mechanisches Ableiten aller wahren Sätze

> *Wir müssen wissen, wir werden wissen!*

David Hilbert
1862–1943

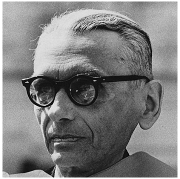
Grenzen der Beweisbarkeit

- Kurt Gödel: „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme“
  - Vollständigkeit der Prädikatenlogik erster Stufe:
    Jeder wahre Satz (in PL1) ist beweisbar.
  - Unvollständikeit der Prädikatenlogik zweiter Stufe:
    Es gibt (in PL2) wahre Sätze, die nicht beweisbar sind.

> *Die Logik wird nie mehr dieselbe sein.*
>
> John von Neumann (1903–1957)

- Alan Turing: „On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem“
  - Unentscheidbarkeit des Halteproblems für Turing-Maschinen (Computer)
  - Unentscheidbarkeit des Erfüllbarkeitsproblems für PL1

  $\rightsquigarrow$ 3. Semester



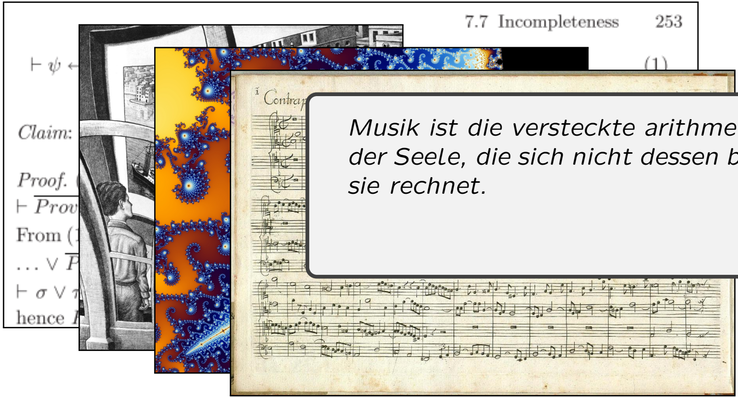
Kurt Gödel
1906–1978

Alan Turing
1912–1954

Selbstreferenz

- „Dieser Satz ist nicht beweisbar.“
- Russell’sche Antinomie: $U = \{T \mid T \notin T\}$
- „Der Barbier rasiert genau die Männer, die sich nicht selbst rasieren.“

Douglas R. Hofstadter: *Gödel* *Escher* *Bach*



> *Musik ist die versteckte arithmetische Tätigkeit der Seele, die sich nicht dessen bewusst ist, dass sie rechnet.*
>
> G.W. Leibniz

Das MIU-System

- Alle Wörter bestehen aus den Buchstaben `M`, `I` und `U`
- Eine Ableitung beginnt immer mit `MI`
- Es gelten die folgenden Ableitungsregeln:
  1. Wenn ein Wort mit `I` endet, darf man `U` anhängen
  2. `III` darf durch `U` ersetzt werden
  3. `UU` darf entfernt werden
  4. Das Teilwort nach einem `M` darf verdoppelt werden

Nach Douglas R. Hofstadter, *Gödel Escher Bach*

Das MIU-System (formaler)

- Alle Wörter bestehen aus den Buchstaben $\mathtt{M}$, $\mathtt{I}$ und $\mathtt{U}$
- Jede Ableitung beginnt mit $\mathtt{MI}$
- x und y stehen für beliebige (Teil-)wörter
- Ableitungsregeln:
  1. $x\mathtt{I} \longrightarrow x\mathtt{IU}$
  2. $x\mathtt{III}y \longrightarrow x\mathtt{U}y$
  3. $x\mathtt{UU}y \longrightarrow xy$
  4. $\mathtt{M}x \longrightarrow \mathtt{M}xx$
- Man schreibt $x \vdash_i y$, wenn sich x durch Anwendung der Regel Nr. i in y überführen lässt

Beispiel 1.1 (Ableitung im MIU-System)

$\mathtt{MI} \vdash_4 \mathtt{MII} \vdash_4 \mathtt{MIIII} \vdash_2 \mathtt{MUI} \vdash_4 \mathtt{MUIUI}$

Übung: Ableitungen im MIU-System

- Jede Ableitung beginnt mit MI
- Ableitungsregeln:
  1. $x\mathtt{I} \to x\mathtt{IU}$
  2. $x\mathtt{III}y \to x\mathtt{U}y$
  3. $x\mathtt{UU}y \to xy$
  4. $\mathtt{M}x \to \mathtt{M}xx$
- Man schreibt $x \vdash_i y$, wenn sich x durch Anwendung der Regel Nr. i in y überführen lässt

Übung 1.2

Geben Sie, falls möglich, für die folgenden Wörter Ableitungen an:

1. MUIU
2. MIIIII
3. MUUUI
4. MU

MIU-Lösungen (1)

1. $x\mathtt{I} \rightarrow x\mathtt{IU}$
2. $x\mathtt{III}y \rightarrow x\mathtt{U}y$
3. $x\mathtt{UU}y \rightarrow xy$
4. $\mathtt{M}x \rightarrow \mathtt{M}xx$

Lösung 1.2

1. $\mathtt{MI} \vdash_4 \mathtt{MII} \vdash_4 \mathtt{MIIII} \vdash_1 \mathtt{MIIIIU} \vdash_2 \mathtt{MUIU}$
2. $\mathtt{MI} \vdash_4 \mathtt{MII} \vdash_4 \mathtt{MIIII} \vdash_4 \mathtt{MIIIIIIII} \vdash_1 \mathtt{MIIIIIIIIU} \vdash_2 \mathtt{MIIIIIUU} \vdash_3 \mathtt{MIIIII}$
3. $\mathtt{MI} \vdash_4 \mathtt{MII} \vdash_4 \mathtt{MIIII} \vdash_4 \mathtt{MIIIIIIII} \vdash_2 \mathtt{MUIIIII} \vdash_2 \mathtt{MUUII} \vdash_4 \mathtt{MUUIIUUII} \vdash_3 \mathtt{MUUIIII} \vdash_2 \mathtt{MUUUI}$

MIU-Lösungen (2)

1. $x\mathtt{I} \to x\mathtt{IU}$
2. $x\mathtt{III}y \to x\mathtt{U}y$
3. $x\mathtt{UU}y \to xy$
4. $\mathtt{M}x \to \mathtt{M}xx$

Lösung 1.2

4. $\mathtt{MU}$ kann nicht hergeleitet werden!

Beweis.

- Betrachte Anzahl der $\mathtt{I}$ in ableitbaren Wörtern
- Invariante: in allen herleitbaren Wörtern ist $|x|_{\mathtt{I}}$ nicht ohne Rest durch 3 teilbar
  - $|\mathtt{MI}|_{\mathtt{I}} = 1$; Rest 1
  - Regeln 1 und 3 ändern die Anzahl der $\mathtt{I}$ nicht
  - Regel 4 verdoppelt die Anzahl der $\mathtt{I}$
    Rest 1 $\rightsquigarrow$ Rest 2, Rest 2 $\rightsquigarrow$ Rest 1
  - Regel 2 reduziert die Anzahl der $\mathtt{I}$ um 3; Rest bleibt gleich
- In keinem der Fälle wird aus einem nicht-Vielfachen von 3 ein Vielfaches von 3. Aber $|\mathtt{MU}|_{\mathtt{I}} = 0$. Also ist $\mathtt{MU}$ nicht herleitbar. $\square$

MIU und Logik

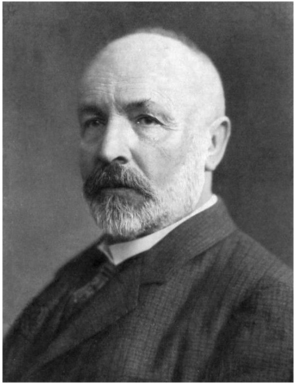
MIU-System	Logik
Wörter über $\{\mathtt{M}, \mathtt{I}, \mathtt{U}\}$	Syntaktisch korrekte Ausdrücke
MI	Axiome
Ableitungsregeln	Beweisschritte
Ableitbare Wörter	Beweisbare Sätze

- Regelanwendung terminiert nicht
- Ableitungsregeln liefern kein Entscheidungsverfahren

Inhalt

Inhalt

> *Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen.*



Georg Cantor
(1845–1918)

Mengen

Definition 2.1 (Menge, Element)

- Eine Menge ist eine Sammlung von Objekten, betrachtet als Einheit.
- Die Objekte heißen auch Elemente der Menge.

- Elemente können beliebige Objekte sein:
  - Zahlen
  - Wörter
  - Andere Mengen (!)
  - Listen, Paare, Funktionen, . . .
  - . . . aber auch Menschen, Fahrzeuge, Kurse an der DHBW, . . .

Die Menge aller in einem bestimmten Kontext betrachteten Objekte heißt oft Universum oder Trägermenge.

- Explizite Aufzählung:
  - $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$
  - $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- Beschreibung („Deskriptive Form“):
  - $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist Primzahl und } n \leq 13\}$
  - $B = \{3 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\}$
  - $C = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- Mengenzugehörigkeit
  - $2 \in A$ (2 ist in A, 2 ist Element von A)
  - $4 \notin A$ (4 ist nicht in A, 4 ist kein Element von A)

Basiseigenschaften von Mengen

- Mengen sind ungeordnet
  - $\{a, b, c\} = \{b, c, a\} = \{c, a, b\}$
  - Geordnet sind z. B. Folgen
- Jedes Element kommt in einer Menge maximal einmal vor
  - $\{1, 1, 1\}$ hat ein Element
  - Mehrfaches Vorkommen des gleichen Elements erlauben z. B. Multimengen oder Folgen

Definition 2.2 (Mächtigkeit)

Die Mächtigkeit einer Menge M, $|M|$, ist die Anzahl der Elemente von M.

- Einfach für endliche Mengen: $|\{a, b, c\}| = 3$
- Schwierig für unendliche Mengen: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$

Teilmengen, Mengengleichheit

Definition 2.3 (Teilmenge)

Eine Menge M_1 heißt Teilmenge von M_2 ($M_1 \subseteq M_2$), wenn für alle $x \in M_1$ auch $x \in M_2$ gilt.

Definition 2.4 (Mengengleichheit)

Zwei Mengen M_1 und M_2 sind einander gleich ($M_1 = M_2$), wenn für alle Elemente x gilt:
$x \in M_1$ gdw. $x \in M_2$, d. h. wenn M_1 und M_2 die selben Elemente enthalten.

Es gilt: $M_1 = M_2 \quad$ gdw. $\quad M_1 \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq M_1$.

Vokabular:

- gdw. steht für „genau dann, wenn“ (dann und nur dann, wenn)
- englisch: iff; „if and only if“

Echte Teilmengen, Obermengen

Definition 2.5 (Echte Teilmenge)

Eine Menge M_1 heißt echte Teilmenge von M_2 ($M_1 \subset M_2$), wenn $M_1 \subseteq M_2$ und $M_1 \neq M_2$ gilt.

- Analog definieren wir Obermengen:
  - $M_1 \supseteq M_2$ gdw. $M_2 \subseteq M_1$
  - $M_1 \supset M_2$ gdw. $M_2 \subset M_1$
- Wir schreiben $M_1 \nsubseteq M_2$, falls M_1 keine Teilmenge von M_2 ist.

Notation: Manche Autoren verwenden $\subset$ statt $\subseteq$ und $\subsetneq$ statt $\subset$.

Einige wichtige Mengen

- $\emptyset = \{\}$, die leere Menge
  - enthält kein Element
  - es gilt: $\emptyset \subseteq M$ für alle Mengen M
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$, die natürlichen Zahlen
  - Informatiker fangen bei 0 an zu zählen!
- $\mathbb{N}^{\geq 1} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, die positiven natürlichen Zahlen
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, die ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^{\geq 1}\}$ (die rationalen Zahlen)
- $\mathbb{R}$, die reellen Zahlen
  - alle Zahlen auf der Zahlengerade (keine „Löcher“ wie bei $\mathbb{Q}$)
  - enthält auch π, e, $\sqrt{2}$, ...
- $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, die Boole'sche Menge

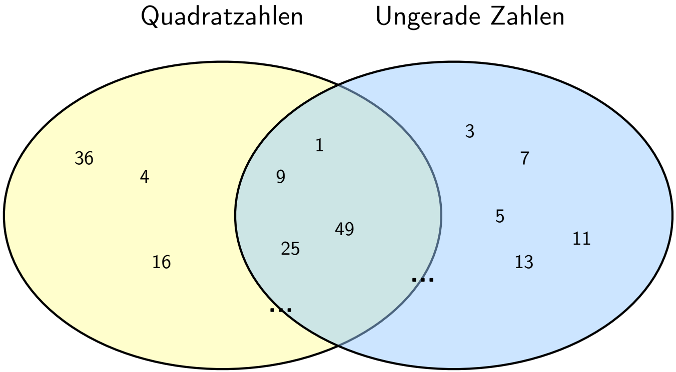
Übung 2.6

Geben Sie formale Beschreibungen für die folgenden Teilmengen der natürlichen Zahlen:

1. Alle geraden Zahlen
2. Alle Quadratzahlen
3. Alle Zahlen, die eine gerade Anzahl von Teilern haben

Inhalt

- Grafische Mengendarstellung
  - Mengen sind zusammenhängende Flächen
  - Überlappungen visualisieren gemeinsame Elemente
- Zeigen alle möglichen Beziehungen



John Venn
(1834–1923)

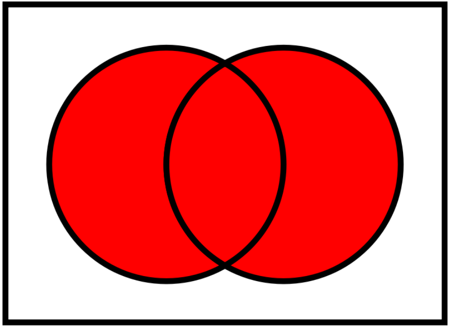
Mengenoperationen

Annahme: Alle betrachteten Mengen sind Teilmengen einer gemeinsamen Trägermenge T.

Wichtige Mengenoperationen sind:

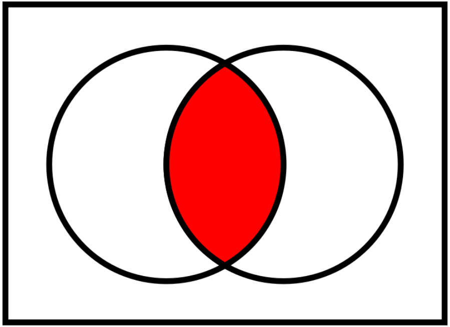
- Vereinigung
- Schnitt
- Differenz
- Komplement

Vereinigung



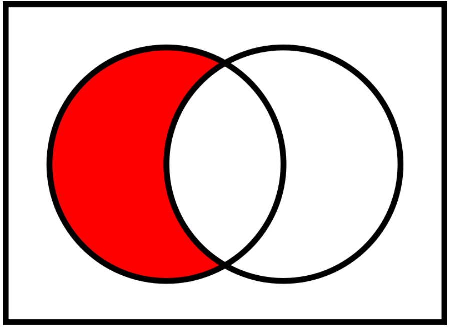
- $M_1 \cup M_2 = \{x \mid x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$
- $x \in M_1 \cup M_2$ gdw. $x \in M_1$ oder $x \in M_2$

Schnitt

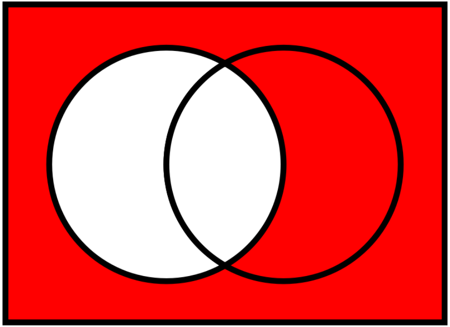


- $M_1 \cap M_2 = \{x \mid x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}$
- $x \in M_1 \cap M_2$ gdw. $x \in M_1$ und $x \in M_2$

Differenz



- $M_1 \setminus M_2 = \{x \mid x \in M_1 \text{ und } x \notin M_2\}$
- $x \in M_1 \setminus M_2$ gdw. $x \in M_1$ und $x \notin M_2$



- $\overline{M_1} = \{x \mid x \notin M_1\}$
- $x \in \overline{M_1}$ gdw. $x \notin M_1$

Achtung

Hier ist die implizite Annahme der Trägermenge T besonders wichtig.

Übung: Mengenoperationen

Übung 2.7

1. Sei $T = \{1, 2, \dots, 12\}$,
   $M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $M_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.
   Berechnen Sie die folgenden Mengen und visualisieren Sie diese in einem Venn-Diagramm.
   a. $M_1 \cup M_2$
   b. $M_1 \cap M_2$
   c. $M_1 \setminus M_2$
   d. $\overline{M_1}$
   e. $\overline{M_2}$
2. Sei $T = \mathbb{N}$, $M_1 = \{3i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $M_2 = \{2i + 1 \mid i \in \mathbb{N}\}$.
   Geben Sie für die folgenden Mengen jeweils eine mathematische und eine umgangssprachliche Charakterisierung an.
   a. $M_1 \cap M_2$
   b. $M_1 \setminus M_2$
   c. $M_1 \setminus \overline{M_2}$

Rechenregeln

Satz 2.8

Es seien M, P und S Teilmengen einer Trägermenge T. Dann gelten die folgenden Gleichungen:

- Kommutativgesetze
  - $M \cup P = P \cup M$
  - $M \cap P = P \cap M$
- Assoziativgesetze
  - $M \cup (P \cup S) = (M \cup P) \cup S$
  - $M \cap (P \cap S) = (M \cap P) \cap S$
- Distributivgesetze
  - $M \cup (P \cap S) = (M \cup P) \cap (M \cup S)$
  - $M \cap (P \cup S) = (M \cap P) \cup (M \cap S)$
- Gesetze von De Morgan
  - $\overline{M \cup P} = \overline{M} \cap \overline{P}$
  - $\overline{M \cap P} = \overline{M} \cup \overline{P}$
- Neutrale Elemente
  - $M \cup \emptyset = M$
  - $M \cap T = M$
- Inverse Elemente
  - $M \cup \overline{M} = T$
  - $M \cap \overline{M} = \emptyset$
- Absorbierende Elemente
  - $M \cup T = T$
  - $M \cap \emptyset = \emptyset$
- Idempotenz
  - $M \cup M = M$
  - $M \cap M = M$
- Doppeltes Komplement
  - $\overline{\overline{M}} = M$

Augustus
De Morgan
(1806-1871)

Zusammenfassung: Mengen

Menge	Zusammenfassung von Elementen zu einem Ganzen
Operationen	Vereinigung, Schnitt, Differenz, Komplement
Visualisierung	Venn-Diagramme
Rechenregeln	De Morgan, neutrale/inverse/absorbierende Elemente

Inhalt

Aussagenlogik

Einfachste in dieser Vorlesung betrachtete Logik

- begrenzte Ausdrucksstärke
- einfach zu verstehen und anzuwenden
- enthält verschiedene Konzepte, die auch in ausdrucksstärkeren Logiken vorkommen

Aussagenvariablen repräsentieren atomare Aussagen

Beispiel 3.1

$A \quad \rightsquigarrow \quad$ „Es regnet.“

Junktoren repräsentieren Zusammenhänge zwischen Aussagen

Beispiel 3.2

$A \rightarrow B \quad \rightsquigarrow \quad$ „Wenn es regnet, wird die Erde nass.“

Aussagenvariablen

- werden durch Großbuchstaben repräsentiert $A, B, X, Y, \ldots$
- drücken Aussagen aus, die wahr oder falsch sein können
  - „Es regnet.“
  - „Paul liebt Paula.“
  - „Sokrates ist sterblich.“

Inhalt

Syntax

Lehre von wohlgeformten Ausdrücken

- Linguistik: Satzbau; Regeln zum Erzeugen von Sätzen aus Wörtern
- Logik: Regeln zum Erzeugen von Formeln aus vorgegebenen Symbolen

Beispiel 3.3

	syntaktisch falsch	syntaktisch richtig
Deutsch	geben . hat Mensch ? die	Heute ist schönes Wetter.
Mathematik	$+)2 - \cdot((xy - 3 <$	$3 < (4 + 2) \cdot 5$

Syntax der Aussagenlogik

Definition 3.4 (Aussagenlogische Formel)

Sei V eine Menge von Aussagenvariablen.

- Jedes $X \in V$ ist eine aussagenlogische Formel.
- $\mathbf{W}$ und $\mathbf{F}$ sind aussagenlogische Formeln.
- Wenn φ und ψ aussagenlogische Formeln sind, dann auch
  - $(\neg\varphi)$ (Negation)
  - $(\varphi \wedge \psi)$ (Konjunktion)
  - $(\varphi \vee \psi)$ (Disjunktion)
  - $(\varphi \rightarrow \psi)$ (materiale Implikation)
  - $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ (materiale Äquivalenz)

Beispiel 3.5 (Formeln über der Variablenmenge $\{A, B, C, D, E\}$)

- $(A \wedge B)$
- $(\mathbf{F} \vee A)$
- $(\neg\mathbf{W})$
- $(A \wedge (B \vee C))$
- $(\neg(A \vee B))$
- $(C \rightarrow (B \vee D))$
- $(A \rightarrow ((B \wedge (C \leftrightarrow D)) \vee (D \rightarrow E)))$
- $(A \leftrightarrow (A \leftrightarrow D))$
- $(((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (C \leftrightarrow D)) \rightarrow E)$

Übung 3.6

Seien A, B, C und D Aussagenvariablen.
Welche der folgenden Zeichenketten sind aussagenlogische Formeln?

1. $(A \rightarrow \mathbf{F})$
2. $(A \land (B \lor C))$
3. $(A \neg B)$
4. $((A \rightarrow C) \land (((\neg A) \rightarrow C) \rightarrow C))$
5. $((\lor B) \lor (C \land D))$
6. $(A \rightarrow (B \lor (\neg B))(C \lor (\neg C)))$
7. $A \land B \lor \neg C$
8. $(A \rightarrow A)$
9. $(A \land (\neg A))$
10. $(A \neg \land B)$
11. $((\neg A) \land B)$
12. $(((\neg A) \land) B)$
13. $(\neg (A \land B))$
14. $((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((\neg A) \leftrightarrow (\neg B)))$

Vorrang und Assoziativität der Junktoren

Um Klammern zu sparen, wird vereinbart:

- Äußerste Klammern um eine Formel können weggelassen werden.
- Gleiche Junktoren werden links-assoziativ gelesen.
- Vorrang unterschiedlicher Junktoren: $\neg \quad \gg \quad \wedge \quad \gg \quad \vee \quad \gg \quad \rightarrow \quad \gg \quad \leftrightarrow$

Beispiel 3.7

- $A \wedge B$ statt $(A \wedge B)$
- $A \rightarrow B \rightarrow C$ statt $((A \rightarrow B) \rightarrow C)$
- $A \wedge \neg B \rightarrow B \vee C$ statt $((A \wedge (\neg B)) \rightarrow (B \vee C))$

Übung 3.8

Entfernen Sie so viele Klammern wie möglich, ohne den Vorrang zu verändern.

1. $((A \wedge B) \vee ((C \wedge D) \to (A \vee C)))$
2. $(((A \wedge ((B \vee C) \wedge D)) \to A) \vee C)$
3. $(A \wedge (B \vee (C \wedge (D \to (A \vee C)))))$

Inhalt

Lehre von der Bedeutung von Ausdrücken

- Voraussetzung: Ausdruck ist wohlgeformt (syntaktisch korrekt)
- Linguistik: Was bedeutet ein Begriff oder Satz?
- Logik: Ist ein Satz wahr oder falsch?

Beispiel 3.9

	immer wahr	immer falsch	kommt drauf an
Deutsch	Die Erde kreist um die Sonne.	Der Mensch x ist unsterblich.	Heute ist schönes Wetter.
Arithmetik	$4 + 2 = 6$	$x \cdot x < 0$	$x + 3 = 5$

Semantik der Aussagenlogik

- Aussagenvariablen erhalten Wert 0 oder 1
- Formel wird wahr oder falsch

Definition 3.10 (Interpretation in der Aussagenlogik)

Eine Interpretation ist eine Funktion $\mathcal{I} : V \to \mathbb{B}$ mit

- einer Menge von Aussagenvariablen V
- der Boole'schen Menge $\mathbb{B} = \{0, 1\}$

Beispiel 3.11

$\{A \mapsto 0, B \mapsto 1\} \quad \rightsquigarrow \quad$ „es regnet nicht, und die Erde wird nass"

Notation: Statt $\mathcal{I}(A) = 0$ schreibt man auch $A^{\mathcal{I}} = 0$.

$\mathbf{F}^{\mathcal{I}}$	$\mathbf{W}^{\mathcal{I}}$
0	1

$\varphi^{\mathcal{I}}$	0	1
$(\neg\varphi)^{\mathcal{I}}$	1	0

$(\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{I}}$

$\psi^{\mathcal{I}}$ \ $\varphi^{\mathcal{I}}$	0	1
0	0	0
1	0	1

$(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{I}}$

$\psi^{\mathcal{I}}$ \ $\varphi^{\mathcal{I}}$	0	1
0	0	1
1	1	1

$(\varphi \rightarrow \psi)^{\mathcal{I}}$

$\psi^{\mathcal{I}}$ \ $\varphi^{\mathcal{I}}$	0	1
0	1	0
1	1	1

$(\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{I}}$

$\psi^{\mathcal{I}}$ \ $\varphi^{\mathcal{I}}$	0	1
0	1	0
1	0	1

Beispiele: Interpretationen

Beispiel 3.12

Die Interpretation $\mathcal{I} = \{A \mapsto 1, B \mapsto 1, C \mapsto 0\}$ macht die Formel ...

- B wahr;
- $A \wedge B$ wahr;
- $A \wedge C$ falsch;
- $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ wahr;
- $((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \rightarrow C$ falsch.

Übung: Interpretationen

Übung 3.13

Finden Sie für die folgenden Formeln je zwei Interpretationen:

- eine, die die Formel wahr macht
- eine, die die Formel falsch macht

1. $A \wedge B \rightarrow C$
2. $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \rightarrow (B \wedge C)$
3. $A \rightarrow B \leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$

Tautologien

Definition 3.14 (Tautologie)

Eine Tautologie ist eine Formel, die in jeder Interpretation wahr ist.

Beispiel 3.15

- $\alpha \leftrightarrow \alpha$ (Identität)
- $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ (Ausgeschlossener Widerspruch)
- $\alpha \vee \neg\alpha$ (Ausgeschlossenes Drittes)
- $\alpha \rightarrow \beta \leftrightarrow \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ (Kontraposition, Umkehrschluss)
- $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$ (Reductio ad Absurdum, Widerspruchsbeweis)
- $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge \alpha \rightarrow \beta$ (Modus Ponens)
- $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ (Modus Tollens)
- $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$ (Fallunterscheidung)

Modelle, Gültigkeit, Erfüllbarkeit

Definition 3.16 (Modell)

Eine Interpretation $\mathcal{I}$ ist ein Modell für eine Formel φ ($\mathcal{I} \models \varphi$), wenn $\varphi^{\mathcal{I}} = 1$ gilt.

Beispiel 3.17

$\mathcal{I} = \{A \mapsto 1, B \mapsto 0\}$ ist Modell für $A \vee B$, aber nicht für $A \wedge B$.

Definition 3.18 (Erfüllbarkeit, Gültigkeit)

Eine Formel φ heißt erfüllbar, wenn sie ein Modell hat, sonst unerfüllbar.
Eine Formel φ heißt gültig ($\models \varphi$) wenn jede Interpretation ein Modell ist, sonst falsifizierbar.

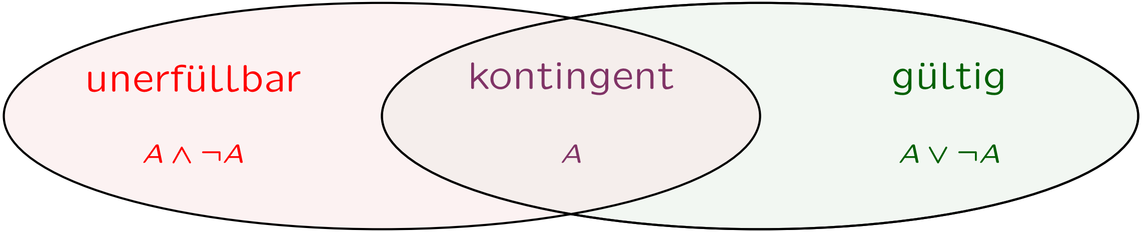
Beispiel 3.19

erfüllbar $A, \quad A \vee B, \quad A \wedge \neg B, \quad A \leftrightarrow B$

gültig $A \vee \neg A, \quad A \to A, \quad A \leftrightarrow \neg(\neg A)$ (Tautologien)

falsifizierbar
Es gibt $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \not\models \varphi$

erfüllbar
Es gibt $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \varphi$



Definition 3.20 (Logische Implikation)

Eine aussagenlogische Formel φ impliziert (logisch) eine Formel ψ ($\varphi \models \psi$), wenn jedes Modell von φ auch ein Modell von ψ ist.

Beispiel 3.21

$$\begin{array}{rcll}
\alpha & \models & \alpha & \\
\alpha & \models & \alpha \vee \beta & \\
\alpha \wedge \beta & \models & \alpha & \\
\mathbf{F} & \models & \alpha & \text{ex falso quodlibet} \\
\alpha & \models & \mathbf{W} &
\end{array}$$

Logische Äquivalenz

Definition 3.22 (Äquivalenz)

Zwei aussagenlogische Formeln φ und ψ sind (logisch) äquivalent ($\varphi \equiv \psi$), wenn jede Interpretation beiden Formeln denselben Wahrheitswert zuordnet, d. h. wenn für jedes $\mathcal{I}$ gilt: $\varphi^{\mathcal{I}} = \psi^{\mathcal{I}}$.

Beispiel 3.23 (Ersetzung von Operatoren durch äquivalente Ausdrücke)

$$\begin{aligned}
\alpha \leftrightarrow \beta &\equiv (\alpha \rightarrow \beta) \land (\beta \rightarrow \alpha) \\
&\equiv \alpha \land \beta \lor \neg\alpha \land \neg\beta \\
\alpha \rightarrow \beta &\equiv \neg\alpha \lor \beta \\
\alpha \land \beta &\equiv \neg(\neg\alpha \lor \neg\beta) \\
\alpha \lor \beta &\equiv \neg(\neg\alpha \land \neg\beta)
\end{aligned}$$

Rechenregeln

Satz 3.24

Es seien α, β und γ aussagenlogische Formeln. Dann gelten die folgenden Äquivalenzen:

- Kommutativgesetze
  - $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$
  - $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$
- Assoziativgesetze
  - $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$
  - $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$
- Distributivgesetze
  - $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
  - $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
- Gesetze von De Morgan
  - $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$
  - $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$
- Neutrale Elemente
  - $\alpha \vee \mathbf{F} \equiv \alpha$
  - $\alpha \wedge \mathbf{W} \equiv \alpha$
- Inverse Elemente
  - $\alpha \vee \neg\alpha \equiv \mathbf{W}$
  - $\alpha \wedge \neg\alpha \equiv \mathbf{F}$
- Absorbierende Elemente
  - $\alpha \vee \mathbf{W} \equiv \mathbf{W}$
  - $\alpha \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$
- Idempotenz
  - $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$
  - $\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$
- Doppelte Negation
  - $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$

Inhalt

- Bestimmung der Eigenschaften einer Formel φ
  - gültig (φ ist eine Tautologie; jede Interpretation ist ein Modell)
  - erfüllbar (Es gibt ein Modell für φ)
  - falsifizierbar (Es gibt eine Interpretation, die kein Modell für φ ist)
  - unerfüllbar (Es gibt keine Modelle für φ)
- Bestimmung, ob eine Formel φ eine Formel ψ (logisch) impliziert

Beweis der Gültigkeit: Äquivalenzumformungen

Beispiel 3.25 (Reductio ad Absurdum)

Formel	Begründung
$(A \to B) \land (A \to \neg B) \to \neg A$	Ersetzung von $\to$ (zweimal)
$(\neg A \lor B) \land (\neg A \lor \neg B) \to \neg A$	Ersetzung von $\to$
$\neg((\neg A \lor B) \land (\neg A \lor \neg B)) \lor \neg A$	De Morgan
$\neg(\neg A \lor B) \lor \neg(\neg A \lor \neg B) \lor \neg A$	De Morgan (zweimal)
$(A \land \neg B) \lor (A \land B) \lor \neg A$	Distributivität
$(A \land (\neg B \lor B)) \lor \neg A$	Ausgeschlossenes Drittes
$(A \land \mathbf{W}) \lor \neg A$	$\mathbf{W}$ ist neutrales Element für $\land$
$A \lor \neg A$	Ausgeschlossenes Drittes
$\mathbf{W}$	

Nachteile:

- Transformationen müssen geraten werden.
- Wenn φ nicht gezeigt werden kann, folgt nicht, dass φ nicht gültig ist.

Beweis der Gültigkeit: Wahrheitstabelle

Beispiel 3.26 (Reductio ad Absurdum)

A	B	$A \to B$	$A \to \neg B$	$(A \to B) \land (A \to \neg B)$	$\neg A$	$(A \to B) \land (A \to \neg B) \to \neg A$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1

Nachteile:

- ineffizient, besonders bei vielen Variablen („exponentielle Komplexität“)
- redundant, da viele Varianten keinen Einfluss auf das Ergebnis haben

Übung 3.27

Zeigen Sie, dass die Formel φ eine Tautologie ist:

$$\varphi = A \land B \to C \leftrightarrow A \to (B \to C)$$

Verwenden Sie

1. Äquivalenzumformungen,
2. eine Wahrheitstabelle.

Inhalt

- John Alan Robinson: *A machine-oriented logic based on the resolution principle* (1965)
- Erfüllbarkeitstest für Formel φ
- Erfüllbarkeitstest entscheidet auch
  - Gültigkeit
    $\models \varphi$ gilt gdw. $\neg\varphi$ unerfüllbar ist.
  - (logische) Implikation
    $\varphi \models \psi$ gilt gdw. $\varphi \wedge \neg\psi$ unerfüllbar ist.

J. A. Robinson
(1930–2016)

Literale

Definition 3.28 (Literal)

Ein Literal ist eine (möglicherweise negierte) Aussagenvariable.

Beispiel 3.29

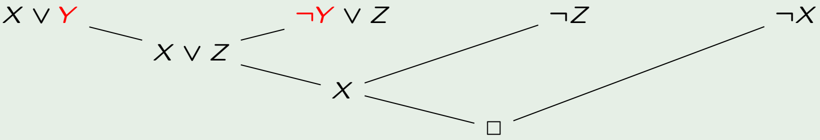
Über der Variablenmenge $\{A, B\}$ ist die Menge der möglichen Literale $\{A, \neg A, B, \neg B\}$.

Resolutionsprinzip

Finde Widerspruch in φ

- betrachte φ als Konjunktion von Disjunktionen (Klauseln) von Literalen
- suche Paare von Klauseln C_1, C_2 mit gegensätzlichen Literalen $X, \neg X$
- erzeuge Resolvente C_3 durch Vereinigen der Elternklauseln C_1 und C_2 und Entfernen von X und $\neg X$
  - C_3 ist nicht äquivalent zu $C_1 \wedge C_2$!
  - $C_1 \wedge C_2$ erfüllbar $\rightsquigarrow$ C_3 erfüllbar
  - C_3 unerfüllbar $\rightsquigarrow$ $C_1 \wedge C_2$ unerfüllbar
- leere Klausel $\square$: Widerspruch

Beispiel 3.30 ($\varphi = (X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee Z) \wedge \neg Z \wedge \neg X$)



Warum funktioniert das Resolutionsprinzip?

Gegeben: zwei Klauseln $C_1 = X \vee Y$ und $C_2 = \neg Y \vee Z$.
Gesucht: Modell für $C_1 \wedge C_2$.

In einer Interpretation $\mathcal{I}$ ist $Y^{\mathcal{I}}$ entweder 0 oder 1.

- wenn $Y^{\mathcal{I}} = 1$ gilt, folgt $C_1^{\mathcal{I}} = 1$, und $C_2^{\mathcal{I}} = 1$ gilt gdw. $Z^{\mathcal{I}} = 1$;
- wenn $Y^{\mathcal{I}} = 0$ gilt, folgt $C_2^{\mathcal{I}} = 1$, und $C_1^{\mathcal{I}} = 1$ gilt gdw. $X^{\mathcal{I}} = 1$.

Es folgt:

- Jedes Modell für $C_1 \wedge C_2$ ist auch Modell für $C_3 = X \vee Z$.
- Wenn $C_1 \wedge C_2$ erfüllbar ist, dann auch $C_1 \wedge C_2 \wedge C_3$.
- Wenn $C_1 \wedge C_2 \wedge C_3$ unerfüllbar ist, dann auch $C_1 \wedge C_2$.

Konjunktive Normalform

Definition 3.31 (Konjunktive Normalform)

Eine aussagenlogische Formel φ ist in konjunktiver Normalform (KNF), wenn φ eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist.

Beispiel 3.32

$(X \lor Y) \land (\neg Y \lor Z) \land \neg Z \land \neg X$ ist in KNF;
$(X \land Y) \lor \neg(\neg Y \lor Z)$ ist nicht in KNF.

Transformation in KNF

Satz 3.33

Jede aussagenlogische Formel kann in eine äquivalente Formel in KNF transformiert werden.

Verfahren:

1.a)	eliminiere materiale Äquivalenz	$\varphi \leftrightarrow \psi$	$\rightsquigarrow$	$(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$
b)	eliminiere materiale Implikation	$\varphi \rightarrow \psi$	$\rightsquigarrow$	$\neg\varphi \vee \psi$
2.	Gesetze von De Morgan	$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\rightsquigarrow$	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$
		$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\rightsquigarrow$	$\neg\varphi \vee \neg\psi$
3.a)	eliminiere doppelte Negation	$\neg\neg\varphi$	$\rightsquigarrow$	φ
b)	eliminiere negierte Boole-Konstanten	$\neg\mathbf{W}$	$\rightsquigarrow$	$\mathbf{F}$
		$\neg\mathbf{F}$	$\rightsquigarrow$	$\mathbf{W}$
4.	Distributivgesetz	$\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$	$\rightsquigarrow$	$(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$
5.	Assoziativgesetze	$\varphi \vee (\psi \vee \chi)$	$\rightsquigarrow$	$\varphi \vee \psi \vee \chi$
		$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$	$\rightsquigarrow$	$\varphi \wedge \psi \wedge \chi$

Beispiel 3.34

$(X \wedge Y) \vee \neg(\neg Y \vee Z) \quad \rightsquigarrow \quad (X \vee Y) \wedge (Y \vee Y) \wedge (X \vee \neg Z) \wedge (Y \vee \neg Z)$

Übung: Konjunktive Normalform

Übung 3.35

Transformieren Sie die folgenden Formeln in KNF:

1. $(X \lor Y) \land (A \land B)$
2. $(X \lor Y) \rightarrow (A \lor B)$
3. $X \lor (\neg A \land \neg(B \land \neg C))$

Klauseln

Definition 3.36 (Klausel)

Eine Klausel ist eine als Menge geschriebene Disjunktion von Literalen.

Aufgrund von Idempotenz und Kommutativität ist es möglich und sinnvoll, Disjunktionen als Mengen zu betrachten.

Beispiel 3.37

$(X \vee \neg Y \vee Z) \quad \rightsquigarrow \quad \{X, \neg Y, Z\}$

Jede aussagenlogische Formel (in KNF) kann als Menge von Klauseln betrachtet werden.

Beispiel 3.38

$$\begin{aligned} \varphi &= (X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee Z) \wedge \neg Z \wedge \neg X \\ \mathcal{K}(\varphi) &= \{\{X, Y\}, \{\neg Y, Z\}, \{\neg Z\}, \{\neg X\}\} \end{aligned}$$

Intuitiv: $\wedge$ zwischen Klauseln; $\vee$ zwischen Literalen

Resolvente

Definition 3.39 (Resolvente)

Sei V eine Menge von Aussagenvariablen und $X \in V$.
Seien $C_1 = \{X, L_{11}, L_{12}, L_{13}, \ldots\}$ und $C_2 = \{\neg X, L_{21}, L_{22}, L_{23}, \ldots\}$ Klauseln, wobei alle L_i Literale über V sind.
Dann ist $C_3 = \{L_{11}, L_{12}, L_{13}, \ldots, L_{21}, L_{22}, L_{23}, \ldots\}$ eine Resolvente von C_1 und C_2 ($\{C_1, C_2\} \vdash C_3$).

Kann eine Klausel C aus einer Klauselmenge S durch (beliebig viele, einschließlich 0) Resolutionsschritte hergeleitet werden, schreiben wir $S \vdash^* C$.

Übung: Resolution

Übung 3.40

Finden Sie für die Klauselmenge S möglichst viele Resolventen.

$$S = \{\{A, C\}, \{A, \neg B\}, \{\neg A, \neg B\}, \{A, \neg C\}\}$$

Resolutions-Algorithmus für Aussagenlogik

Eingabe: AL-Formel φ
Ausgabe: „erfüllbar“ oder „unerfüllbar“

$\varphi' := \mathrm{knf}(\varphi)$
initialisiere S mit Disjunktionen von φ'
while es existieren $\{C_1, C_2\} \subseteq S$ mit $\{C_1, C_2\} \vdash C_{\mathrm{neu}}$ und $C_{\mathrm{neu}} \notin S$ **do**
    if $C_{\mathrm{neu}} = \square$ **then**
        return „unerfüllbar“
    else
        $S := S \cup \{C_{\mathrm{neu}}\}$
return „erfüllbar“

Korrektheit

Satz 3.41 (Korrektheit der Resolution)

Sei S eine Klauselmenge. Aus $S \vdash^* C$ folgt $S \models C$.

Beweis.

- Gilt $S \vdash C$, ist jedes Modell für S auch Modell für C.
- Mit Induktion: $S \vdash^* C$ impliziert $S \models C$. $\square$

Korollar 3.42

Wenn $S \vdash^* \square$ gilt, ist S unerfüllbar.

Beweis.

- Ist S erfüllbar, dann auch $S \cup \{C\}$.
- Umgekehrt: Ist $S \cup \{C\}$ unerfüllbar, dann auch S.
- Die leere Klausel $\square$ ist unerfüllbar. $\square$

Satz 3.43 (Widerlegungsvollständigkeit der Resolution)

Ist eine Klauselmenge S unerfüllbar, gilt $S \vdash^* \square$.

Beweis.

Induktion über Anzahl n der Aussagenvariablen in S.

$n = 0$ Dann gilt $S = \{\square\}$ und damit $S \vdash^* \square$.

$n \rightsquigarrow n+1$
- Sei S eine unerfüllbare Klauselmenge mit den Variablen $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$.
- Definiere S_1: Entferne aus S alle Klauseln, die das Literal A_{n+1} enthalten, und aus verbleibenden Klauseln alle Literale $\neg A_{n+1}$. (Intuitiv: $A_{n+1} \mapsto 1$) Definiere S_0: Entferne aus S alle Klauseln, die das Literal $\neg A_{n+1}$ enthalten, und aus verbleibenden Klauseln alle Literale A_{n+1}. (Intuitiv: $A_{n+1} \mapsto 0$)
- S_1 und S_0 sind unerfüllbar (sonst wäre auch S erfüllbar) und enthalten n Variablen.
- Induktionsvoraussetzung: $S_1 \vdash^* \square$ und $S_0 \vdash^* \square$.
- Aus $S_1 \vdash^* \square$ folgt $S \vdash^* \{\neg A_{n+1}\}$; aus $S_0 \vdash^* \square$ folgt $S \vdash^* \{A_{n+1}\}$.
- Durch Resolution von $\{A_{n+1}\}$ und $\{\neg A_{n+1}\}$ folgt $S \vdash^* \square$.

$\square$

Veranschaulichung des Beweises

Beispiel 3.44

Sei $S = \{\{A_1, A_2\}, \{\neg A_1\}, \{\neg A_2\}\}$

- $S_1 = \{\{\neg A_1\}, \square\}$
  - Aus $\square \in S_1$ folgt $S_1 \vdash^* \square$
- $S_0 = \{\{A_1\}, \{\neg A_1\}\}$
  - $S_0 \vdash^* \square$ folgt per Induktion:
  - $S_{01} = \{\square\}$; es folgt $S_0 \vdash^* \{\neg A_1\}$
  - $S_{00} = \{\square\}$; es folgt $S_0 \vdash^* \{A_1\}$
  - Durch Resolution aus $\{A_1\}$ und $\{\neg A_1\}$ folgt $S_0 \vdash^* \square$.
- $S \vdash^* \square$ folgt per Induktion:
  - Aus $S_0 \vdash^* \square$ folgt $S \vdash^* \{A_2\}$
  - Aus $S_1 \vdash^* \square$ folgt $S \vdash^* \{\neg A_2\}$
  - Durch Resolution aus $\{A_2\}$ und $\{\neg A_2\}$ folgt $S \vdash^* \square$.

Terminierung

Satz 3.45 (Terminierung der Resolution)

Der Resolutions-Algorithmus terminiert für jede Eingabe.

Beweis.

- Neue Klauseln enthalten nur Literale der Eingabe. (Endliches Vokabular)
- Nur neue Klauseln werden hinzugefügt.
- Klauseln werden nie entfernt. $\square$

Laufzeit: worst-case exponentiell (Formel der Länge $n \rightsquigarrow 2^n$ Schritte)

Übersetzung natürlicher Sprache in Aussagenlogik

Prämissen:

1. Wenn Hans zum Meeting eingeladen wird und nicht auf Dienstreise ist, nimmt er am Meeting teil. $\neg R \land E \to M \quad \rightsquigarrow \quad R \lor \neg E \lor M$
2. Wenn der Chef Hans beim Meeting sehen will, lädt er ihn auch ein. $C \to E \quad \rightsquigarrow \quad \neg C \lor E$
3. Wenn der Chef Hans nicht beim Meeting sehen will, wird Hans bald gekündigt. $\neg C \to K \quad \rightsquigarrow \quad C \lor K$
4. Hans hat nicht am Meeting teilgenommen. $\neg M$
5. Hans ist nicht auf einer Dienstreise. $\neg R$

Konklusion:

6. Hans wird bald gekündigt. K

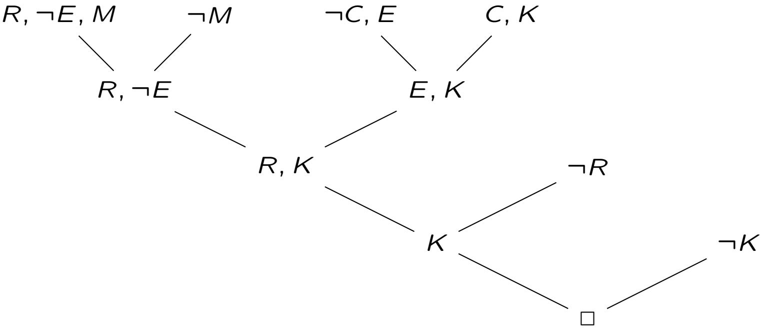
Logische Implikation und Erfüllbarkeit

- Implizieren die Prämissen 1–5 die Konklusion 6?
  - Logisch: Ist jedes Modell von 1–5 auch ein Modell von 6?
    $1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4 \wedge 5 \models 6$?
- Umgekehrt: Existiert ein Modell von 1–5, im dem 6 nicht gilt?
  - Logisch: Ist $1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4 \wedge 5 \wedge \neg 6$ erfüllbar?
    Wenn ja, gilt die Implikation nicht.
  - Ist $1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4 \wedge 5 \wedge \neg 6$ unerfüllbar, gilt die Implikation.
- Teste mittels Resolution die Erfüllbarkeit von

$$\{\{R, \neg E, M\}, \{\neg C, E\}, \{C, K\}, \{\neg M\}, \{\neg R\}, \{\neg K\}\}$$

Bestimmung des Schicksals von Hans durch Resolution

$$\{\{R, \neg E, M\}, \{\neg C, E\}, \{C, K\}, \{\neg M\}, \{\neg R\}, \{\neg K\}\}$$



Die Folgerung gilt, d. h. Hans wird leider entlassen...

Test mit Wahrheitstabelle

R	E	M	C	K	1 $(R, \neg E, M)$	2 $(\neg C, E)$	3 (C, K)	4 $(\neg M)$	5 $(\neg R)$	6 (K)	$1 \wedge \ldots \wedge 5 \wedge \neg 6$
0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
		$\vdots$					$\vdots$				$\vdots$
1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
		$\vdots$					$\vdots$				$\vdots$
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0

- Die einzige Interpretation, die die Klauseln 1–5 wahr macht (Zeile 2), macht auch Klausel 6 wahr.
- Die letzte Spalte ist immer 0.
- Die Konklusion folgt aus den Prämissen.

Resolution und Nichtdeterminismus

Wenn mehrere Resolventen möglich sind:

- Nicht jeder Weg ist gleich schnell
- ... aber alle Wege führen zum Ziel.

Definition 3.46 (Don't-care-Nichtdeterminismus)

Ein Algorithmus heißt don't-care-nichtdeterministisch, wenn jede von mehreren möglichen nichtdeterministischen Entscheidungen zum korrekten Ergebnis führt.

In don't-care-nichtdeterministischen Algorithmen müssen einmal getroffene Entscheidungen nie rückgängig gemacht werden (Backtracking).

Optimierung des Resolutionsverfahrens

Auswahl der Elternklauseln ist entscheidend für Effizienz

Optimierungen:

- Ignoriere Tautologien $\{X, \neg X, \dots\}$
- Ignoriere C_1, wenn ein $C_2 \subset C_1$ existiert

Heuristiken:

- Priorisiere kleine Klauseln
- Priorisiere Klauseln mit hoher Ableitungstiefe $\rightsquigarrow$ Depth-first-Suche

Einschränkung auf Spezialfälle, z. B. Horn-Formeln

- Horn-Klausel: Höchstens ein positives Literal
- Horn-Regel: $X \wedge Y \wedge Z \wedge \dots \rightarrow W$
- nützlich für Regel-basiertes Schließen (Prolog)
- Laufzeit: quadratisch (n^2 Schritte)
    - mit optimierten Datenstrukturen: linear (n Schritte)

Übung: Resolutions-Algorithmus

Übung 3.47

Für einen Juwelenraub gibt es genau drei Verdächtige: Anna, Bert und Claus. Über sie ist das Folgende bekannt (Prämissen):

1. Mindestens einer der Verdächtigen ist schuldig.
2. Wenn Anna schuldig ist, hatte sie genau einen der Verdächtigen als Komplizen.
3. Wenn Bert unschuldig ist, dann auch Claus.
4. Wenn genau zwei Verdächtige schuldig sind, ist Claus einer von ihnen.
5. Wenn Claus unschuldig ist, ist Anna schuldig.

Inspektor Craig vermutet (Konklusion):

6. Bert und Claus sind schuldig.

a. Formalisieren Sie die Aussagen in Aussagenlogik und bilden Sie die Konjunktion von Prämissen und Negation der Konklusion.
b. Transformieren Sie die sich ergebende Formel in die KNF.
c. Testen Sie durch Resolution, ob die Konklusion aus den Prämissen folgt.

Inhalt

- Erfüllbarkeitstest für aussagenlogische Formeln
- Evert Willem Beth: *Semantic entailment and formal derivability* (1955)

E. W. Beth
(1908–1964)

Anderer Ansatz für Erfüllbarkeitstest

Resolution: suche einen Widerspruch

Tableau: suche ein Modell

- erzeugt Tabellen-artige Struktur, bei der Spalten aufgeteilt werden $\rightsquigarrow$ „Tableau“
- andere Sichtweise: Baumstruktur

Merkmale von Tableau-Algorithmen

- Jede Spalte n steht für eine Interpretation $\mathcal{I}_n$
- Jede Zeile einer Spalte enthält eine Formel, die $\mathcal{I}_n$ erfüllen muss
- Beginne mit der Ausgangsformel χ und einer Spalte
- Regeln brechen komplexe Formeln auf einfachere herunter
  „Wenn $\varphi \wedge \psi$ vorhanden ist, aber nicht φ und ψ, füge φ und ψ hinzu."
  - Bei mehreren Möglichkeiten: Teile Spalte auf
- Clash beschreibt Situation, in denen ein Widerspruch vorliegt
  „φ und $\neg\varphi$ sind vorhanden."
  - Clashes gibt es zwischen Formeln in der aktuellen Spalte und den darüberliegenden
- Ergebnis:
  - Wenn jede Spalte einen Clash enthält, gibt es kein Modell
    $\rightsquigarrow$ χ ist unerfüllbar
  - Wenn keine Regel mehr anwendbar ist (Tableau ist vollständig) und mindestens eine Spalte Clash-frei ist, gibt es ein Modell
    $\rightsquigarrow$ χ ist erfüllbar

Vorbedingung „Wenn $\varphi \wedge \psi$ vorhanden ist. . .“
- Welche Formel ist zu verarbeiten?

Anwendbarkeitsbedingung „. . . aber nicht φ und ψ, . . .“
- Wann ist Regel nicht mehr anwendbar? ($\rightsquigarrow$ Terminierung)
- bezieht sich auf aktuelle Spalte und darüberliegende

Nachbedingung „. . . füge φ und ψ hinzu.“
- Wie ist Formel zu verarbeiten?

Regeln können nicht-deterministisch sein:

- „Wenn $\varphi \vee \psi$ enthalten ist. . . , füge φ oder ψ hinzu“
- Teile aktuelle Spalte, teste φ in einer Spalte, ψ in der anderen

Tableau-Regeln und Negations-Normalform

Definition 3.48 (Negations-Normalform)

Eine aussagenlogische Formel ist in Negations-Normalform (NNF) wenn als binäre Junktoren nur $\wedge$ und $\vee$ enthalten sind und Negation nur direkt vor Aussagenvariablen vorkommt.

Satz 3.49

Jede AL-Formel kann in NNF transformiert werden.

Beweis.

Verfahren:

1. Elimination von $\leftrightarrow$ und $\rightarrow$
2. Anwendung der Gesetze von De Morgan
3. Entfernung doppelter Negation

(Wie für KNF.) $\square$

Tableau-Algorithmus für Aussagenlogik

$\wedge$-Regel Wenn es ein S_i gibt mit $\varphi \wedge \psi \in S_i$
und $\{\varphi, \psi\} \not\subseteq S_i$
dann $S_i := S_i \cup \{\varphi, \psi\}$

$\vee$-Regel Wenn es ein S_i gibt mit $\varphi \vee \psi \in S_i$
und $\{\varphi, \psi\} \cap S_i = \emptyset$
dann $S_i := S_i \cup \{\varphi\}$ und $S_{\text{neu}} := S_i \cup \{\psi\}$

Eingabe: AL-Formel φ
Ausgabe: „erfüllbar“ oder „unerfüllbar“

$\varphi' := \text{nnf}(\varphi)$
initialisiere S_0 mit $\{\varphi'\}$
while eine Regel R ist auf ein $\psi \in S_i$ anwendbar **do**
    wende R auf ψ an
if jedes S_i enthält einen Clash **then**
    return „unerfüllbar“
else
    return „erfüllbar“

Beispiel: Bestimmung des Schicksals von Hans mit Tableau

Prämissen: $(R \lor \neg E \lor M) \land (\neg C \lor E) \land (C \lor K) \land \neg M \land \neg R$
Konklusion: K

<table>
<tr><th>Zeile</th><th colspan="5"></th><th>Regel</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="5">$(R \lor \neg E \lor M) \land (\neg C \lor E) \land (C \lor K) \land \neg M \land \neg R \land \neg K$</td><td>Eingabe</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="5">$R \lor \neg E \lor M$</td><td>1: $\land$</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="5">$\neg C \lor E$</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="5">$C \lor K$</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="5">$\neg M$</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="5">$\neg R$</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td colspan="5">$\neg K$</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td colspan="4">C</td><td>$K \lightning 7$</td><td>4: $\lor$</td></tr>
<tr><td>9</td><td>$\neg C \lightning 8$</td><td colspan="3">E</td><td></td><td>3: $\lor$</td></tr>
<tr><td>10</td><td></td><td>$R \lightning 6$</td><td>$\neg E \lightning 9$</td><td>$M \lightning 5$</td><td></td><td>2: $\lor$</td></tr>
</table>

Jede Spalte enthält einen Clash
$\rightsquigarrow$ Formel $1 \land 2 \land 3 \land 4 \land 5 \land \neg 6$ ist unerfüllbar
$\rightsquigarrow$ Prämissen 1–5 implizieren die Konklusion 6

Durchführung des Tableau-Algorithmus

- Vorrang beachten: Formeln von „außen“ nach „innen“ abarbeiten
- Clash: nur zwischen aktueller Spalte und den darüberliegenden
  - Spalte steht logisch für Menge aller Formeln, die in ihr und den darüberliegenden Spalten enthalten sind
- Effizienz: Wenn mehrere Regeln anwendbar sind: $\wedge$-Regel zuerst
  - sonst: $\wedge$-Regel in jeder neuen Spalte anwendbar $\rightsquigarrow$ Ineffizienz
  - Beispiel: $\{A \wedge B, \neg C \wedge \neg D, \neg A \vee \neg B \vee C \vee D\}$
- Effizienz: $\vee$-Regel so anwenden, dass möglichst wenig offene Spalten verbleiben
  - Beispiel: $\{\neg A, A \vee B, C \vee D\} \quad \rightsquigarrow \quad$ zuerst $A \vee B$
- Transformation von NNF in KNF ist kontraproduktiv
  - nach erstem Schritt wird nur $\vee$-Regel angewendet $\rightsquigarrow$ Ineffizienz
  - Beispiel: vergleiche NNF $\neg A \vee B \wedge \neg C \vee \neg B \wedge C$ (3 Spalten)
    mit KNF $(\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$ (7 Spalten)

Übung: Tableau-Algorithmus

Übung 3.50

Zeigen Sie mit einem Tableau, dass Bert und Claus schuldig sind.

$$(A \vee B \vee C) \quad \wedge \quad (\neg A \vee (B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C)) \quad \wedge$$
$$(B \vee \neg C) \quad \wedge \quad (\neg A \vee \neg B \vee C) \quad \wedge \quad (C \vee A) \quad \wedge \quad (\neg B \vee \neg C)$$

Korrektheit des Tableau-Algorithmus

Satz 3.51 (Korrektheit)

Wenn das vollständige Tableau für φ eine Clash-freie Spalte enthält, ist φ erfüllbar.

Beweis.

Idee: Literale der Clash-freien Spalte S bilden ein Modell $\mathcal{M}$.

- Für alle Variablen X: Wenn $X \in S$, dann $X^{\mathcal{M}} = 1$; sonst $X^{\mathcal{M}} = 0$
  - $\rightsquigarrow$ Jede allein vorkommende Variable wird wahr.
- Clash-frei: für keine Variable X ist X und $\neg X$ enthalten
  - $\rightsquigarrow$ Jedes allein vorkommende negierte Literal wird wahr.
- Vollständig:
  - für jede Konjunktion $\chi \wedge \psi \in S$ gilt auch $\{\chi, \psi\} \subseteq S$
  - für jede Disjunktion $\chi \vee \psi \in S$ gilt auch $\{\chi, \psi\} \cap S \neq \emptyset$
- Induktion: Für jedes $\psi \in S$ gilt: $\mathcal{M} \models \psi$ □

Vollständigkeit des Tableau-Algorithmus

Satz 3.52 (Vollständigkeit)

Wenn φ erfüllbar ist, enthält das vollständige Tableau für φ eine Clash-freie Spalte.

Beweis.

Idee: „Regelanwendung erhält Erfüllbarkeit.“
Wenn eine Formelmenge S vor Regelanwendung erfüllbar war, kann die Regel so angewendet werden, dass S auch nach der Anwendung noch erfüllbar ist.

- **$\wedge$-Regel** Wenn $\mathcal{M} \models \psi \wedge \chi$ gilt, gilt auch $\mathcal{M} \models \psi$ und $\mathcal{M} \models \chi$.
- **$\vee$-Regel** Wenn $\mathcal{M} \models \psi \vee \chi$ gilt, gilt auch $\mathcal{M} \models \psi$ oder $\mathcal{M} \models \chi$.

Erfüllbare Mengen enthalten keinen Clash. $\square$

Definition 3.53 (Teilformel)

Sei φ eine aussagenlogische Formel.
Die Formel ψ ist Teilformel von φ, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- $\varphi = \psi$
- $\varphi = \neg\chi$ und ψ ist Teilformel von χ
- $\varphi = \chi_1 \circ \chi_2$ und ψ ist Teilformel von χ_1 oder χ_2 (mit $\circ \in \{\land, \lor, \rightarrow, \leftrightarrow\}$)

Beispiel 3.54 ($\varphi = A \land \neg(B \lor \neg A) \lor (A \rightarrow \neg C)$)

Die Menge der Teilformeln von φ ist
$\{\varphi, A \land \neg(B \lor \neg A), A \rightarrow \neg C, A, \neg(B \lor \neg A), B \lor \neg A, B, \neg A, \neg C, C\}$.

Terminierung des Tableau-Algorithmus

Satz 3.55 (Terminierung)

Der Tableau-Algorithmus terminiert für jede Formel φ nach endlich vielen Schritten.

Beweis.

- Es gibt nur endlich viele Teilformeln von $\mathrm{nnf}(\varphi)$, also ein endliches Vokabular.
- Jede Regelanwendung fügt nur Teilformeln zur Formelmenge hinzu.
- Auf jede Teilformel wird in jeder Spalte höchstens einmal eine Regel angewendet.
- Die Anzahl der Spalten ist beschränkt durch die Anzahl der Disjunktionen in $\mathrm{nnf}(\varphi)$.
- Formeln werden nie entfernt. $\square$

Tableaus und Nichtdeterminismus

- sind mehrere Regeln anwendbar, ist die Auswahl der nächsten Regel don't-care-nichtdeterministisch
  - Jede Auswahl führt zur Lösung
- die Auswahl der Alternative durch die $\vee$-Regel ist don't-know-nichtdeterministisch
  - Finden der Lösung kann von „richtiger" Alternative abhängen
  - Jede Alternative muss getestet werden

Tableaus in der Praxis

- Anzahl der Spalten kann exponentiell in der Größe von φ sein
  - Beispiel: $\varphi = (A \vee B) \wedge (C \vee D) \wedge (E \vee F)$
- Für Zeit- und Platz-Effizienz: Erzeuge Tableau depth-first
  - Halte nur eine Spalte gleichzeitig im Speicher
  - Wende dort alle möglichen Regeln an
  - Spalte ist Clash-frei und vollständig: Ausgabe „erfüllbar“
  - Spalte enthält Clash: Versuche nächste Spalte (oder Ausgabe „unerfüllbar“)
- Overhead: Backtracking-Information for jede Anwendung der $\vee$-Regel
  - aus Effizienzgründen auch hier zuerst $\wedge$-Regel anwenden

Vergleich: Tableaus und Resolution

Gemeinsamkeiten

- Erfüllbarkeitstests
- Können auch Gültigkeit und Implikation testen
- Entscheidungsverfahren
- Effizienter als Wahrheitstabelle

Vorteile von Tableaus

- Effizient für erfüllbare Eingaben
- Erzeugt Modell für erfüllbare Eingaben

Vorteile der Resolution

- Effizient für unerfüllbare Eingaben
- Gesamtes Verfahren ist don't-care-nichtdeterministisch (kein Backtracking)

Zusammenfassung: Aussagenlogik

Aussagenvariable	repräsentiert Elementaraussage kann wahr oder falsch sein
Junktoren	verbinden Aussagenvariablen zu komplexen Formeln Auswertung über Wahrheitstabelle
Interpretation	belegt Variablen mit 0 oder 1 macht Formel wahr oder falsch
Modell	macht Formel wahr
Erfüllbar	es gibt ein Modell
Gültig	jede Interpretation ist Modell (Tautologie)
Schlussfolgerung	Erfüllbarkeit, Gültigkeit, Implikation entscheidbar (korrekt, vollständig, terminierend)

Resolution	sucht Widerspruch KNF, Klausel, Resolvente
Tableau	sucht Modell NNF, Regel, Clash

Inhalt

Grenzen der Aussagenlogik

- Aussagenlogik kann Aussagen nur als Ganzes beschreiben
- Aussagenvariablen können nur wahr oder falsch sein
- Innere Struktur der Aussagen kann nicht repräsentiert werden

Beispiel 4.1

- Innere Struktur von Aussagen

„Anna kennt Bert und Anna kennt die Mutter von Bert.“	$\leadsto$	$X \land Y$
„Anna kennt Bert und Anna mag Bert.“	$\leadsto$	$X \land Y$
„Anna kennt Bert und Claus kennt Bert.“	$\leadsto$	$X \land Y$

- Schlussfolgerung

Prämissen:	„Tux ist ein Pinguin.“	$\leadsto$	A
	„Kein Pinguin kann fliegen.“	$\leadsto$	$\neg B$
	„Alle Pinguine sind Vögel.“	$\leadsto$	C
Konklusion:	„Manche Vögel können nicht fliegen.“	$\leadsto$	D

  - Formalisierung zu grob: kann inneren Aufbau der Elementaraussagen nicht abbilden
  - Zusammenhänge werden nicht klar („kann fliegen“, „Pinguin“, „Vogel“)
  - Konklusion folgt nicht aus Prämissen: $A \land \neg B \land C \land \neg D$ ist erfüllbar

Beschreibung der inneren Struktur von Aussagen

Konstantensymbole	einzelne Individuen
Prädikate	Beziehungen zwischen Individuen
Funktionssymbole	Abbildungen von Individuen auf Individuen

Beispiel 4.2

„Anna kennt Bert und Anna kennt die Mutter von Bert.“	$\rightsquigarrow$	$K(a,b) \wedge K(a,m(b))$
„Anna kennt Bert und Anna mag Bert.“	$\rightsquigarrow$	$K(a,b) \wedge M(a,b)$
„Anna kennt Bert und Claus kennt Bert.“	$\rightsquigarrow$	$K(a,b) \wedge K(c,b)$
„Tux ist ein Pinguin.“	$\rightsquigarrow$	$P(t)$
„Kein Pinguin kann fliegen.“	$\rightsquigarrow$	$\forall x(P(x) \to \neg F(x))$
„Alle Pinguine sind Vögel.“	$\rightsquigarrow$	$\forall x(P(x) \to V(x))$
„Manche Vögel können nicht fliegen.“	$\rightsquigarrow$	$\exists x(V(x) \wedge \neg F(x))$

Inhalt

Definition 4.3 (Kartesisches Produkt)

Das kartesische Produkt ($M_1 \times M_2$) zweier Mengen M_1 und M_2 ist die Menge $\{(x, y) \mid x \in M_1, y \in M_2\}$.

- $M_1 \times M_2$ ist eine Menge von Paaren oder 2-Tupeln
- Verallgemeinerung:
  $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in M_i\}$
  ist eine Menge von n-Tupeln

René Descartes
(1596–1650)

Beispiel 4.4

$M_1 = \{1, 2, 3\}$, $M_2 = \{\text{a}, \text{b}\}$

- $M_1 \times M_2 = \{(1, \text{a}), (2, \text{a}), (3, \text{a}), (1, \text{b}), (2, \text{b}), (3, \text{b})\}$
- $M_2 \times M_1 = ?$
- $M_1 \times M_1 = ?$

Übung 4.5

Sei $M_1 = \{1, 3, 5, 7\}$, $M_2 = \{2, 4, 6\}$.

Berechnen Sie:

1. $M_1 \times M_1$
2. $M_1 \times M_2$
3. $M_2 \times M_1$

Definition 4.6 (Relation)

Seien $M_1, M_2, \ldots, M_n$ Mengen. Eine (n-stellige) Relation R über $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts der Mengen, also $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$.

Notation: Statt $(x, y) \in R$ schreibt man oft $R(x, y)$

Beispiel 4.7

- M_1 = {Müller, Mayer, Schulze, Schmidt, Becker} (z. B. Menschen)
- M_2 = {Logik, LA, BWL, Digitaltechnik, PM} (z. B. Kurse)
- Belegt = {(Müller, Logik), (Müller, BWL), (Müller, Digitaltechnik), (Mayer, BWL), (Mayer, PM), (Schulze, LA), (Schulze, Digitaltechnik), (Schmidt, PM)}
- Welche Kurse hat Mayer / Schmidt belegt?

Übung: Relationen

Übung 4.8

Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine möglichst interessante Relation aus dem realen Leben und aus der Mathematik an.

- Welche Mengen sind beteiligt?
- Welche Elemente stehen in Relation?

Definition 4.9 (Homogenität)

Sei R eine Relation über $M_1, M_2, \ldots, M_n$. R heißt homogen, falls $M_i = M_j$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt.

- Wenn R homogen ist, so nennen wir R auch eine n-stellige Relation über M.
- Eine n-stellige Relation $R^{(n)}$ über einer Menge M ist
  - eine Teilmenge von $M^n = \underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{n\text{-mal}}$
  - eine Menge von n-Tupeln von Elementen aus M

Beispiele für homogene Relationen

Beispiel 4.10

- Einstellige (unäre) Relationen sind Teilmengen von M
  - $P_{\mathbb{N}}^{(1)} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$ über $\mathbb{N}$
- Zweistellige (binäre) Relationen bestehen aus Paaren
  - $T_{\mathbb{N}}^{(2)} = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), \ldots, (3, 3), (3, 6), (3, 9), \ldots\}$ über $\mathbb{N}$
  - $<_{\mathbb{N}}^{(2)} = \{(0, 1), (0, 2), \ldots, (1, 2), (1, 3), \ldots\}$ über $\mathbb{N}$
  - Bei binären Relationen schreiben wir oft xRy statt $R(x, y)$.
    (z. B. $1 <_{\mathbb{N}} 2$ statt $<_{\mathbb{N}} (1, 2)$ oder $(1, 2) \in <_{\mathbb{N}}$)
- Nullstellige Relationen sind leer oder enthalten das leere Tupel ()
  - die einzigen nullstelligen Relation über jeder Menge sind
    $\mathbf{F}^{(0)} = \{\}$ und $\mathbf{W}^{(0)} = \{()\}$

Beispiel 4.11

- $=_{\mathbb{N}} \; = \{(0,0),(1,1),(2,2),\ldots\}$
- $<_{\mathbb{Z}} \; = \{(i, i+j) \mid i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}^{\geq 1}\}$
- $\neq_N$ mit $N = \{w \mid w$ ist ein Nachname$\}$
  - {(Müller, Mayer), (Müller, Schulze), (Mayer, Schulze), (Mayer, Müller), (Schulze, Mayer), (Schulze, Müller)} $\subseteq \; \neq_N$

Definition 4.12 (linkstotal, rechtseindeutig)

Sei R eine binäre Relation über M und N.

- Gibt es für jedes $x \in M$ ein $y \in N$ mit $R(x, y)$, so heißt R linkstotal.
- Gilt für alle $x \in M$ und $y, z \in N$, dass aus $R(x, y)$ und $R(x, z)$ folgt, dass auch $y = z$ gilt, so heißt R rechtseindeutig.

- Linkstotal: Jedes Element aus M steht mit mindestens einem Element aus N in Relation.
- Rechtseindeutig: Jedes Element aus M steht mit höchstens einem Element aus N in Relation.

Definition 4.13 (Funktion)

Seien M, N Mengen.

- Eine partielle Funktion $f : M \to N$ ist eine Relation $f \subseteq (M \times N)$, die rechtseindeutig ist.
- Eine (totale) Funktion $f : M \to N$ ist eine Relation $f \subseteq (M \times N)$, die linkstotal und rechtseindeutig ist.
- M heißt Definitionsmenge von f.
- N heißt Zielmenge von f.

Eine Funktion (auch: Abbildung) ordnet (jedem) Element der Definitionsmenge höchstens ein Element der Zielmenge zu.

Notation

Definition 4.14 (Notation von Funktionen)

Funktionen können mit der folgenden Schreibweise angegeben werden:

$$\text{Funktionssymbol} : \text{Definitionsmenge} \to \text{Zielmenge} \ ; \text{Zuordnungsvorschrift}$$

Man schreibt dann auch $f(x) = y$ statt $(x, y) \in f$ oder xfy.
Für endliche Definitionsmengen kann man eine Funktion als Menge der einzelnen Zuordnungen angeben.

Beispiel 4.15

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; x \mapsto x^2$
- $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}; x \mapsto |x|$
- $h : \{A, B, C\} \to \mathbb{B}; \{A \mapsto 1, B \mapsto 0, C \mapsto 1\}$

Definition 4.16 (n-stellige Funktion auf einer Menge)

Sei M eine Menge.
Eine Funktion $f : M^n \to M$ heißt n-stellige Funktion oder Operation auf M.

Beispiel 4.17

- $+_{\mathbb{N}}$, die Addition der natürlichen Zahlen, ist eine zweistellige Operation auf $\mathbb{N}$.
  Z. B.: $(2, 3) \mapsto 5$
- $!_{\mathbb{N}}$, die Fakultät der natürlichen Zahlen, ist eine einstellige Operation auf $\mathbb{N}$.
  Z. B.: $4 \mapsto 24$

Nullstellige Funktionen

- Funktion $f : M^0 \to M$
- $M^0 = \{()\}$
- Definitionsmenge hat nur ein Element
- f ist durch $f(())$ eindeutig festgelegt
- Nullstellige Funktionen beschreiben Konstanten!

Beispiel 4.18

- $c : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}; () \mapsto 5$ ist die Konstante 5
- Für die Menge aller Menschen M bezeichnet $d : M^0 \to M; () \mapsto \text{Kurt Gödel}$ den einzelnen Menschen Kurt Gödel.

Funktionssymbol Zeichen, z. B. „$+$“
zugeordnete Stelligkeit: „$+^{(2)}$“
„$x +^{(2)} y$“ ist korrekter Ausdruck, „$x +^{(2)}$ “ nicht
wenn Stelligkeit klar ist, wird sie oft nicht angegeben
auch: Operator

Funktion Mathematisches Konstrukt
z. B. $+_{\mathbb{N}}$: Abbildung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (zweistellig)
auch: Operation

Achtung

Dasselbe Funktionssymbol kann für verschiedene Trägermengen durch unterschiedliche Funktionen interpretiert werden!

Funktionen und Funktionssymbole

Beispiel 4.19 (Symbol „$\cdot^{(2)}$“)

- Funktion $\cdot_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; $(x, y) \mapsto x \cdot y$ (Multiplikation)
  z. B. $2 \cdot_{\mathbb{N}} 3 = 6$
- Funktion $\cdot_S : S \times S \to S$; $(x, y) \mapsto xy$ (Konkatenation)
  S: Menge der Strings über $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \ldots, \mathtt{z}\}$
  z. B. $\mathtt{ab} \cdot_S \mathtt{bc} = \mathtt{abbc}$

Analogie aus der OO-Programmierung: Überladen von Operatoren

- ein Symbol „+“
- unterschiedliche Funktionen je nach Typ der Objekte
  - Integer-Addition
  - Matrix-Addition
  - Vereinigung von Mengen
  - ...

Signaturen

Analog unterscheidet man Relationen und Prädikate:

Prädikat Zeichen „$<$“
Stelligkeit $<^{(2)}$
$3 < 4$ ist korrekter Ausdruck

Relation $<_{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Definition 4.20 (Signatur)

Eine Signatur ist ein Paar (F, P), wobei

- F eine Menge von Funktionssymbolen ist,
- P eine Menge von Prädikaten ist,
- jedem Element von $F \cup P$ eine Stelligkeit zugeordnet ist.

Beispiel 4.21

- $(\{+^{(2)}, \cdot^{(2)}, 0^{(0)}, 1^{(0)}\}, \{\})$ ist die Signatur der Arithmetik
- $(\{+^{(2)}, \cdot^{(2)}, 0^{(0)}, 1^{(0)}\}, \{\leq^{(2)}\})$ ist die Signatur der geordneten Arithmetik
- $(\{\}, \{E^{(2)}\})$ ist die Signatur der Graphen

Definition 4.22 (Struktur)

Sei $\Sigma = (F, P)$ eine Signatur. Eine Σ-Struktur $\mathcal{A}$ besteht aus

- einer nichtleeren Menge A,
- einer n-stelligen Funktion $f_{\mathcal{A}} : A^n \to A$ für jedes n-stellige Funktionssymbol $f \in F$,
- einer n-stelligen Relation $S_{\mathcal{A}} \subseteq A^n$ für jedes n-stellige Prädikat $S \in P$.

Beispiel 4.23 (Strukturen mit Signatur der Arithmetik)

- $(\mathbb{N}, +_{\mathbb{N}}, \cdot_{\mathbb{N}}, 0_{\mathbb{N}}, 1_{\mathbb{N}})$
- $(\mathbb{N}^{2\times 2}, +_M, \cdot_M, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}),$
  wobei $+_M$ und $\cdot_M$ als Matrizen-Addition und -Multiplikation definiert sind
- $(\mathbb{B}, +_{\mathbb{B}}, \cdot_{\mathbb{B}}, 0_{\mathbb{B}}, 1_{\mathbb{B}})$ mit $\mathbb{B} = \{0_{\mathbb{B}}, 1_{\mathbb{B}}\}$ und $\begin{array}{c|cc} +_{\mathbb{B}} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$, $\begin{array}{c|cc} \cdot_{\mathbb{B}} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$

Algebraische Strukturen

- Das Gebiet der Algebra beschäftigt sich mit den Eigenschaften von Rechenoperationen
- Eine Algebraische Struktur (kurz: Algebra) hat eine funktionale Signatur.

Beispiel 4.24 (Bekannte algebraische Strukturen)

- $(\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}}^{(2)}, 0_{\mathbb{Z}}^{(0)}, -_{\mathbb{Z}}^{(1)})$ ist eine Gruppe
- $(\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}}^{(2)}, 0_{\mathbb{Z}}^{(0)}, -_{\mathbb{Z}}^{(1)}, \cdot_{\mathbb{Z}}^{(2)})$ ist ein Ring

Zusammenfassung: Relationen und Funktionen

Relation	Menge von Tupeln
Funktion	Abbildung von Tupeln auf Elemente
Signatur	Funktionssymbole und Prädikate mit fester Stelligkeit
Struktur	Menge mit entsprechenden Funktionen und Relationen

Inhalt

Konstruktor	Notation	reale Welt	Mathematik
Variablen	x, y	(Menschen)	(Zahlen)
Konstantensymbole	a, b, c	calvin, hobbes, mom, dad	$1, 2, \pi$
Funktionssymbole	$f(x), h(x, y)$	mutter(calvin), ehepartner(mom)	$x + y, \sqrt{x}$, $\log_b x$
Prädikate (Relationssymbole)	$R(x), S(x, y)$	Sohn(mom,calvin), Freund(calvin,hobbes)	$x > y, x = y$, Prim(x)
Quantoren	$\forall x P(x)$, $\exists y S(x, y)$	$\forall x$(Freund(x, hobbes)) $\exists x$(Freund(calvin, x))	$\forall x(x \geq 0)$ $\exists x(x + x = 2)$
Junktoren	$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$		

Erinnerung: Stelligkeit von Funktionssymbolen

- Ein n-stelliges Funktionssymbol hat genau n Argumente
- $+$ und log sind zweistellig (binär) ($x + y, \log_b x$)
- $\sqrt{}$ ist einstellig (unär) ($\sqrt{x}$)
- mutter() und ehepartner() sind einstellig
- nullstellige Funktionssymbole sind Konstantensymbole
- Notation (falls notwendig): $f^{(n)}$

Terme

Aus Variablen und Funktionssymbolen (einschließlich Konstantensymbolen) sind Terme zusammengesetzt.

Definition 4.25 (Term)

Terme sind wie folgt induktiv definiert:

- Jede Variable ist ein Term.
- Wenn f ein n-stelliges Funktionssymbol ist und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind, ist auch $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term.

Terme, die keine Variablen enthalten, heißen auch Grundterme.

Beachte:

- Jede Konstante ist ein Term.
- Terme bezeichnen Elemente der Domäne.

Beispiele: Terme

- Variablen: $\{x, y\}$
- Funktionssymbole: $\{c^{(0)}, d^{(0)}, f^{(1)}, +^{(2)}\}$

Beispiel 4.26 (Grundterme)

- c
- $f(f(d))$
- $c + f(c)$ oder $+(c, f(c))$
- $+(c, +(d, +(f(c), f(d))))$

Beispiel 4.27 (Terme, die keine Grundterme sind)

- x
- $f(y)$
- $c + f(y)$
- $+(c, +(y, +(f(x), f(y))))$

Stelligkeit von Prädikaten

- Ein n-stelliges Prädikat hat genau n Terme als Argumente.
  - Keine Prädikate in Prädikaten!
- $>$ ist zweistellig ($x > y$)
- Prim() is einstellig (Prim(x)).
- Sohn() und Freund() sind zweistellig.

Atome

Aus Prädikaten und Termen sind Atome zusammengesetzt.

Definition 4.28 (Atom)

Atome sind wie folgt definiert:

- Wenn R ein n-stelliges Prädikat ist und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind, ist $R(t_1, \ldots, t_n)$ ein Atom.

Atome, die keine Variablen enthalten, heißen auch Grundatome.

- Jedes nullstellige Prädikat ist ein Atom.
  - Nullstellige Prädikate sind Aussagenvariablen.
- Atome repräsentieren Elementaraussagen (sind wahr oder falsch).

Beispiele: Atome

- Prädikate: $\{A^{(0)}, P^{(1)}, >^{(2)}\}$

Beispiel 4.29 (Grundatome)

- $P(c)$
- $c > f(c)$ oder $> (c, f(c))$
- $c > c$
- $P(c + f(c))$
- A

Beispiel 4.30 (Atome, die keine Grundatome sind)

- $x > y$
- $f(y) > c + f(x)$
- $P(f(c + y))$

Aus Atomen, Quantoren und Junktoren sind (komplexe) Formeln zusammengesetzt.

Definition 4.31 (Prädikatenlogische Formel)

Formeln sind wie folgt induktiv definiert:

- Jedes Atom ist eine Formel.
- Wenn φ und ψ Formeln sind und x eine Variable ist, sind auch die folgenden Ausdrücke Formeln:
  - $(\neg\varphi)$, **W**, **F**
  - $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$
  - $(\forall x \varphi)$, $(\exists x \varphi)$

Freie und gebundene Variablen

- Allquantor $\forall$: $\forall x \varphi$
- Existenzquantor $\exists$: $\exists x \varphi$

Die Formel φ steht im Gültigkeitsbereich (Scope) des Quantors.
Der Quantor bindet die freien Vorkommen von x in φ.

Definition 4.32 (frei, gebunden)

- Eine Variable, die in einer quantorenfreien Formel φ vorkommt, ist frei.
- In einer Formel $(\forall x \varphi)$ oder $(\exists x \varphi)$ bindet der Quantor die freien Vorkommen von x in φ (so dass diese Vorkommen nicht mehr frei sind).
- Eine Formel mit freien Variablen heißt offen.
- Eine Formel ohne freie Variablen heißt geschlossen (oder auch Satz).

- Quantor bindet nur Vorkommen einer Variable, nicht Variable selbst.
- In $P(x) \wedge \forall x Q(x)$ kommt x sowohl frei als auch gebunden vor.

Vorrang der Operatoren

$$f \gg P \gg \forall, \exists \gg \neg \gg \wedge \gg \vee \gg \rightarrow \gg \leftrightarrow$$

- Funktionssymbole binden stärker als Prädikate
  - $x + y > c + d$ bedeutet $(x + y) > (c + d)$
- Prädikate binden stärker als Quantoren
  - $\forall x \forall y x + y = y + x$ bedeutet $\forall x \forall y (x + y = y + x)$
  - Sonst wäre es auch keine Formel: $(\forall x \forall y x) + y = y + x$
  - Klarer in Präfix-Notation: $\forall x \forall y = (+(x, y), +(y, x))$
- Quantoren binden stärker als Junktoren
  - $\forall x R(x, y) \wedge S(x)$ bedeutet $(\forall x R(x, y)) \wedge S(x)$
  - $\exists y R(c, y) \rightarrow S(y)$ bedeutet $(\exists y R(c, y)) \rightarrow S(y)$
  - anschaulich: Quantor bindet Variablen bis zum nächsten Junktor (oder bis zur schließenden Klammer)
- Klammern können weggelassen werden, wenn sie den Vorrang nicht verändern

Beispiel 4.33 (Offene Formeln)

- $P(x)$
- $f(y) > c + f(x)$
- $P(y) \lor x > c$
- $x > y \to \neg\forall x(x > y)$
- $\forall x P(x) \lor x > c \qquad (!)$

Beispiel 4.34 (Sätze)

- $\forall x x > c$
- $\forall x \forall y(x > y \lor y > x \lor x = y)$
- $\exists x P(x)$
- $\exists x(P(x) \lor x > d)$
- $\exists x(P(x) \to \forall y(y + c > x))$

Übung 4.35

Gegeben sei die Signatur $(\{+^{(2)}, f^{(1)}, c^{(0)}, d^{(0)}\}, \{=^{(2)}, >^{(2)}, P^{(1)}\})$.

Entscheiden Sie, in welche Kategorien die folgenden Ausdrücke fallen:

- (Grund-) Term
- (Grund-) Atom
- offene Formel
- Satz
- Unsinn

Entscheiden Sie, ob die Variablenvorkommen gebunden oder frei sind.

1. $x + y$
2. $x + y > c$
3. $P(c, d)$
4. $x > P(d)$
5. $\forall x(x + c > x)$
6. $\forall x > (+(x, c), x)$
7. $\forall x, y(x > y)$
8. $\exists x \exists y(x + y)$
9. $P(\forall x(x = x))$
10. $x > y \land x + y$
11. $\forall x(x > c \lor c > x) \lor x = c$
12. $c > f(d)$
13. $P(P(x))$
14. $f(f(x))$
15. $\forall x \forall y(P(x) > P(y))$
16. $\exists x P(x) \to \forall x P(x)$

Inhalt

Semantik in der Prädikatenlogik: Interpretationen

Interpretation in der Aussagenlogik

- weist Aussagenvariablen Wert 1 oder 0 zu
- macht Formel wahr oder falsch

Interpretation in der Prädikatenlogik

- bestimmt das Universum (auch Domäne genannt)
- weist jedem n-stelligen Funktionssymbol f eine n-stellige Funktion $f^{\mathcal{I}}$ über dem Universum zu
- weist jedem n-stelligen Prädikat R eine n-stellige Relation $R^{\mathcal{I}}$ über dem Universum zu
- macht Formel wahr oder falsch

Interpretation 1

$$\varphi = \forall x R(x, f(x))$$

Beispiel 4.36 (Interpretation $\mathcal{I}$ mit Menschen als Domäne)

- Universum $\Delta^{\mathcal{I}}$: $M = \{$Anna,Bob,Clara,Dirk$\}$
- Funktion $f^{\mathcal{I}}$: ehepartner$_M$ $= \{$Anna $\mapsto$ Bob, Bob $\mapsto$ Anna, Clara $\mapsto$ Dirk, Dirk $\mapsto$ Clara$\}$
- Relation $R^{\mathcal{I}}$: Mag$_M$ $= \{$(Anna,Bob), (Anna,Clara), (Bob,Anna), (Bob,Dirk), (Clara,Dirk), (Dirk,Anna), (Dirk,Bob)$\}$
- $\mathcal{I}$ macht φ falsch (weil Dirk Clara nicht mag)

$$\varphi = \forall x R(x, f(x))$$

Beispiel 4.37 (Interpretation $\mathcal{J}$ mit Zahlen als Domäne)

- Universum $\Delta^{\mathcal{J}}$: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- Funktion $f^{\mathcal{J}}$: $s_{\mathbb{N}}$ (Nachfolger) $= \{0 \mapsto 1, 1 \mapsto 2, \ldots\}$
- Relation $R^{\mathcal{J}}$: $<_{\mathbb{N}}$ (kleiner als) $= \{(0,1), (0,2), \ldots, (1,2), (1,3), \ldots\}$
- $\mathcal{J}$ macht φ wahr (weil jede Zahl kleiner ist als ihr Nachfolger)

Wahrheitswert hängt von der Interpretation ab

- der Interpretation der Funktionssymbole und Prädikate
  Wenn $\mathcal{J}'$ R als $>_{\mathbb{N}}$ interpretiert, ist $\varphi^{\mathcal{J}'}$ falsch
- dem Universum
  $\forall x \exists y (y < x)$ ist wahr in $\mathbb{Z}$, aber falsch in $\mathbb{N}$.

Übung 4.38

1. Sei $\varphi = \forall x \forall y (\neg G(x,y) \land R(x,y) \rightarrow \exists z (\neg G(z,x) \land \neg G(z,y) \land P(z)))$ und $\mathcal{I}$ wie folgt:
   - $\Delta^{\mathcal{I}}$ ist die Menge aller Menschen;
   - $G^{\mathcal{I}} = \{(x,x) \mid x \in \Delta^{\mathcal{I}}\}$ bezeichnet die Gleichheit;
   - $R^{\mathcal{I}}$ = streiten;
   - $P^{\mathcal{I}}$ = sich freuen.

   Was ist die Aussage von $\varphi^{\mathcal{I}}$?
2. Sei $\psi = \forall x \exists y G(f(x,y), c)$ und $\mathcal{J}$ wie folgt:
   - $\Delta^{\mathcal{J}} = \mathbb{Z}$;
   - $G^{\mathcal{J}} = \{(x,x) \mid x \in \Delta^{\mathcal{J}}\}$ bezeichnet die Gleichheit;
   - $f^{\mathcal{J}} = +_{\mathbb{Z}}$, d. h. Addition für Ganzzahlen;
   - $c^{\mathcal{J}} = 0_{\mathbb{Z}}$, d. h. Null (als Element der Ganzzahlen).

   Was ist die Aussage von $\psi^{\mathcal{J}}$? Ist $\psi^{\mathcal{J}}$ wahr oder falsch?

Interpretation freier Variablen

Wie werden freie Variablen interpretiert?

- Jede freie Variable wird von $\mathcal{I}$ auf ein Element der Domäne abgebildet
- Ähnlich Variablenzuweisung in Aussagenlogik
  - Jede Aussagenvariable wird auf ein Element von $\mathbb{B}$ abgebildet
- In der Praxis interessieren wir uns meistens für Sätze.

Definition 4.39 (Interpretation in der Prädikatenlogik)

Für eine Formel φ mit Funktionssymbolen F, Prädikaten P und freien Variablen V ist eine Interpretation $\mathcal{I}$ ein Tripel $(\Delta^\mathcal{I}, \cdot^\mathcal{I}, \mu)$ mit

- $\Delta^\mathcal{I}$ ist eine nichtleere Menge,
- $\cdot^\mathcal{I}$ weist
  - jedem n-stelligen $f \in F$ eine n-stellige Funktion $f^\mathcal{I}$ über $\Delta^\mathcal{I}$ zu,
  - jedem n-stelligen $R \in P$ eine n-stellige Relation $R^\mathcal{I}$ über $\Delta^\mathcal{I}$ zu.
- $\mu : V \to \Delta^\mathcal{I}$ weist jedem $x \in V$ ein Element $x^\mathcal{I} \in \Delta^\mathcal{I}$ zu.

- Domäne darf nicht leer sein.
- Nullstellige Funktionssymbole (Konstantensymbole) werden auf Elemente der Domäne abgebildet.
- Nullstellige Prädikate werden auf $\{()\}$ oder $\{\}$ abgebildet.
  - Aussagenvariablen: $\{()\} \rightsquigarrow 1_\mathbb{B}$; $\{\} \rightsquigarrow 0_\mathbb{B}$

Der Wahrheitswert komplexer Formeln wird rekursiv bestimmt:

- Für einen komplexen Term $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ werden
  - mögliche freie Variablen $x, y, \ldots$ durch $\mu(x), \mu(y), \ldots$ ersetzt;
  - die Terme $t_1, \ldots, t_n$ rekursiv ausgewertet als $t_1^{\mathcal{I}}, \ldots, t_n^{\mathcal{I}}$;
  - die Funktion $f^{\mathcal{I}}$ für diese Ergebnisse ausgewertet: $t^{\mathcal{I}} = f^{\mathcal{I}}((\mu(t_1))^{\mathcal{I}}, \ldots, (\mu(t_n))^{\mathcal{I}})$.
- Für ein Atom $\varphi = P(t_1, \ldots, t_n)$ werden
  - die Terme $t_1, \ldots, t_n$ rekursiv ausgewertet;
  - geprüft, ob das sich ergebende Tupel in $P^{\mathcal{I}}$ enthalten ist.
- Für gebundene Variablen $\forall x\varphi / \exists x\varphi$ wird geprüft, ob φ für alle/ein Element der Domäne wahr ist.
- Formeln mit Junktoren werden wie in der Aussagenlogik ausgewertet.

Beispiel 4.40

$$\varphi = \neg P(x) \land \exists y R(c, f(y))$$

$$\begin{array}{lll} \Delta^{\mathcal{I}} & = & \mathbb{N} \\ \mu & = & \{x \mapsto 4_{\mathbb{N}}\} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} P^{\mathcal{I}} & = & \mathrm{Prim}_{\mathbb{N}} \\ R^{\mathcal{I}} & = & \leq_{\mathbb{N}} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} f^{\mathcal{I}} & = & s_{\mathbb{N}} \\ c^{\mathcal{I}} & = & 17_{\mathbb{N}} \end{array}$$

Bestimmung von $\varphi^{\mathcal{I}}$:

$$\begin{array}{ll}
\varphi^{\mathcal{I}} = & \neg P^{\mathcal{I}}(\mu(x)) \land \exists y R^{\mathcal{I}}(c^{\mathcal{I}}, f^{\mathcal{I}}(y)) \\
\mu \text{ auswerten} & \neg P^{\mathcal{I}}(4_{\mathbb{N}}) \land \exists y R^{\mathcal{I}}(c^{\mathcal{I}}, f^{\mathcal{I}}(y)) \\
\text{Funktionssymbole} & \neg P^{\mathcal{I}}(4_{\mathbb{N}}) \land \exists y R^{\mathcal{I}}(17_{\mathbb{N}}, s_{\mathbb{N}}(y)) \\
\text{Prädikate} & \neg \mathrm{Prim}_{\mathbb{N}}(4_{\mathbb{N}}) \land \exists y \leq_{\mathbb{N}} (17_{\mathbb{N}}, s_{\mathbb{N}}(y)) \\
\text{Quantor: Wähle } y = 20_{\mathbb{N}} & \neg \mathrm{Prim}_{\mathbb{N}}(4_{\mathbb{N}}) \land \leq_{\mathbb{N}} (17_{\mathbb{N}}, s_{\mathbb{N}}(20_{\mathbb{N}})) \\
\text{Funktion auswerten} & \neg \mathrm{Prim}_{\mathbb{N}}(4_{\mathbb{N}}) \land \leq_{\mathbb{N}} (17_{\mathbb{N}}, 21_{\mathbb{N}}) \\
\text{Relationen auswerten} & \neg 0_{\mathbb{B}} \land 1_{\mathbb{B}} \\
\text{Junktoren auswerten} & 1_{\mathbb{B}}
\end{array}$$

Modelle in der Prädikatenlogik

Definition 4.41 (Modell)

Eine Interpretation $\mathcal{I} = (\Delta^\mathcal{I}, \cdot^\mathcal{I}, \mu)$ erfüllt eine Formel φ (ist ein Modell für φ, $\mathcal{I} \models \varphi$), wenn

- $\varphi = P(t_1, \ldots, t_n)$ ein Atom ist und $((\mu(t_1))^\mathcal{I}, \ldots, (\mu(t_n))^\mathcal{I}) \in P^\mathcal{I}$ gilt;
- $\varphi = \forall x \psi(x)$ gilt und für jedes $x \in \Delta^\mathcal{I}$ $\psi(x)$ gilt;
- $\varphi = \exists x \psi(x)$ gilt und für ein $x \in \Delta^\mathcal{I}$ $\psi(x)$ gilt;
- φ einen Junktor enthält (z. B., $\varphi = \neg\varphi_1$, $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$) und entsprechend der Wahrheitstabelle als wahr ausgewertet wird.

Definition 4.42 (Logische Implikation)

Eine Formel φ impliziert logisch eine Formel ψ ($\varphi \models \psi$), wenn jedes Modell von φ auch Modell von ψ ist.

Übung 4.43

Gegeben sei die Signatur $(\{f^{(1)}, c^{(0)}\}, \{R^{(2)}, =^{(2)}\})$.
Finden Sie für jeden der folgenden Sätze eine Interpretation, die ihn wahr macht, und eine Interpretation, die ihn falsch macht.
Hierbei soll das Prädikat „=“ als Gleichheit von Elementen der Domänen interpretiert werden. Verwenden Sie als Domänen Mengen von Zahlen.

1. $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow \exists z (R(x, z) \wedge R(z, y)))$
2. $\neg \exists x (f(x) = c)$
3. $\forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$

Beispiel 4.44 (Körperaxiome)

Abschluss unter Addition	$\forall x \forall y \exists z (x + y = z)$
Assoziativität der Addition	$\forall x \forall y \forall z ((x + (y + z)) = ((x + y) + z))$
Kommutativität der Addition	$\forall x \forall y (x + y = y + x)$
Neutrales Element der Addition	$\forall x (x + 0 = x)$
Inverses Element der Addition	$\forall x \exists y (x + y = 0)$
Abschluss unter Multiplikation	$\forall x \forall y \exists z (x \cdot y = z)$
Assoziativität der Multiplikation	$\forall x \forall y \forall z ((x \cdot (y \cdot z)) = ((x \cdot y) \cdot z))$
Kommutativität der Multiplikation	$\forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x)$
Neutrales Element der Multiplikation	$\forall x (x \cdot 1 = x)$
Inverses Element der Multiplikation	$\forall x (x = 0 \vee \exists y (x \cdot y = 1))$
Distributivität	$\forall x \forall y \forall z (x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z))$

Warum „Prädikatenlogik erster Stufe“?

PL erster Stufe	Quantifizierung von Elementen ($\exists x P(x)$)
PL zweiter Stufe	Quantifizierung von Prädikaten ($\exists P \forall x P(x)$)
PL dritter Stufe	Quantifizierung von Prädikaten über Prädikaten ($\exists R \forall P(R(P))$)
...	

- PL1 genügt zur Axiomatisierung der rationalen Zahlen ($\rightsquigarrow$ Algebra)
- PL2 ist notwendig für reelle Zahlen ($\rightsquigarrow$ Analysis)

Anwendung der PL zweiter Stufe

Definition 4.45 (Dedekind-Vollständigkeit)

Eine Menge M ist Dedekind-vollständig, wenn jede nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge $S \subseteq M$ eine kleinste obere Schranke hat.

Beispiel 4.46 (Irrationale Zahl $\sqrt{2}$)

- $S = \{x \mid x \cdot x \leq 2\}$
- Kleinste obere Schranke von S: $\sqrt{2}$
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \rightsquigarrow$ nicht Dedekind-vollständig
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \rightsquigarrow$ Dedekind-vollständig

Richard Dedekind
(1831–1916)

Dedekind-Vollständigkeit in PL2

$$\forall S \quad \langle [\exists x S(x) \land \exists x \forall y (S(y) \to y < x)] \to \\ \exists x [\forall y (S(y) \to y \leq x) \land \forall z (z < x \to \exists t (z < t \land S(t)))] \rangle$$

„Für jede Menge S gilt: Wenn S mindestens ein Element enthält
und ein x existiert, das größer ist als alle Elemente y von S,
dann existiert auch ein x, das größer oder gleich jedem Element y von S ist
und für jedes z, das kleiner ist als dieses x,
gibt es ein t, das größer als z und in S enthalten ist."

In der Prädikatenlogik kann man mehr ausdrücken als in der Aussagenlogik ...

Beispiel 4.47 (Pinguine)

- Tux ist ein Pinguin.
  $P(\mathrm{t})$
- Kein Pinguin kann fliegen.
  $\forall x(P(x) \rightarrow \neg F(x))$
- Alle Pinguine sind Vögel.
  $\forall x(P(x) \rightarrow V(x))$
- Manche Vögel können nicht fliegen.
  $\exists x(V(x) \wedge \neg F(x))$

... aber: Schlussfolgern in der Prädikatenlogik ist schwieriger als in der Aussagenlogik.

Richtlinien für Formalisierung natürlicher Sprache

Eigenname	Konstantensymbol (Hans, Stuttgart, Europa)
Substantiv	Einstelliges Prädikat (Mensch, Haus, Stadt, Zahl)
Adjektiv	Einstelliges Prädikat (schön, groß, lebendig)
Verb	Prädikat oder Funktionssymbol Stelligkeit abhängig von Anzahl der Objekte

keins	Einstelliges Prädikat (lebt, existiert)
eins	Zweistelliges Prädikat (kauft, hat, mag)
mehrere	Mehrstelliges Prädikat (kauft-von, hat-Ausbildungsvertrag-mit)
eindeutig	Funktionssymbol (mutter, direkter-nachfolger)

und, oder	„Frauen und Kinder zuerst“ $\rightsquigarrow F(x) \lor K(x) \rightarrow Z(x)$
wenn, dann	„Wenn A, dann B“ $\rightsquigarrow A \rightarrow B$ „Nur wenn A, dann B“ $\rightsquigarrow B \rightarrow A$

Häufige Kombinationen:

$\forall$ mit $\rightarrow$	Jeder Mensch ist ein Lebewesen.
$\exists$ mit $\land$	Manche Lebewesen können schwimmen.

Übung: Formalisierung in PL

Übung 4.48

Formalisieren Sie die folgenden Sätze in Prädikatenlogik.
Verwenden Sie hierzu

- die einstelligen Prädikate Student, Professor, Vorlesung,
- die zweistelligen Prädikate Mag, Betreut, Hält,
- das zweistellige Prädikat $=$ (für Gleichheit von Elementen).

1. Jeder Professor mag alle Studenten.
2. Jeder Student mag (mindestens) einen Professor.
3. Es gibt einen Studenten, der genau einen Professor mag.
4. Studenten werden nur von Professoren betreut.
5. Jeder Professor hält mindestens zwei Vorlesungen.
6. Jeder Professor betreut nur Studenten, die ihn mögen.

Inhalt

Inhalt

Wie kann das Resolutionsprinzip auf PL übertragen werden?

Beispiel 4.49 (naive Resolution in PL)

$\forall x(H(x) \to \exists y M(x,y))$ $\qquad$ $H(c)$

?

Probleme:

- Interaktion von Quantoren: $\forall x \varphi, \forall x \neg\varphi$ vs. $\exists x \varphi, \exists x \neg\varphi$
- Interaktion von Variablen und Konstanten
- Erzeugung von KNF in Formeln mit Quantoren

Ansatz:

- Elimination des Existenz-Quantors
- Ersetzung von Variablen durch Terme, um Atome gleich zu machen

Schritt 1: Negations-Normalform

Vorgehen wie in AL

1. Elimination von $\to$ und $\leftrightarrow$
   - $\varphi \leftrightarrow \psi \quad \rightsquigarrow \quad (\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi)$
   - $\varphi \to \psi \quad \rightsquigarrow \quad \neg\varphi \lor \psi$
2. Anwendung der de-Morgan-Gesetze und ihrer Entsprechungen für Quantoren
   - $\neg(\varphi \land \psi) \quad \rightsquigarrow \quad \neg\varphi \lor \neg\psi$
   - $\neg(\varphi \lor \psi) \quad \rightsquigarrow \quad \neg\varphi \land \neg\psi$
   - $\neg\forall x\varphi \quad \rightsquigarrow \quad \exists x\neg\varphi$
   - $\neg\exists x\varphi \quad \rightsquigarrow \quad \forall x\neg\varphi$
3. Elimination von doppelter Negation und negierten Boole'schen Konstanten
   - $\neg\neg\varphi \quad \rightsquigarrow \quad \varphi$
   - $\neg\mathbf{W} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{F}$
   - $\neg\mathbf{F} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{W}$

- Ergebnis: Formel nur mit Junktoren $\land$, $\lor$ und $\neg$ direkt vor Atomen

Schritt 2: Skolemisierung

Definition 4.50 (Skolem-Form)

Eine prädikatenlogische Formel φ ist in Skolem-Form (SF), wenn sie in NNF ist und keine Existenzquantoren enthält.

Transformation in SF:
Ersetze existentiell quantifizierte Variablen durch Terme

Thoralf Skolem
(1887–1963)

Beispiel 4.51 (Skolemisierung)

„Es gibt einen Präsidenten.“

$\exists x P(x) \quad \rightsquigarrow \quad P(c)$ $\qquad c$ ist neu!

„Jeder Mensch hat eine Mutter.“

$\forall x \exists y (H(x) \to M(x, y)) \quad \rightsquigarrow \quad \forall x (H(x) \to M(x, f(x)))$ $\qquad f$ ist neu!

Eingabe: Formel φ in NNF
Ausgabe: skolemisierte Formel sf(φ)

```
while φ enthält existentiell quantifizierte Variablen do
    sei y erste existentiell quantifizierte Variable
    sei {∀x_1, ..., ∀x_n} die Menge der Allquantoren, in deren Scope ∃y liegt
    erzeuge neues n-stelliges Funktionssymbol f
    ersetze alle Vorkommen von y im Scope von ∃y durch f(x_1, ..., x_n)
return φ
```

Beachte:

- Bearbeite Existenzquantoren von vorne nach hinten
- Das neue Funktionssymbol f heißt Skolem-Funktionssymbol
- Existentiell quantifizierte Variablen, die nicht im Scope eines Allquantors stehen, werden durch Konstanten ersetzt.
- φ und sf(φ) sind nicht äquivalent, aber erfüllbarkeitsäquivalent.
- Ergebnis: Formel ohne Existenzquantor

Übung 4.52

Skolemisieren Sie die folgenden Formeln:

1. $\forall x(\exists y R(x,y) \wedge \exists y \neg R(x,y)) \wedge \exists y \exists z \neg R(y,z)$
2. $\exists x \forall y(R(x,y) \vee R(y,x)) \wedge \neg\forall y \neg(R(y,y) \wedge \neg R(y,f(y))) \vee \forall x \neg(\exists y R(x,y) \rightarrow \forall y R(x,y))$

Schritt 2.1: Optimierung der Skolemisierung

Problem: Unnötig großer Scope von Allquantoren

Beispiel 4.53 (unnötig komplexe Skolem-Funktion)

$\forall x \exists y (P(x) \land Q(y)) \quad \rightsquigarrow \quad \forall x (P(x) \land Q(f(x)))$
Da y nicht von x abhängt, könnte y durch eine Konstante ersetzt werden.

Lösung: Zusätzliche Vorverarbeitung für einfachere Skolem-Funktionen

1. Negations-Normalform
2. Skolem-Form
   1. Miniscoping
   2. Skolemisierung

Miniscoping

Ziel: Äquivalenzumformung zur Minimierung des Scopes von Quantoren

Annahme: x kommt frei in φ und ψ vor, aber nicht in χ

- $\forall x(\varphi \wedge \chi) \quad \rightsquigarrow \quad \forall x\varphi \wedge \chi$
- $\forall x(\varphi \vee \chi) \quad \rightsquigarrow \quad \forall x\varphi \vee \chi$
- $\forall x(\varphi \wedge \psi) \quad \rightsquigarrow \quad \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$
- $\exists x(\varphi \wedge \chi) \quad \rightsquigarrow \quad \exists x\varphi \wedge \chi$
- $\exists x(\varphi \vee \chi) \quad \rightsquigarrow \quad \exists x\varphi \vee \chi$
- $\exists x(\varphi \vee \psi) \quad \rightsquigarrow \quad \exists x\varphi \vee \exists x\psi$

Dabei: Quantoren von innen nach außen bearbeiten.

Beispiel 4.54 (Skolem-Funktionen mit Miniscoping)

Miniscoping:

$\forall x \exists y(P(x) \wedge Q(y)) \quad \rightsquigarrow \quad \forall x(P(x) \wedge \exists y Q(y)) \quad \rightsquigarrow \quad \forall x P(x) \wedge \exists y Q(y)$

Skolemisierung:

$\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y) \quad \rightsquigarrow \quad \forall x P(x) \wedge Q(c)$

Übung 4.55

$$\varphi = \forall x \exists y ((P(x) \lor S(x, y) \lor Q(y)) \land Q(x))$$

Skolemisieren Sie die Formel φ

1. mit dem Standardverfahren;
2. mit dem Miniscoping-Verfahren.

Schritt 3: Allquantoren entfernen

1. Negations-Normalform
2. Skolem-Form
   1. Miniscoping
   2. Skolemisierung
3. Allquantoren entfernen

- Alle verbleibenden Variablen universell quantifiziert
- Quantor $\forall$ nicht mehr notwendig
- Zuvor: Mehrfach quantifizierte Variablen umbenennen
- Ergebnis: Formel ohne Quantoren

Beispiel 4.56 (Entfernen des Allquantors)

$$
\begin{array}{rl}
 & \forall x (P(x, c) \lor Q(x)) \lor \forall x P(x, x) \\
\rightsquigarrow & \forall x (P(x, c) \lor Q(x)) \lor \forall y P(y, y) \\
\rightsquigarrow & P(x, c) \lor Q(x) \lor P(y, y) \\
\text{nicht} & P(x, c) \lor Q(x) \lor P(x, x)
\end{array}
$$

Schritt 4: Konjunktive Normalform

1. Negations-Normalform
2. Skolem-Form
   1. Miniscoping
   2. Skolemisierung
3. Entferungung des Allquantors
   1. Variablen-Umbenennung
   2. $\forall$ weglassen
4. Konjunktive Normalform

- Wie in AL: Anwendung des Distributivgesetzes
  - Atome statt Aussagenvariablen
- Ergebnis: Konjunktion von Disjunktionen

Resolution und Variablen

Beispiel 4.57 (PL-Resolution)

Ausgangsformel	$\exists z H(z) \wedge \forall x(H(x) \rightarrow \exists y M(x,y))$	
NNF	$\exists z H(z) \wedge \forall x(\neg H(x) \vee \exists y M(x,y))$	$\rightarrow$ eliminiert
Skolem-Form	$H(c) \wedge \forall x(\neg H(x) \vee M(x, f(x)))$	$\exists$ eliminiert
KNF	$H(c) \wedge (\neg H(x) \vee M(x, f(x)))$	PL-Atome statt Aussagenvariablen

$$\begin{array}{ccc} H(c) & & \neg H(x), M(x, f(x)) \\ & \searrow \quad \swarrow_{\; x \mapsto c} & \\ & M(c, f(c)) & \end{array}$$

- Finde Variablenbelegung, die zwei Atome syntaktisch gleich macht
- Ersetze Variablen in gesamter Klausel
- Erzeuge Resolvente

Definition 4.58 (Substitution)

Eine Substition ist eine Funktion, die Variablen auf Terme abbildet.

Beispiel 4.59 (Substitution)

Die Substitution

$$\sigma = \{x \mapsto f(z), y \mapsto g(c, d)\}$$

bildet x auf $f(z)$ und y auf $g(c, d)$ ab.

Die Anwendung einer Substitution auf einen Term oder eine Formel ersetzt alle Variablen des Definitionsbereichs durch ihre Funktionswerte:

$$\sigma(g(x, f(y))) = g(f(z), f(g(c, d)))$$

Definition 4.60 (Unifikator)

Ein Unifikator ist eine Substitution, die zwei Formeln auf dieselbe Formel abbildet.

Beispiel 4.61 (Unifikator von $R(a, y)$ und $R(x, f(a))$)

$\varphi = R(a, y) \qquad \psi = R(x, f(a)) \qquad \sigma = \{x \mapsto a, y \mapsto f(a)\}$
$\sigma(\varphi) = R(a, f(a)) = \sigma(\psi)$

Resolution von C_1 und C_2 ist möglich, wenn es Atome φ, ψ und Substitution σ gibt mit

- $\varphi \in C_1$ und $\neg\psi \in C_2$
- σ ist Unifikator von φ und ψ.

Unifikation: Variablenumbenennung und Occurs-Check

Beispiel 4.62 (gleiche Variable in mehreren Klauseln)

Problem Unifikator für $P(x, c)$ und $P(d, x)$ wird nicht gefunden

Lösung Disjunkte Umbenennung der Variablen $P(x, c), P(d, y), \sigma = \{x \mapsto d, y \mapsto c\}$

Beispiel 4.63 (Abbildung von x auf $f(x)$)

Problem Unifikation von x und $f(x)$ resultiert in $x \mapsto f(x)$

Lösung Occurs-Check: x kann nicht auf Term abgebildet werden, der x enthält

Übung 4.64

Seien

- u, w, x, y, z Variablen,
- c, d Konstantensymbole,
- f ein einstelliges und g ein zweistelliges Funktionssymbol,
- N und P einstellige, R ein zweistelliges und S ein dreistelliges Prädikat.

Versuchen Sie, Unifikatoren für die folgenden Paare von Atomen zu finden.

1. $P(x)$ und $P(f(g(y, z)))$
2. $P(x)$ und $N(f(y))$
3. $R(x, f(x))$ und $R(f(y), z)$
4. $R(x, f(x))$ und $R(f(y), y)$
5. $R(x, f(x))$ und $R(f(c), d)$
6. $S(x, f(g(x, y)), g(x, f(d)))$ und $S(g(c, d), f(z), g(g(c, u), w))$

Allgemeinste Unifikatoren

Beispiel 4.65 (Mehrere mögliche Unifikatoren)

$$P(x), R(x) \qquad \neg P(y) \qquad \neg R(c)$$

$$x \mapsto d \qquad y \mapsto d$$

$$R(d)$$

Problem manche Unifikatoren verhindern Resolution

Lösung **Allgemeinster** Unifikator (MGU): ersetze so wenig wie möglich

Eingabe: Atome φ, ψ
Ausgabe: au(φ, ψ), wenn φ und ψ unifizierbar sind; „nicht unifizierbar“, sonst

$\sigma := \{\}$
while $\sigma(\varphi) \neq \sigma(\psi)$ **do**
  sei i die erste Position, an der sich $\sigma(\varphi)$ und $\sigma(\psi)$ unterscheiden
  if $\sigma(\varphi)|_i$ oder $\sigma(\psi)|_i$ ist Prädikat **then**
    return „nicht unifizierbar“
  else if weder $\sigma(\varphi)|_i$ noch $\sigma(\psi)|_i$ ist Variable **then**
    return „nicht unifizierbar“
  else
    sei x die Variable, t der andere Term
    if x ist echter Subterm von t **then**
      return „nicht unifizierbar“
    else
      Ersetze jedes Vorkommen von x in σ durch t
      $\sigma := \sigma \cup \{x \mapsto t\}$
return σ

Beispiel: Unifikation

Beispiel 4.66

$$\begin{array}{lcl} \varphi & = & R(x, z, g(x, f(y))) \\ \psi & = & R(f(c), u, g(w, f(g(u, w)))) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} x & \mapsto & f(c) \\ u & \mapsto & z \\ w & \mapsto & f(c) \\ y & \mapsto & g(z, f(c)) \end{array}$$

Occurs-Check

allgemeinster Unifikator

Übung 4.67

Seien

- x, y, z Variablen,
- c, d Konstanten,
- f einstelliges, g ein zweistelliges und h ein dreistelliges Funktionssymbol,
- S und T dreistellige Prädikate.

Wenden Sie den Unifikations-Algorithmus an, um allgemeinste Unifikatoren für die folgenden Paare von Termen zu finden. Beachten Sie die disjunkte Umbenennung der Variablen.

1. $\varphi_1 = S(x, f(y), g(z, d))$ und $\psi_1 = S(c, f(x), g(f(z), z))$
2. $\varphi_2 = T(x, f(x), h(f(y), z, z))$ und $\psi_2 = T(c, f(y), h(z, f(x), c))$

Halloween I: Formalisierung

Prämissen:

1. Bob kauft einen Kürbis.
   $\exists x(\mathrm{Kauft}(\mathrm{b}, x) \land \mathrm{Kürbis}(x))$
2. Wer einen Kürbis kauft, isst ihn oder schnitzt ihn.
   $\forall x \forall y(\mathrm{Kauft}(x, y) \land \mathrm{Kürbis}(y) \rightarrow \mathrm{Isst}(x, y) \lor \mathrm{Schnitzt}(x, y))$
3. Kinder essen keine Kürbisse.
   $\forall x(\mathrm{Kind}(x) \rightarrow \forall y(\mathrm{Kürbis}(y) \rightarrow \neg \mathrm{Isst}(x, y)))$

Konklusion:

4. Wenn Bob ein Kind ist, schnitzt er etwas.
   $\mathrm{Kind}(\mathrm{b}) \rightarrow \exists x \mathrm{Schnitzt}(\mathrm{b}, x)$

Halloween II: Vorverarbeitung

0. Konjunktion von Prämissen und Negation der Konklusion
1. Negations-Normalform
   1. Ersetzung von $\varphi \to \psi$ durch $\neg\varphi \lor \psi$
   2. Gesetze von De Morgan
   3. Entfernung doppelter Negation
2. Skolemisierung
3. Allquantoren
   1. Variablen-Umbenennung
   2. $\forall$ weglassen
4. Konjunktive Normalform

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Kauft}(\mathsf{b},\mathsf{k}) \quad \land \\
&\mathsf{K\ddot{u}rbis}(\mathsf{k}) \quad \land \\
&(\neg\mathsf{Kauft}(x,y) \lor \neg\mathsf{K\ddot{u}rbis}(y) \lor \mathsf{Isst}(x,y) \lor \mathsf{Schnitzt}(x,y)) \quad \land \\
&(\neg\mathsf{Kind}(u) \lor \neg\mathsf{K\ddot{u}rbis}(w) \lor \neg\mathsf{Isst}(u,w)) \quad \land \\
&\mathsf{Kind}(\mathsf{b}) \quad \land \\
&\neg\mathsf{Schnitzt}(\mathsf{b},z)
\end{aligned}$$

$\neg\text{Kind}(u), \neg\text{Kürbis}(w), \neg\text{Isst}(u, w)$ and $\text{Kind}(\text{b})$ with $u \mapsto \text{b}$:

$\neg\text{Kürbis}(w), \neg\text{Isst}(\text{b}, w)$

$\neg\text{Kürbis}(w), \neg\text{Isst}(\text{b}, w)$ and $\text{Kürbis}(\text{k})$ with $w \mapsto \text{k}$:

$\neg\text{Isst}(\text{b}, \text{k})$

$\neg\text{Isst}(\text{b}, \text{k})$ and $\neg\text{Kauft}(x, y), \neg\text{Kürbis}(y), \text{Isst}(x, y), \text{Schnitzt}(x, y)$ with $x \mapsto \text{b}, y \mapsto \text{k}$:

$\neg\text{Kauft}(\text{b}, \text{k}), \neg\text{Kürbis}(\text{k}), \text{Schnitzt}(\text{b}, \text{k})$

$\neg\text{Kauft}(\text{b}, \text{k}), \neg\text{Kürbis}(\text{k}), \text{Schnitzt}(\text{b}, \text{k})$ and $\text{Kürbis}(\text{k})$:

$\neg\text{Kauft}(\text{b}, \text{k}), \text{Schnitzt}(\text{b}, \text{k})$

$\neg\text{Kauft}(\text{b}, \text{k}), \text{Schnitzt}(\text{b}, \text{k})$ and $\text{Kauft}(\text{b}, \text{k})$:

$\text{Schnitzt}(\text{b}, \text{k})$

$\text{Schnitzt}(\text{b}, \text{k})$ and $\neg\text{Schnitzt}(\text{b}, z)$ with $z \mapsto \text{k}$:

$\square$

Übung 4.68

Zeigen Sie mittels Resolution der folgenden Folgerung:

Prämissen:

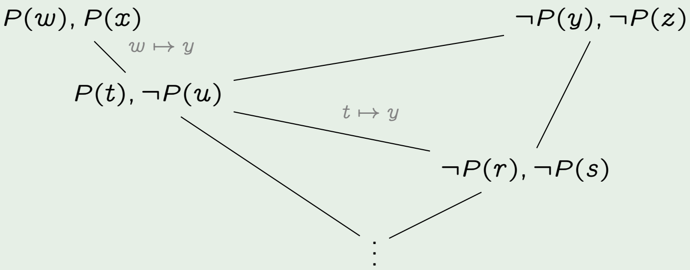
1. Alle Hunde bellen.
2. Wer Katzen hat, hat keine Mäuse.
3. Wer leicht aufwacht, hat nichts, das bellt.
4. Anna hat einen Hund oder eine Katze.

Konklusion:

5. Wenn Anna leicht aufwacht, hat sie keine Mäuse.

Unvollständigkeit des bisherigen Algorithmus

Beispiel 4.69 (Resolution von $\{P(w), P(x)\}$ und $\{(\neg P(y), \neg P(z)\})$



Problem
- redundante Literale
- $\forall w \forall x (P(w) \vee P(x)) \quad \equiv \quad \forall x P(x)$

Lösung
- eliminiere Redundanz
- führe Unifikation innerhalb einer Klausel durch

Faktoren

Definition 4.70 (Faktor)

Sei $C = \{L_1, L_2, L_3, \ldots\}$ und σ allgemeinster Unifikator von L_1 und L_2.
Dann hat C den Faktor $\sigma(C)$.

Beispiel 4.71 (Faktoren)

- $\{P(w), P(x)\}$ hat Faktor $\{P(x)\}$.
- $\{P(x), P(c)\}$ hat Faktor $\{P(c)\}$.
- $\{P(x), P(c), R(x, y)\}$ hat Faktor $\{P(c), R(c, y)\}$.

Neue Regel:

Wenn C_1 den Faktor C_2 hat, leite C_2 von C_1 ab ($C_1 \vdash C_2$).

Beispiel 4.72 (Faktorisierung)

$$
\begin{tikzcd}
P(w), P(x) \arrow[d, dash, "w \mapsto x"] & & \neg P(y), \neg P(z) \arrow[d, dash, "z \mapsto y"] \\
P(x) \arrow[dr, dash] & & \neg P(y) \arrow[dl, dash, "x \mapsto y"] \\
& \square &
\end{tikzcd}
$$

Eigenschaften der PL-Resolution

Satz 4.73 (Korrektheit der PL-Resolution)

$\mathcal{K}(\varphi) \vdash^* \square$ impliziert Unerfüllbarkeit von φ.

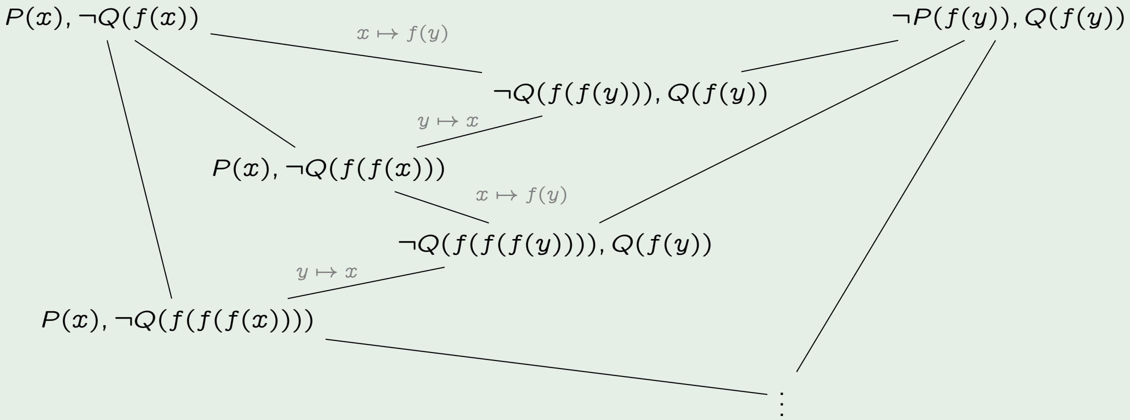
Satz 4.74 (Widerlegungsvollständigkeit der PL-Resolution)

Wenn φ unerfüllbar ist, gilt $\mathcal{K}(\varphi) \vdash^* \square$.

Terminierung?

Terminiert der Resolutionsalgorithmus für jede Eingabe?

Beispiel 4.75



PL-Erfüllbarkeit unentscheidbar $\rightsquigarrow$ Terminierung nicht erreichbar.

Inhalt

Tableau-Algorithmus für PL

- Gleiches Grundprinzip
  - Regeln
  - Clashes
- Vorverarbeitung: NNF
  - Negation nur vor Atomen
- Zusätzliche Regeln für Quantoren
  - $\forall$-Regel
  - $\exists$-Regel
- Definition von Clash auf PL-Formeln erweitert

Zusätzliche Regeln für PL

$\exists$ Wenn $\exists x \varphi \in S$ gilt
und keine Substitution $\sigma = \{x \mapsto t\}$ für einen Term t existiert mit $\sigma(\varphi) \in S$
dann $S := S \cup \sigma(\varphi)$ mit $\sigma = \{x \mapsto c\}$ für ein neues Konstantensymbol c

- eliminiere $\exists$ durch Skolemisierung
- Konstanten können immer verwendet werden
  - $\forall$-Quantoren werden vorher durch $\forall$-Regel bearbeitet
  - keine komplexen Skolem-Funktionen nötig

$\forall$ Wenn $\forall x \varphi \in S$ gilt
und t ein beliebiger Grundterm ist
dann $S := S \cup \sigma(\varphi)$ mit $\sigma = \{x \mapsto t\}$

- t kann auch neues Konstantensymbol sein
- anwendbar auf unendliche Menge von Grundtermen
  - Keine Anwendbarkeitsbedingung $\rightsquigarrow$ immer anwendbar!
  - Terminierung ist nicht garantiert

Beispiel: Halloween-Tableau

<table>
<tr><td>1</td><td colspan="6">$\exists x(\text{Kauft}(b, x) \land \text{Kürbis}(x)) \quad \land$
$\forall x \forall y(\neg\text{Kauft}(x, y) \lor \neg\text{Kürbis}(y) \lor \text{Isst}(x, y) \lor \text{Schnitzt}(x, y)) \quad \land$
$\forall x(\neg\text{Kind}(x) \lor \forall y(\neg\text{Kürbis}(y) \lor \neg\text{Isst}(x, y))) \quad \land$
$\text{Kind}(b) \land \forall x \neg\text{Schnitzt}(b, x)$</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="6">$\exists x(\text{Kauft}(b, x) \land \text{Kürbis}(x))$</td><td>1: $\land$</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="6">$\forall x \forall y(\neg\text{Kauft}(x, y) \lor \neg\text{Kürbis}(y) \lor \text{Isst}(x, y) \lor \text{Schnitzt}(x, y))$</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="6">$\forall x(\neg\text{Kind}(x) \lor \forall y(\neg\text{Kürbis}(y) \lor \neg\text{Isst}(x, y)))$</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="6">$\text{Kind}(b)$</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="6">$\forall x \neg\text{Schnitzt}(b, x))$</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td colspan="6">$\text{Kauft}(b, k) \land \text{Kürbis}(k)$</td><td>2: $\exists(x \mapsto k)$</td></tr>
<tr><td>8</td><td colspan="6">$\text{Kauft}(b, k)$</td><td>7: $\land$</td></tr>
<tr><td>9</td><td colspan="6">$\text{Kürbis}(k)$</td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td colspan="6">$\neg\text{Schnitzt}(b, k)$</td><td>6: $\forall(x \mapsto k)$</td></tr>
<tr><td>11</td><td colspan="6">$\neg\text{Kauft}(b, k) \lor \neg\text{Kürbis}(k) \lor \text{Isst}(b, k) \lor \text{Schnitzt}(b, k)$</td><td>3: $\forall(x \mapsto b, y \mapsto k)$</td></tr>
<tr><td>12</td><td colspan="6">$\neg\text{Kind}(b) \lor \forall y(\neg\text{Kürbis}(y) \lor \neg\text{Isst}(b, y))$</td><td>4: $\forall(x \mapsto b)$</td></tr>
<tr><td>13</td><td>$\neg\text{Kind}(b)$</td><td colspan="5">$\forall y(\neg\text{Kürbis}(y) \lor \neg\text{Isst}(b, y))$</td><td>12: $\lor$</td></tr>
<tr><td>14</td><td>$\lightning$ 5</td><td colspan="5">$\neg\text{Kürbis}(k) \lor \neg\text{Isst}(b, k)$</td><td>13: $\forall(y \mapsto k)$</td></tr>
<tr><td>15</td><td></td><td>$\neg\text{Kürbis}(k)$</td><td colspan="4">$\neg\text{Isst}(b, k)$</td><td>14: $\lor$</td></tr>
<tr><td>16</td><td></td><td>$\lightning$ 9</td><td>$\neg\text{Kauft}(b, k)$</td><td>$\neg\text{Kürbis}(k)$</td><td>$\text{Isst}(b, k)$</td><td>$\text{Schnitzt}(b, k)$</td><td>11: $\lor$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>$\lightning$ 8</td><td>$\lightning$ 9</td><td>$\lightning$ 15</td><td>$\lightning$ 10</td><td></td></tr>
</table>

- φ ist unerfüllbar
- Prämissen implizieren Konklusion

Übung 4.76

Verwenden Sie ein Tableau, um zu zeigen, dass Anna keine Mäuse hat.

$$\begin{array}{rcl} \varphi & = & \forall x(\neg \mathrm{H}(x) \vee \mathrm{B}(x)) \quad \wedge \\ & & \forall x \forall y \forall z(\neg \mathrm{Hat}(x,y) \vee \neg \mathrm{K}(y) \vee \neg \mathrm{Hat}(x,z) \vee \neg \mathrm{M}(z)) \quad \wedge \\ & & \forall x \forall y(\neg \mathrm{L}(x) \vee \neg \mathrm{Hat}(x,y) \vee \neg \mathrm{B}(y)) \quad \wedge \\ & & \exists x(\mathrm{Hat}(\mathrm{a},x) \wedge (\mathrm{H}(x) \vee \mathrm{K}(x))) \quad \wedge \\ & & \mathrm{L}(\mathrm{a}) \wedge \exists x(\mathrm{Hat}(\mathrm{a},x) \wedge \mathrm{M}(x)) \end{array}$$

Peano-Axiomensystem der natürlichen Zahlen :

1. Null ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl hat eine natürliche Zahl als Nachfolger.
3. Null ist nicht der Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4. Wenn natürliche Zahlen denselben Nachfolger haben, handelt es sich um dieselbe Zahl.
5. Die natürlichen Zahlen sind die kleinste Menge, die Null und den Nachfolger jedes Elements enthält.
   Alternativ:
   Jede Menge, die Null und den Nachfolger jedes Elements enthält, ist eine Obermenge der natürlichen Zahlen.

Giuseppe Peano
(1858–1932)

Übung 4.77

1. Formalisieren Sie die Peano-Axiome 1–4 in der Prädikatenlogik.
   - Verwenden Sie die folgende Signatur:
     - Prädikat $N^{(1)}(x)$: „x ist eine natürliche Zahl“
     - Prädikat $=^{(2)}(x, y)$: „x ist gleich y“
       Für Gleichheit gehen wir davon aus, dass die korrekte Interpretation fest vorgegeben ist.
     - Funktionssymbol $z^{(0)}$: die Konstante „Null“
     - Funktionssymbol $s^{(1)}(x)$: „Nachfolger von x“
   - Axiom 5 kann in der PL 1. Stufe nicht formalisiert werden.
2. Zeigen Sie, dass die Axiome 1–4 widerspruchsfrei sind.
   - Zeigen Sie die Erfüllbarkeit der Konjunktion der Axiome.
   - Resolution und Tableaualgorithmus terminieren nicht immer.
3. Zeigen Sie, dass die Axiome 1–4 unabhängig sind.
   - Zeigen Sie für jedes Axiom, dass seine Negation zusammen mit den anderen Axiomen erfüllbar ist; z. B. $1 \wedge 2 \wedge \neg 3 \wedge 4$.
   - Verwenden Sie die vom Tableau-Algorithmus erzeugten Modelle, um sich zu verdeutlichen, dass diese Modelle nicht isomorph zu $\mathbb{N}$ sind.

Nachteil des naiven Tableau-Algorithmus

- Problem: Effizienz abhängig von Auswahl der Terme in $\forall$-Regel
  - in Beispielen: immer sofort „richtiger" Term
  - Programm muss alle Möglichkeiten testen
  - Signatur mit 4 Konstantensymbolen und Formel mit 5 universell quantifizierten Variablen $\rightsquigarrow$ $4^5 = 1024$ mögliche Regelanwendungen
  - Signatur mit Funktionssymbolen $\rightsquigarrow$ unendlich viele Möglichkeiten
- Abhilfe:
  - Heuristiken: Beginne mit Termen, die bereits vorkommen
    - Nicht in jedem Fall ausreichend: $\forall x P(x) \land \forall x \neg P(x)$
  - Modifizierter Algorithmus: Tableau-Algorithmus mit Unifikation
    - Verzögere Substitution
    - Verwende Unifikation zum Finden einer Substitution, die Clash erzeugt

Tableau-Algorithmus mit Unifikation

$\forall^u$ Wenn $\forall x \varphi \in S$
dann $S := S \cup \sigma(\varphi)$ mit $\sigma = \{x \mapsto y\}$ für eine neue Variable y

- y ist freie Variable!
- immer anwendbar

$\exists^u$ Wenn $\exists x \varphi \in S$
und es keine Substitution $\sigma = \{x \mapsto t\}$ für einen Term t gibt mit $\sigma(\varphi) \in S$
und φ enthält die freien Variablen $y_1, \ldots, y_n$
dann $S := S \cup \sigma(\varphi)$ mit $\sigma = \{x \mapsto f(y_1, \ldots, y_n)\}$ für ein neues n-stelliges f

- Nachteil: Komplexe Skolem-Funktionen nötig

S Wenn es in einer Spalte Formeln φ und ψ gibt
und einen Unifikator σ für die freien Variablen mit $\sigma(\varphi) = \neg\sigma(\psi)$
dann wende σ auf gesamtes Tableau an

- nicht nur auf aktuelle Spalte!
- gleiches Ergebnis, wie wenn man σ von Anfang an verwendet hätte
- freie Variablen müssen überall ersetzt werden

Beispiel: Tableau mit Unifikation

Beispiel 4.78

1	$\forall x \exists y (M(x,y) \lor P(x,y)) \land \forall z (\neg M(c,z) \land \neg P(c,z))$		
2	$\forall x \exists y (M(x,y) \lor P(x,y))$		1: $\land$
3	$\forall z (\neg M(c,z) \land \neg P(c,z))$		
4	$\exists y (M(c,y) \lor P(c,y))$		2: $\forall^u (x \mapsto r)$
5	$M(c, f(c)) \lor P(c, f(c))$		4: $\exists^u (y \mapsto f(r))$
6	$\neg M(c, f(c)) \land \neg P(c, f(c))$		3: $\forall^u (z \mapsto s)$
7	$\neg M(c, f(c))$		6: $\land$
8	$\neg P(c, f(c))$		
9	$M(c, f(c))$	$P(c, f(c))$	5: $\lor$
	$\lightning$ 7	$\lightning$ 8	S $\{r \mapsto c, s \mapsto f(c)\}$

Übungen zur Prädikatenlogik

Mit den Übungsaufgaben auf der Seite

`https://www.cs.utexas.edu/users/novak/reso.html`

können Sie die Themen

- Formalisierung
- Normalformen
- Resolution
- Tableaus

im Selbststudium vertiefen.

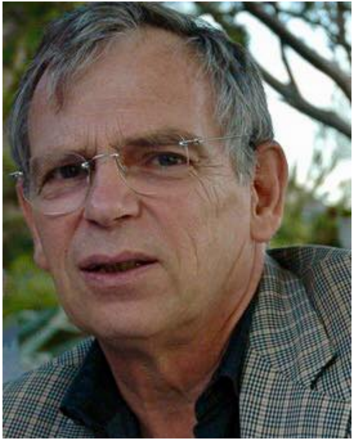
Zusammenfassung: Prädikatenlogik

Syntax	Variablen, Prädikate, Funktionssymbole, Quantoren Terme, Atome, komplexe Formeln Modellierung der inneren Struktur von Aussagen
Interpretation	Domäne, Funktionen, Relationen
Schlussfolgerung	korrekt, vollständig nicht terminierend $\rightsquigarrow$ unentscheidbar **Resolution** NNF, SF, Unifikation, Faktorisierung **Tableau** $\exists/\forall$-Regel, Anwendbarkeit

Inhalt

Geschichte und Motivation

- entwickelt 1972 in Frankreich von Alain Colmerauer
- Programmation en logique
- ISO-Standard 1995
- Deklarative Programmiersprache
  - „Was gilt?“
  - Beschreibung der Domäne
  - Beantwortung von Anfragen
  - Verwendung logischer Schlussfolgerungsverfahren
- Gegenbegriff: Imperative Programmiersprache
  - „Was ist zu tun?“
  - Beschreibung eines Vorgehens (Algorithmus)
- ermöglicht sehr kompakte Programme
- erfordert andere Denkweise
- Anwendungsbereiche:
  - Künstliche Intelligenz
  - Spracherkennung



Alain Colmerauer
(1941–2017)

Deklarative und imperative Programmierung

Beispiel 5.1 (Imperatives Kochrezept)

1. 3 Knoblauchzehen schälen und pressen
2. 1 Chilischote kleinschneiden
3. Knoblauch und Chili in 50ml Olivenöl andünsten
4. 300g Spaghetti 8 Minuten kochen
5. Spaghetti und Öl mischen

Beispiel 5.2 (Deklaratives Kochrezept)

- Spaghetti aglio, olio e peperoncino besteht aus einer Mischung von 300g gekochten Spaghetti und Aglio-Olio-Peperoncino-Sauce
- Spaghetti sind gekocht, wenn sie 8 Minuten in kochendem Wasser gelegen haben.
- Aglio-Olio-Peperoncino-Sauce entsteht durch das Andünsten von 3 gepressten Knoblauchzehen und 1 geschnittenen Chilischote in 50ml Olivenöl

Deklarative Programmierung in Prolog

- Beschreibung der Domäne in der Wissensbank
  - einzelne Aussagen formuliert als Klauseln
  - Programmier-Paradigma: Rekursion
    - keine Kontrollstrukturen wie `if`, `while`, `for`
    - kein `goto`
- Interpreter beantwortet Anfragen zur Domäne
  - Ableitung von neuem Wissen aus Wissensbank
  - Methode:
    - Unifikation von Anfragen und Klauseln der Wissensbank
    - Resolution

- enthält Beschreibung der Welt
- ist das Prolog-„Programm“
- besteht aus prädikatenlogischen Formeln (Klauseln)

Beispiel 5.3

Prolog	Prädikatenlogik	natürliche Sprache
`party.`	P	„Es gibt eine Party.“
`woman(mia).`	$W(m)$	„Mia ist eine Frau.“
`human(X) :- woman(X).`	$\forall x(W(x) \to H(x))$	„Jede Frau ist ein Mensch.“
`human(X) :- human(father(X)), human(mother(X)).`	$\forall x(H(f(x)) \land H(m(x)) \to H(x))$	„Sind Vater und Mutter eines Individuums Menschen, ist es auch ein Mensch.“

Interpreter

- beantwortet Anfragen
- nutzt Wissensbank
- zieht Schlussfolgerungen

Anfragen

- sind Klauseln
- sind gültig, wenn ihre Negation unerfüllbar ist
- Interpreter testet Erfüllbarkeit der Negation mit Resolution

Beispiel 5.4

Prolog	Prädikatenlogik	natürliche Sprache
`woman(mia).`	$W(m)$	„Ist Mia eine Frau?“
`human(mia).`	$H(m)$	„Ist Mia ein Mensch?“
`human(X).`	$\exists x H(x)$	„Wer ist ein Mensch?“
`human(X),human(father(X)).`	$\exists x(H(x) \land H(f(x)))$	„Wer ist ein Mensch und hat einen menschlichen Vater?“

Inhalt

- Terme
  - Einfache Terme
    - Konstanten
      - Atome
      - Zahlen
    - Variablen
  - Komplexe Terme

Vorsicht

Die Begriffe Term und Atom haben eine andere Bedeutung als in der Logik!

Einfache Terme

Atome

- Strings bestehend aus Buchstaben, Ziffern und Unterstrich (_) beginnend mit Kleinbuchstaben,
  Z. B. `butch`, `honey_bunny`, `bigKahunaBurger3`
- Beliebige Strings in einfachen Anführungsstrichen
  Z. B. `'Vincent'`, `'Big Kahuna Burger'`, `'mia@wallace.us'`

Variablen

- Strings bestehend aus Buchstaben, Ziffern und Unterstrich beginnend mit Großbuchstaben oder Unterstrich
  Z. B. `X`, `Y`, `Variable`, `_var1`

Zahlen

- Ganzzahlen: Strings bestehend aus Ziffern, ggf. beginnend mit Minus
  Z. B. 1, 65536, -28
- Gleitkommazahlen: Zusätzlich Dezimalpunkt und Exponentialschreibweise
  Z. B. 2.5, -0.000372, 3.1415e-3

Übung: Einfache Terme

Übung 5.5

Sind die folgenden Ausdrücke Atome, Variablen oder keins von beidem?

1. `vINCENT`
2. `Footmassage`
3. `variable23`
4. `Variable2000`
5. `big_kahuna_burger`
6. `'big kahuna burger'`
7. `big kahuna burger`
8. `'Jules'`
9. `_Jules`
10. `'_Jules'`

Komplexe Terme

Funktor muss Atom sein

Argumente können beliebige Terme sein (auch komplexe)

- getrennt durch Komma
- eingeschlossen in Klammern
- Anzahl der Argumente: Stelligkeit
- kein Leerzeichen zwischen Funktor und Klammer

Beispiel 5.6

```
loves(marsellus, mia)
woman(mia)
eats(jules, big_kahuna_burger)
```

```
knows(koons, father(butch))
loves(vincent, wife(marsellus))
less(zero, s(s(s(zero))))
```

Stelligkeit von Funktoren

Prädikatenlogik

- Funktionssymbol $f^{(i)}$ hat feste Stelligkeit i
- $f^{(1)}(x, y)$ ist syntaktisch falsch

Prolog

- Atom `f` kann mit unterschiedlichen Stelligkeiten verwendet werden
- `f(x)` und `f(x,y)` können parallel verwendet werden
- Notation: `f/1` bzw. `f/2`
- Zwischen `f/1` und `f/2` besteht kein Zusammenhang
  - aus `mother(john,anna)` folgt nicht `mother(anna)`

Prädikate und Funktionssymbole

Definition 5.7 (Prädikat)

Ein Prädikat ist ein Atom, das als äußerster Funktor in einem komplexen Term in der Wissensbank vorkommt.

Prädikatenlogik
- Funktionssymbol $\rightsquigarrow$ Term $\rightsquigarrow$ Domänenelement
- Prädikat $\rightsquigarrow$ Atom $\rightsquigarrow$ Wahrheitswert

Prolog
- keine syntaktische Unterscheidung zwischen Funktionssymbolen und Prädikaten
- Faustregel:
  - Äußerster Funktor: Prädikat
  - Innere Funktoren: Funktionssymbole

Beispiel 5.8

- `knows(koons, father(butch)).`
  - `knows` ist zweistelliges Prädikat
  - `father` ist einstelliges Funktionssymbol (“Der Vater von Butch”)
- `father(butch).`
  - `father` ist einstelliges Prädikat (“Butch ist ein Vater.”)

Übung 5.9

Sind die folgenden Ausdrücke Atome, Variablen, komplexe Terme oder nichts von allem?

1. `loves(Vincent,mia)`
2. `'loves(Vincent,mia)'`
3. `Butch(boxer)`
4. `boxer(Butch)`
5. `and(big(burger),kahuna(burger))`
6. `and(big(X),kahuna(X))`
7. `_and(big(X),kahuna(X))`
8. `(Butch kills Vincent)`
9. `kills(Butch Vincent)`
10. `kills(Butch, Vincent`
11. `kills(Butch, Vincent)`
12. `kills(Butch(X), Vincent(Y))`

Zusammenfassung: Terme

Einfacher Term	Atom	beginnt mit Kleinbuchstabe entspricht Funktionssymbol oder Prädikat in Prädikatenlogik
	Variable	beginnt mit Großbuchstabe oder Unterstrich
	Zahl	Ganzzahl oder Gleitkommazahl
Komplexer Term	besteht aus	
	Funktor	Atom
	Argumente	beliebige Terme
Prädikat	Äußerster Funktor eines komplexen Terms	

Inhalt

Goals

Definition 5.10 (Goal)

Jedes Atom und jeder komplexe Term ist ein Goal.

- entspricht prädikatenlogischem Atombegriff
- in Wissensbank: Aussage über Domäne
- als Anfrage: Frage zur Domäne

Beispiel 5.11 (Goals)

Term	Aussage	Anfrage
`rain`	Es regnet.	Regnet es?
`woman(mia)`	Mia ist eine Frau.	Ist Mia eine Frau?
`mother(john,anna)`	Johns Mutter ist Anna.	Ist Anna Johns Mutter?
`age(john,12)`	John hat das Alter 12.	Hat John das Alter 12?

Keine Goals: Zahlen, Variablen

Fakten und Anfragen

Fakten

Syntax <Goal>.

Semantik Der Fakt gilt in der Domäne.

Anfragen

Syntax <Goal>.

Semantik Gilt die Aussage in der Domäne?

Beispiel 5.12

Wissensbank

```
woman(mia).
woman(jody).
woman(yolanda).
dances(jody).
party.
```

Beispiel 5.13

Interpreter

```
?- woman(mia).
true.
?- dances(jody).
true.
?- dances(mia).
false.
?- party.
true.
```

Closed World Assumption

Beispiel 5.14

Wissensbank

```
dances(jody).
```

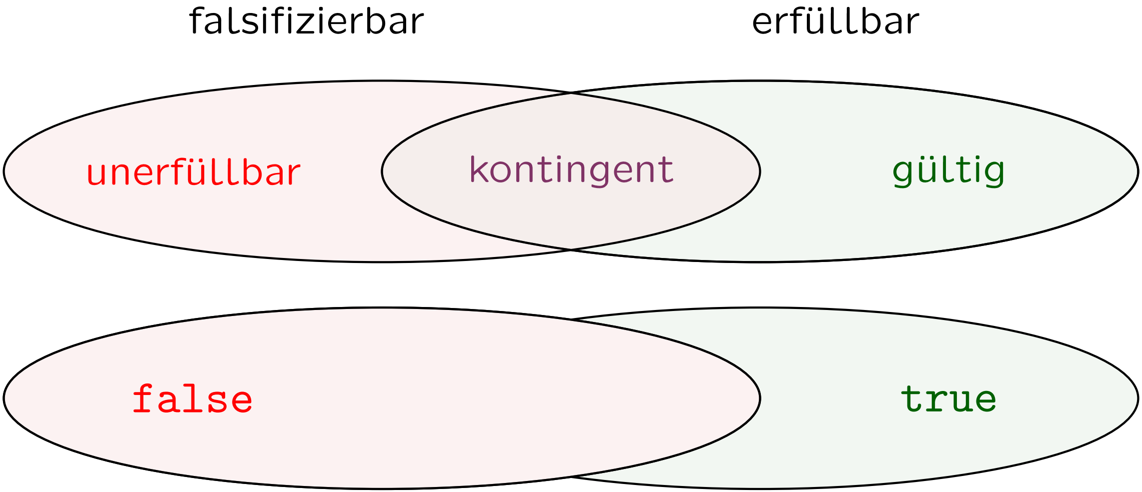
Interpreter

```
?- dances(jody).
true.
?- dances(mia).
false.
```

- Antwort **`true`** bedeutet: Anfrage ist gültig
  - In jedem Modell der KB gilt auch die Anfrage
- Antwort **`false`** bedeutet: Anfrage ist falsifizierbar
  - Es gibt ein Modell der KB, in dem die Anfrage nicht gilt.
  - Antwort **`false`** bedeutet nicht, dass aus der KB folgt, dass Mia nicht tanzt.
  - Sondern: Aus der KB folgt nicht, dass Mia tanzt.

Definition 5.15 (Closed World Assumption)

Alle Aussagen, die nicht mit Sicherheit aus der KB folgen, werden als **`false`** betrachtet.


falsifizierbar
erfüllbar
unerfüllbar
kontingent
gültig
false
true

Regeln

Syntax <Kopf> `:-` <Rumpf> .
Kopf und Rumpf: Goals

Semantik Kopf **wenn** Rumpf
Der Rumpf impliziert den Kopf.

Beispiel 5.16

Wissensbank

```
works(jules).
hungry(vincent).
hungry(jules) :- works(jules).
eats(vincent) :- hungry(vincent).
eats(jules) :- hungry(jules).
```

Interpreter

```
?- eats(vincent).
true.
?- eats(jules).
true.
```

- 2 Fakten
- 3 Regeln

Fakt kann als Regel mit leerem Rumpf aufgefasst werden: `works(jules) :- true.`

Konjunktion in Regeln

Syntax <Kopf> :- <Rumpf>
Kopf: Goal
Rumpf: <Goal1> **,** <Goal1> **,** . . . .

Semantik Kopf wenn Goal1 **und** Goal2 **und** . . .
Konjunktion der Goals im Rumpf impliziert den Kopf.

Beispiel 5.17

Wissensbank

```
happy(butch).
hungry(vincent).
eats(butch) :- happy(butch), hungry(butch).
eats(vincent) :- happy(vincent).
eats(vincent) :- hungry(vincent).
```

Interpreter

```
?- eats(butch).
false.
?- eats(vincent).
true.
```

Disjunktion

Syntax <Kopf> :- <Rumpf>
Kopf: <Goal>
Rumpf: <Goal1> ; <Goal1> ; . . . .

Semantik Kopf wenn Goal1 oder Goal2 oder . . .
Disjunktion der Goals im Rumpf impliziert den Kopf.

Beispiel 5.18

Wissensbank

```
happy(butch).
hungry(vincent).
eats(butch) :- happy(butch), hungry(butch).
eats(vincent) :- happy(vincent); hungry(vincent).
```

Interpreter

```
?- eats(butch).
false.
?- eats(vincent).
true.
```

Konvention: Statt Semikolon mehrere Regeln verwenden $\rightsquigarrow$ bessere Lesbarkeit

Variablen in Anfragen

- können vom Nutzer als Argumente eines Funktors verwendet werden
- können vom Interpreter an Terme gebunden werden
- gebundene Variable kann Wert nie mehr ändern
- Variablenbindung wird zurückgegeben
- Suche nach anderen Bindungen: ; eingeben

Beispiel 5.19

Wissensbank

```
woman(mia).
woman(jody).
woman(yolanda).
```

Interpreter

```
?- woman(X).
X = mia ;
X = jody ;
X = yolanda.
```

Konjunktive Anfragen

- Anfragen mit mehreren Goals, getrennt durch Komma
- Variablenbindung muss alle Goals gleichzeitig wahr machen

Beispiel 5.20

Wissensbank

```
woman(mia).
woman(jody).
woman(yolanda).

loves(vincent, mia).
loves(marsellus, mia).
loves(pumpkin, honey_bunny).
loves(honey_bunny, pumpkin).
```

Interpreter

```
?- loves(marsellus,X), woman(X).
X = mia.
?- loves(pumpkin,X), woman(X).
false.
```

Variablen in der Wissensbank

- Klauseln in der Wissensbank können Variablen enthalten
- Diese sind implizit universell quantifiziert

Beispiel 5.21

Wissensbank

```
loves(vincent,mia).
loves(marsellus,mia).
loves(pumpkin, honey_bunny).
loves(honey_bunny, pumpkin).

jealous(X,Y):- loves(X,Z), loves(Y,Z).

human(X).
```

Interpreter

```
?- jealous(marsellus, W).
W = vincent ;
W = marsellus.
?- human(vincent).
true.
```

Mit welcher Anfrage erhält man alle Eifersüchtigen?

Übung 5.22

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen als Prolog-Wissensbank:

1. Butch ist ein Killer.
2. Marsellus und Mia sind miteinander verheiratet.
3. Zed ist tot.
4. Marsellus tötet jeden, der Mia die Füße massiert.
5. Mia liebt jeden guten Tänzer.
6. Jules isst alles, was nahrhaft oder lecker ist.

Übung 5.23

Gegeben sei die folgende Wissensbank:

```
hasWand(harry).
quidditchPlayer(harry).
wizard(ron).
wizard(X) :- hasBroom(X), hasWand(X).
hasBroom(X) :- quidditchPlayer(X).
```

Welche Antworten gibt der Interpreter auf die folgenden Anfragen?

1. `wizard(ron).`
2. `wizard(hermione).`
3. `wizard(harry).`
4. `wizard(X).`

Zusammenfassung: Fakten, Regeln und Anfragen

Goal Atom oder komplexer Term

Fakt <Goal>.

Regel <Goal> `:-` <Goal> [, <Goal> ...] .

Anfrage <Goal> [, <Goal> ...] .

- erfolgreich: `true` oder Variablenbindung
  weitere Antworten mit ;
- nicht erfolgreich: `false`

Variablen

- in Wissensbank: universell quantifiziert („Jede Frau ist ein Mensch.“)
- in Anfrage: existentiell quantifiziert („Gibt es einen Menschen?“)

Inhalt

Unifikation

Definition 5.24

Prolog-Terme t und s sind unifizierbar, wenn es eine Substitution σ gibt, die die in s und t enthaltenen Variablen so an Terme bindet, dass $\sigma(t) = \sigma(s)$ gilt.

Unterschiede zur Unifikation in der Prädikatenlogik

- keine strikte Trennung zwischen Funktionssymbolen und Prädikaten
  `X` ist unifizierbar mit `woman(mia)`.
- kein Occurs-Check
  `X` ist unifizierbar mit `father(X)`.
  Abhilfe: `unify_with_occurs_check(X,father(X))`.

Unifikation und Stelligkeit

Wissensbank

```
married(marsellus,mia).
```

Interpreter

```
?- married(X).
ERROR: Unknown procedure: married/1
```

Das Prädikat =/2

- ist erfolgreich, wenn die beiden Argumente unifizierbar sind
- gibt die für die Unifikation notwendigen Variablenbindungen zurück

Beispiel 5.25

Interpreter

```
?- X = mia.
X = mia.
?- woman(X) = woman(mia).
X = mia.
?- loves(X,vincent) = loves(mia,X).
false.
?- loves(mia,vincent) = loves(X,X).
false.
?- knows(father(vincent),X) = knows(Y,mother(mia)).
X = mother(mia), Y = father(vincent).
```

Übung: Unifikation

Übung 5.26

Wie beantwortet der Prolog-Interpreter die folgenden Anfragen?

1. `bread = bread.`
2. `'Bread' = bread.`
3. `'bread' = bread.`
4. `Bread = bread.`
5. `bread = sausage.`
6. `food(bread) = bread.`
7. `food(bread) = X.`
8. `food(X) = food(bread).`
9. `food(bread,X) = food(Y,sausage).`
10. `food(bread,X,beer) = food(Y,sausage,X).`
11. `food(bread,X,beer) = food(Y,kahuna_burger).`
12. `food(X) = X.`
13. `meal(food(bread),drink(beer)) = meal(X,Y).`
14. `meal(food(bread),X) = meal(X,drink(beer)).`

Das Prädikat \=

- zweistellig (\=/2)
- Negation von =
- gibt `false` zurück, wenn die Argumente unifizierbar sind
- gibt `true` zurück, wenn die Argumente nicht unifizierbar sind
- gibt nie Variablenbindungen zurück

Beispiel 5.27

```
?- mia \= vincent.
true.
?- a \= b.
true.
?- a \= a.
false.
?- a \= B.
false.
? B = b, a \= B.
B = b.
```

Unifikation für Anfragen

Ein Goal einer Anfrage wird unifiziert

- mit den Fakten der Wissensbank
- mit den Regel-Köpfen der Wissensbank

Beispiel 5.28

Wissensbank

```
vertical(line(point(X,Y), point(X,Z))).
horizontal(line(point(X,Y), point(Z,Y))).
```

Interpreter

```
?- horizontal(line(point(1,2), point(3,W))).
W = 2.
?- horizontal(line(point(2,3), Point)).
Point = point(_G2239,3).
```

- _G2239 ist ungebundende interne Variable
- Bedeutung: Jede Bindung führt zum Erfolg

Übung 5.29

Gegeben sei die folgende Wissensbank:

```
house_elf(dobby).
witch(hermione).
witch('McGonagall').
wizard(ron).
magic(X):- house_elf(X).
magic(X):- wizard(X).
magic(X):- witch(X).
```

Welche Antworten erzeugen die folgenden Anfragen?

1. `magic(house_elf).`
2. `wizard(harry).`
3. `magic(wizard).`
4. `magic('McGonagall').`
5. `magic(Hermione).`

Die anonyme Variable _

- ist mit jedem Term unifizierbar
- kann bei jedem Vorkommen unterschiedlich gebunden werden
- Bindung wird nicht zurückgegeben
- Zweck: Platzhalter für Terme, die uninteressant sind

Beispiel 5.30

Wissensbank

```
married(mia,marsellus).

married(X) :- married(X,_).
married(X) :- married(_,X).
```

Interpreter

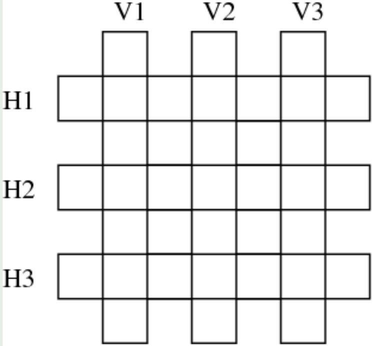
```
?- married(X,Y).
X = mia, Y = marsellus.
?- married(X,X).
false.
?- married(_,_).
true.
?- married(X).
X = mia ;
X = marsellus.
```

Übung 5.31

Gegeben sind die folgenden 6 italienischen Wörter:

astante, astoria, baratto, cobalto, pistola, statale.

Schreiben Sie ein Prädikat `crossword/6`, das diese Wörter wie in einem Kreuzworträtsel in das Schema rechts einträgt, so dass die Anfrage `crossword(V1,V2,V3,H1,H2,H3)` eine korrekte Belegung der Zeilen und Spalten ausgibt.



Verwenden Sie hierzu die folgende Wissensbank:

```
word(astante, a,s,t,a,n,t,e).
word(astoria, a,s,t,o,r,i,a).
word(baratto, b,a,r,a,t,t,o).
word(cobalto, c,o,b,a,l,t,o).
word(pistola, p,i,s,t,o,l,a).
word(statale, s,t,a,t,a,l,e).
```

Termgleichheit: Das Prädikat ==

Prädikat = testet, ob Argumente unifizierbar sind

Prädikat == testet, ob Argumente bereits gleich sind

- zweistellig
- gibt **true** zurück, wenn beide Argumente derselbe Term sind
- bindet nie Variablen
- berücksichtigt bereits bestehende Variablenbindungen
- Negation: \==

Beispiel 5.32

`a = a.`	**true.**	`a == a.`	**true.**
`a = b.`	**false.**	`a == b.`	**false.**
`a = B.`	**B = a.**	`a == B.`	**false.**
`a = B, a = B.`	**B = a.**	`a = B, a == B.`	**B = a.**
`vincent = 'vincent'.`	**true.**	`vincent == 'vincent'.`	**true.**
`Vincent = 'Vincent'.`	**Vincent = 'Vincent'.**	`Vincent == 'Vincent'.`	**false.**

Übung: Unifikation und Gleichheit

Übung 5.33

Wie beantwortet der Prolog-Interpreter die folgenden Anfragen?

1. `married(X,Y) = married(Y,X).`
2. `married(X,Y) == married(Y,X).`
3. `married(X,Y) = married(Y,X), married(X,Y) == married(Y,X).`
4. `married(X,Y) == married(Y,X), married(X,Y) = married(Y,X).`
5. `married(X,Y) \== married(Y,X), married(X,Y) = married(Y,X).`
6. `married(X,Y) == married(Y,X), married(X,Y) \= married(Y,X).`
7. `married(X,Y) \== married(Y,X), married(X,Y) \= married(Y,X).`
8. `loves(X,Y) = loves(mia,mia).`
9. `loves(X,X) = loves(Y,lover(Y)).`
10. `loves(X,X) = loves(mia,lover(mia)).`

Ganzzahl-Arithmetik

- Das Prädikat `=/2` führt Unifikation durch
  - Anfrage `X = 2 + 3` liefert Antwort `X = 2 + 3`
  - kann nicht für Rechnungen genutzt werden
- Das Prädikat `is/2` führt arithmetische Operationen durch
  - `X is 2 + 3` liefert Antwort `X = 5`
- Funktionsweise:
  - rechte Seite wird arithmetisch ausgewertet
  - Ergebnis wird mit linker Seite unifiziert
- Integer-Operatoren: `+`, `-`, `*`, `div`, `mod`
  - Operator `/` liefert nicht immer Ganzzahlen
  - „Punkt vor Strich" wird respektiert
  - Klammern sind erlaubt
- Infix- und Präfix-Notation sind gleichwertig
  `X is 1 + 2 * 3` ist derselbe Term wie
  `is(X,+(1,*(2,3)))`
- Operatoren führen keine Berechnungen durch
  - `+(2,3)` ist ein komplexer Term wie `mother(john, mary)`
  - Berechnung erfolgt erst durch `is`

Beispiel 5.34

Interpreter

```
?- X is 1 + 2 * 3.
X = 7.
?- X is (1 + 2) * 3.
X = 9.
?- X is 7 div 3.
X = 2.
?- X is 7 mod 3.
X = 1.
?- 7 is 1 + 2 * 3.
true.
```

Verwendung von `is` in Prädikaten

Beispiel 5.35

Wissensbank

```
square(X,Y) :- Y is X * X.
inc(X,Y) :- Y is X + 1.
addThreeAndDouble(X, Y) :- Y is (X+3) * 2.
```

Interpreter

```
?- square(-5,Y).
Y = 25.
?- inc(6,Y).
Y = 7.
?- addThreeAndDouble(3,Y).
Y = 12.
```

Häufige Fehlerquellen

- alle Variablen auf rechter Seite müssen gebunden sein

```
?- X is Y + 2.
ERROR: Arguments are not sufficiently instantiated
```

- rechte Seite muss korrekter arithmetischer Ausdruck sein

```
?- X is 5 + z.
ERROR: Arithmetic: ‘z/0’ is not a function
```

- linke Seite wird nicht ausgewertet

```
?- 1 + 2 is 1 + 2.
false.
```

Der Term `3` ist nicht unifizierbar mit `1 + 2`

Vergleichsprädikate

Arithmetik	Prolog
$x < y$	`X < Y`
$x \leq y$	`X =< Y`
$x = y$	`X =:= Y`
$x \neq y$	`X =\= Y`
$x \geq y$	`X >= Y`
$x > y$	`X > Y`

- Funktionsweise:
  1. Beide Seiten werden arithmetisch ausgewertet
  2. Ergebnisse werden verglichen
  3. Abhängig vom Ergebnis ist das Goal erfolgreich oder scheitert
- Beide Seiten müssen korrekte arithmetische Terme sein
- Keine Seite darf ungebundene Variablen enthalten
- Vorsicht: Es heißt =< und nicht <=!

Beispiel 5.36

```
?- 1 + 2 =:= 2 + 1.
true.
?- 3 > 5.
false.
?- 2 + 3 =\= 5.
false.
?- 4 >= 4.
true.
```

```
?- X + 2 =< X + 3.
ERROR: Arguments are not sufficiently instantiated
?- X = 17, X + 2 =< X + 3.
X = 17.
?- X = 3 + Y, Y = 2 * 4, X + 2 =:= 3 + 2 * 5.
X = 3 + 2 * 4, Y = 2 * 4.
?- X =:= 2 + 3.
ERROR: Arguments are not sufficiently instantiated
```

Übung 5.37

Welche Antworten liefern die folgenen Anfragen?

1. `14 is 2 * 7.`
2. `14 =\= 2 * 6.`
3. `14 = 2 * 7.`
4. `14 == 2 * 7.`
5. `14 \== 2 * 7.`
6. `14 =:= 2 * 7.`
7. `14 \= X * Y.`
8. `2 + 3 == 3 + 2.`
9. `2 + 3 =:= 3 + 2.`
10. `7 - 2 =\= 9 - 2.`
11. `p == 'p'.`
12. `p =\= 'p'.`
13. `vincent == VAR.`
14. `vincent = VAR, VAR == vincent.`

Zusammenfassung: Unifikation, Termgleichheit und Arithmetik

- Unifikation bindet Variablen an andere Terme
  - implizit bei Suche nach passendem Goal in Wissensbank
  - explizit durch Prädikat `=`
- Anonyme Variable `_` kann bei jedem Auftreten neu gebunden werden
- Prädikat `==` testet Termgleichheit
  - bindet keine Variablen
- Prädikat `is` wertet rechte Seite aus und unifiziert Ergebnis mit linker Seite
- Prädikate `=:=`, `=\=`, `>`, `<`, `>=`, `=<` werten beide Seiten aus und vergleichen Ergebnisse

Inhalt

$$R_1 \land R_2 \land \ldots \land R_n \to K$$

- erstmals beschrieben 1951 von Alfred Horn
- erlauben effiziente Schlussfolgerungsverfahren
  - Aussagenlogik: P-vollständig statt NP-vollständig
  - Prädikatenlogik: weniger Verzweigungen

Definition 5.38

Eine prädikatenlogische Horn-Formel hat die Form
Rumpf $\to$ Kopf, wobei

Kopf ein Atom oder **F** ist;

Rumpf eine Konjunktion von Atomen oder **W** ist.

Eine Horn-Klausel ist eine in KNF transformierte Horn-Formel.

Alfred Horn
(1918–2001)

Arten von Horn-Klauseln

	Kopf ist Atom definite Klausel	Kopf ist $\mathbf{F}$ Ziel-Klausel
Rumpf ist Konjunktion	$B(x,y) \wedge K(y,z) \rightarrow O(z,x)$ $\{\neg B(x,y), \neg K(y,z), O(z,x)\}$ Regel-Klausel	$K(x,y) \wedge W(x) \rightarrow \mathbf{F}$ $\{\neg K(x,y), \neg W(x)\}$ Anfrage-Klausel
Rumpf ist **W**	$\mathbf{W} \rightarrow B(a,b)$ $\{B(a,b)\}$ Fakten-Klausel	$\mathbf{W} \rightarrow \mathbf{F}$ $\{\}$ leere Klausel

- Horn-Klauseln haben höchstens ein positives Literal
- Resolution von zwei definiten Klauseln erzeugt eine definite Klausel
- Resolution einer Anfrage- mit einer definiten Klausel erzeugt eine Zielklausel
- Resolution von zwei Zielklauseln ist nicht möglich

Beispiel 5.39

Klausel	Prolog-Syntax	Logik-Syntax	natürliche Sprache
Fakt	`human(vincent)`	$H(v)$	Vincent ist ein Mensch.
	`male(vincent)`	$M(v)$	Vincent ist männlich.
	`human(mia)`	$H(m)$	Mia ist ein Mensch.
	`female(mia)`	$F(m)$	Mia ist weiblich.
Regel	`woman(X) :- human(X),female(X)`	$\forall x(H(x) \land F(x) \rightarrow W(x))$	Wer menschlich und weiblich ist, ist eine Frau.
Anfrage	`woman(X)`	$\exists x W(x)$	Gibt es eine Frau?

- Gesuchte Antwort: Folgt die Anfrage Q aus der Wissensbank K?
  - teste mittels Resolution die Erfüllbarkeit $K \land \neg Q$
  - im Beispiel: $\forall x \neg W(x)$
- Negation wird in Prolog nicht explizit angegeben
  - Regelköpfe (einschließlich Fakten) sind positiv
  - Regelrümpfe und Anfragen sind implizit negiert

Horn-Resolution

SLD-Resolution

- **Selective** Wähle nächstes Literal (In Prolog: zuletzt eingeführtes)
- **Linear** Erste Elternklausel ist zuletzt erzeugte Zielklausel
- **Definite clause** Zweite Elternklausel ist definite Klausel

Methode

- lege Atome (Goals) der Anfrage auf Stack
- unifiziere oberstes Goal mit allen Regelköpfen
- wenn erfolgreich: ersetze Goal durch Regelrumpf (evtl. mehrere Möglichkeiten)
- wenn Stack leer: Anfrageklausel ist unerfüllbar bzgl. Wissensbank

Vorteile

- weniger Unifikationen: Nur gewähltes Literal mit Köpfen der definiten Klauseln
- weniger erzeugte Klauseln: Nur eine Resolvente pro Anfrage-Klausel

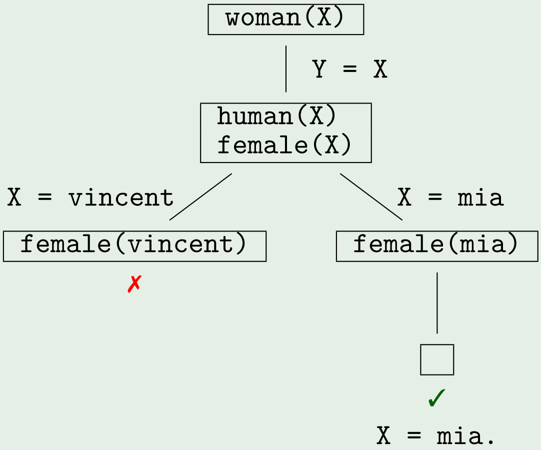
Beispiel 5.40

Wissensbank

```
human(vincent).
male(vincent).

human(mia).
female(mia).

woman(Y) :- human(Y), female(Y).
```



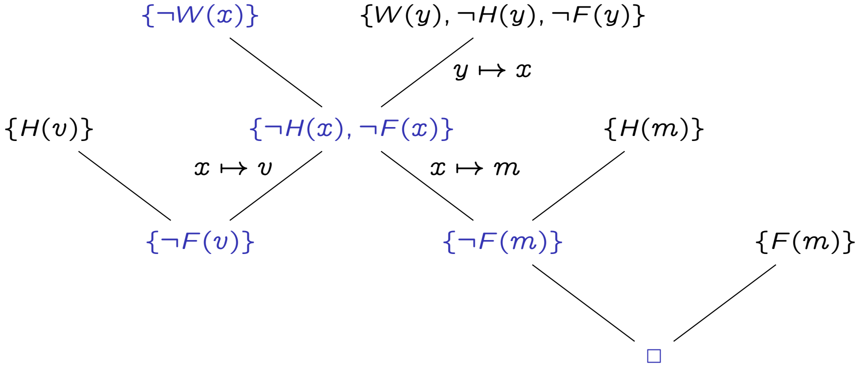
Eingabe: Anfrage-Klausel Q, Wissensbank K
Ausgabe: Variablenbindung, falls $K \models Q$ gilt, sonst `false`

initialisere Stack S mit Goals aus Q
while S ist nicht leer **do**
  $G := \text{pop}(S)$; $i := 0$
  for all Klausel C in K **do**
    $\sigma_i := \text{unify}(G, \text{kopf}(C))$
    if σ_i existiert **then**
      $C_i := C$; $i := i + 1$
  if $i \geq 1$ **then**
    if $i \geq 2$ **then**
      lege Verzweigungspunkt an: Speichere C_i und σ_i für alle $i \geq 2$
    $\text{push}(S, \text{rumpf}(C_1))$
    Wende σ_1 auf alle Goals in S an
  else
    if Verzweigungspunkt B vorhanden **then**
      Backtrack zu B; Weiter mit nächstem C_i
    else
      return `false`
return Variablenbindungen

Vergleich mit Resolutionsgraph

Signatur: $(\{m^{(0)}, v^{(0)}\}, \{W^{(1)}, H^{(1)}, F^{(1)}\})$

Ziel-Klauseln (Stack) definite Klauseln (Wissensbank)



Übung: Suchbaum

Übung 5.41

Gegeben sei die Wissensbank aus Übung 5.29:

```
house_elf(dobby).
witch(hermione).
witch('McGonagall').
wizard(ron).

magic(X):- house_elf(X).
magic(X):- wizard(X).
magic(X):- witch(X).
```

Zeichnen Sie den Suchbaum für die Anfrage

```
?- magic(A).
```

Übung 5.42

Gegeben sei die folgende Wissensbank:

```
brother(albert,arthur).
brother(arthur,albert).
brother(beth,bob).

child(albert,beth).
child(beth,charlie).

uncle(X,Y):- brother(Z,Y), child(Z,X).
```

Zeichnen Sie den Suchbaum für die Anfrage

```
?- uncle(A,B).
```

Zusammenfassung: Horn-Resolution

Horn-Formel $R_1 \wedge R_2 \wedge \ldots \wedge R_n \rightarrow K$

Horn-Klausel $\neg R_1 \vee \neg R_2 \vee \ldots \vee \neg R_n \vee K$

definite Klausel genau ein positives Atom

- **Regel** mindestens ein negatives Atom
- **Fakt** kein negatives Atom

Zielklausel kein positives Atom

- **Anfrage** mindestens ein negatives Atom
- **leere Klausel** kein negatives Atom

Horn-Resolution

- beginnt mit Anfrage
- unifiziert erstes Goal mit Regel-Köpfen
- ersetzt erstes Goal durch Regel-Rumpf
- solange, bis alle Goals abgearbeitet sind (`true`) oder keine Unifikation möglich ist (`false`)

Suchbaum

- Stack von Goals
- Verzweigungspunkte bei mehreren Unifikationen
- Backtracking

Inhalt

Rekursion und Iteration

Beispiel 5.43 (Fakultät iterativ)

```
int ifac (int n)
{
  int fac = 1;
  for (int i = 1; i <= n; i++)
    fac = fac * i;
  return fac;
}
```

Beispiel 5.44 (Fakultät rekursiv)

```
int rfac (int n)
{
  if (n == 0)
    return 1;
  else
    return n * rfac (n-1);
}
```

> *To iterate is human, to recurse divine.*
>
> L Peter Deutsch

Definition 5.45

Ein Prolog-Prädikat `p` ist rekursiv, wenn in einer Regel, die `p` als Kopf hat, im Rumpf ebenfalls `p` vorkommt.

Beispiel 5.46

Wissensbank

```
child(anna,betty).
child(betty,carol).
child(carol,donna).

descend(X,Y):- child(X,Y).
descend(X,Y):- child(X,Z), descend(Z,Y).
```

Interpreter

```
?- descend(anna,betty).
true.
?- descend(anna,carol).
true.
?- descend(anna,donna).
true.
```

Suchbaum für descend(anna,donna).

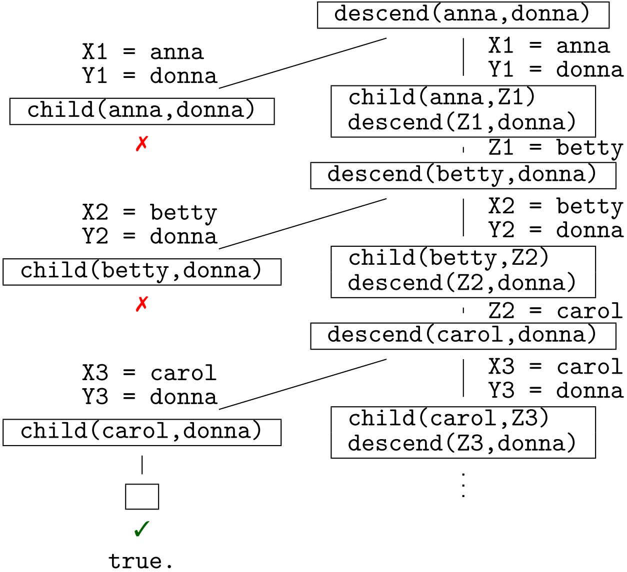
Wissensbank

```
child(anna,betty).
child(betty,carol).
child(carol,donna).

% Basisklausel
descend(X,Y):- child(X,Y).
% Rekursive Klausel
descend(X,Y):- child(X,Z),
  descend(Z,Y).
```

Variablenumbenennung

Bei jeder Unifikation werden die Variablen aus der Wissensbank umbenannt.



Übung: descend

Übung 5.47

Ändert sich etwas an der Funktion des Prädikats **descend/2**, wenn man die rekursive Klausel

```
descend(X,Y) :- child(X,Z), descend(Z,Y).
```

durch

```
descend(X,Y) :- descend(X,Z), descend(Z,Y).
```

ersetzt?

Zahlen in logischer Notation

Peano-Axiome:

1. Null ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl hat eine natürliche Zahl als Nachfolger.

Beispiel 5.48

Wissensbank

```
numeral(0).
numeral(s(X)):- numeral(X).
```

Interpreter

```
?- numeral(s(s(s(0)))).
true.
?- numeral(X).
X = 0 ;
X = s(0) ;
X = s(s(0))
...
```

Addition in logischer Notation

Beispiel 5.49

Wissensbank

```
% Basisklausel
add(0,X,X).
% Rekursive Klausel
add(s(X),Y,s(Z)) :- add(X,Y,Z).
```

Intuitiv:

- „Die Summe von `0` und `X` ist `X`."
- „Die Summe vom Nachfolger von `X` und `Y` ist der Nachfolger der Summe von `X` und `Y`."

Interpreter

```
?- add(s(s(0)),s(s(s(0))),Sum).
Sum = s(s(s(s(s(0))))).
```

Übung 5.50

Zeichnen Sie den Suchbaum für die Anfrage

```
?- add(s(s(0)),s(s(s(0))),Sum).
```

Übung 5.51

Gegeben sei die logische Notation für natürliche Zahlen aus Beispiel 5.48.

Schreiben Sie ein Prädikat `less/2`, das genau dann gilt, wenn das erste Argument echt kleiner ist als das zweite, also:

```
?- less(0,s(s(0))).
true.
?- less(s(0),s(0)).
false.
```

Testen Sie Ihr Programm auch mit Variablen als Parametern.

Unterschiede zwischen Prolog und Logik

Prädikatenlogik
- $\wedge$ und $\vee$ sind kommutativ
- $P(x) \wedge B(x, y) \vee C(z)$ ist äquivalent zu $C(z) \vee B(x, y) \wedge P(x)$

Prolog
- Goals auf dem Stack werden von oben nach unten verarbeitet
- Wissensbank wird von oben nach unten durchsucht
- `child(X,Y),descend(Y,Z)` und `descend(Y,Z),child(X,Y)` sind logisch äquivalent, aber prozedural unterschiedlich

Wünschenswert für rekursive Prädikate:

- Basisklausel vor rekursiver Klausel
- Rekursives Goal als letztes im Rumpf (tail-rekursiv)

Varianten von descend/2

Beispiel 5.52 (Korrektes Prädikat)

```
descend(X,Y):- child(X,Y).
descend(X,Y):- child(X,Z),descend(Z,Y).
```

`descend(X,Y).` $\rightsquigarrow$ 6 Antworten:

1 **X = anna, Y = betty**

6 **X = betty, Y = donna**

Beispiel 5.53 (Klauseln vertauscht)

```
descend(X,Y):- child(X,Z),descend(Z,Y).
descend(X,Y):- child(X,Y).
```

`descend(X,Y).` $\rightsquigarrow$ 6 Antworten:

1 **X = anna, Y = donna**

6 **X = carol, Y = donna.**

Beispiel 5.54 (Goals vertauscht)

```
descend(X,Y):- child(X,Y).
descend(X,Y):- descend(Z,Y),child(X,Z).
```

`descend(X,Y).` $\rightsquigarrow$ 6 Antworten, dann Fehler:

1 **X = anna, Y = betty**

6 **X = anna, Y = donna**

ERROR: Out of local stack

Beispiel 5.55 (Beides vertauscht)

```
descend(X,Y):- descend(Z,Y),child(X,Z).
descend(X,Y):- child(X,Z).
```

`descend(X,Y).` $\rightsquigarrow$ Fehler:
ERROR: Out of local stack

Zusammenfassung: Rekursion

- Rekursive Regel: Kopf-Prädikat taucht im Rumpf auf
- notwendig für leistungsfähige Programme
- für Suchbaum: Variablen umbenennen
- kann zu nicht terminierenden Programmen führen
- Abhilfe:
  - in Wissensbank: zuerst nicht-rekursive Klausel
  - im Regel-Rumpf: zuerst nicht-rekursive Goals (Tail-Rekursion)

`[ Head | Tail ]`

`Head`
- erstes Element der Liste
- beliebiger Prolog-Term (Variable, Atom, Zahl, komplexer Term)

`Tail`
- Rest der Liste
- alles bis auf das erste Element
- ist immer eine Liste

`[ ]`
- leere Liste
- hat weder Head noch Tail
- ähnlich Null-Pointer

Beispiel 5.56 (Liste mit 3 Elementen)

`[ vincent | [ mia | [ jules | [ ] ] ] ]`
ist die Liste bestehend aus den Atomen `vincent`, `mia` und `jules`.

Alternative Darstellung

Aufzählung der Elemente

- `[vincent, mia, jules]`
- oft besser lesbar als Head-Tail-Notation
- Notationen können gemischt werden: `[vincent, mia | [jules]]`

Beispiel 5.57

```
?- [Head | Tail] = [vincent,mia,jules].
Head = vincent, Tail = [mia,jules].
?- [Head | Tail] = [mia].
Head = mia, Tail = [].
?- [Head | Tail] = [].
false.
?- [First, Second | Rest] = [vincent, mia, jules, marsellus].
First = vincent, Second = mia, Rest = [jules, marsellus].
?- [First, Second] = [mia].
false.
?- [First, Second] = [vincent,mia,jules].
false.
```

Listen als Listen-Elemente

`[ [ ] | [ ] ]`

- erstes Element: leere Liste
- Rest: leere Liste

⇝ Liste, die als einziges Element die leere Liste enthält

⇝ `[ [ ] ]`

`[mia, [vincent, marsellus], [butch, [father(butch), mother(butch)]], [ ]]`

- erstes Element: `mia`
- zweites Element: Liste `[vincent, marsellus]`
- drittes Element: Liste `[butch, [father(butch), mother(butch)]]`
- viertes Element: leere Liste

Übung: Darstellung von Listen

Übung 5.58

Sind die folgenden Ausdrücke syntaktisch korrekte Listen?
Wenn ja, wie viele Elemente haben sie jeweils?

1. `[1|[2,3,4]]`
2. `[1,2,3|[]]`
3. `[1|2,3,4]`
4. `[1|[2|[3|[4]]]]`
5. `[1,2,3,4|[]]`
6. `[[1,2]|4]`
7. `[[1,2],[3,4]|[5,6,7]]`

Übung 5.59

Welche Antworten gibt der Interpreter auf die folgenden Anfragen?

1. `[a,b,c] = [a,[b,c]].`
2. `[a,b,c] = [a|[b,c]].`
3. `[a,b,c] = [a,b,[c]].`
4. `[a,b,c] = [a,b|[c]].`
5. `[a,b,c] = [a,b,c,[]].`
6. `[a,b,c] = [a,b,c|[]].`
7. `[] = _.`
8. `[] = [_].`

Listen als Standard-Datenstruktur

Menge	`[mia, vincent, yolanda, butch]`
Folge	`[1,1,2,3,5,8,13,21]`
Vektor	`[1,0,3,7]`
Matrix	`[[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]]`
Objekt	`['Marsellus','Wallace','3.8.1968','Los Angeles']`
Menge von Objekten	`[['Vincent','Vega'],['Jules','Winnfield']]`
Satz	`[zed,is,dead]`

Das Prädikat `member`

- zweistellig
- erstes Argument: Term `T`
- zweites Argument: Liste `L`
- Resultat: `true`, wenn `T` ein Element von `L` ist, sonst `false`

Beispiel 5.60

```
?- member(a,[a]).
true.
?- member(a,[b,c,d]).
false.
?- member(d,[b,c,d]).
true.
?- member(a, [[a],b]).
false.
?- member(b, [[a],b]).
true.
```

```
?- member(X,[a,b,[c,d],father(butch),Y]).
X = a ;
X = b ;
X = [c,d] ;
X = father(butch) ;
X = Y.
?- member(X,[]).
false.
?- member(X,a).
false.
```

Funktionsweise von `member`

```
member(X,[X|_]).
member(X,[_|T]) :- member(X,T).
```

`X` ist ein Element von `L`, wenn

- `X` das erste Element von `L` ist oder
- `X` ein Element des Rests der Liste ist.

Optimierungen:

- Unifikation im Regelkopf
- Anonyme Variable vermeidet Warnung **`Singleton Variable`**

Übung 5.61

Zeichnen Sie den Suchbaum für die Anfrage

```
?- member(X,[a,father(butch),[c,d]]).
```

Das Prädikat `length`

- zweistellig
- erstes Argument: Liste
- zweites Argument: Länge der Liste

```
length([],0).
length([_|T],X) :- length(T,Y), X is Y + 1.
```

Beispiel 5.62

```
?- length([],X).
X = 0.
?- length([a,b,c],X).
X = 3.
?- length([a,[b,c]],X).
X = 2.
```

```
?- length([a,b],2).
true.
?- length(X,3).
X = [_G578, _G584, _G590].
```

Beispiel 5.63

Wissensbank

```
a2b([],[]).
a2b([a|A],[b|B]):- a2b(A,B).
```

a2b antwortet **true**, wenn

- beide Argumente Listen sind,
- beide Listen gleich lang sind,
- die erste Liste nur aus a besteht,
- die zweite Liste nur aus b besteht.

Interpreter

```
?- a2b([a,a,a],[b,b,b]).
true.
?- a2b([a,a,a],[b,b]).
false.
?- a2b(a,b).
false.
?- a2b([a,t],[b,b]).
false.
?- a2b([a,a,a],X).
X = [b,b,b].
?- a2b([a|T],[b,b,b]).
T = [a,a].
```

Übung: Suchbäume und Prädikate mit Listen

Übung 5.64

Zeichnen Sie den Suchbaum für die Anfrage

Interpreter

```
?- a2b([a,a,a],X).
```

Übung 5.65

Schreiben Sie ein zweistelliges Prädikat `twice`, dessen erstes Argument eine Liste ist, und dessen zweites Argument eine Liste ist, die jedes Element der ersten Liste zweimal enthält.

Interpreter

```
?- twice([1,b,mia],[1,1,b,b,mia,mia]).
true.
?- twice([a,b,c],X).
X = [a,a,b,b,c,c].
```

Das Prädikat append

- dreistellig
- Resultat: `true`, wenn alle Argumente Listen sind und die Konkatenation von erstem und zweiten Argument gleich dem dritten Argument ist
- kann zum Aneinanderhängen und Aufteilen von Listen verwendet werden

```
append([ ],L,L).
append([H|T],L,[H|R]) :- append(T,L,R).
```

- Die Konkatenation der leeren Liste mit einer beliebigen Liste `L` ist gleich `L`.
- Die Konkatenation einer nichtleeren Liste `[H|T]` mit einer Liste `L` hat
  - als Kopf H
  - als Rumpf die Konkatenation von `T` und `L`
- analog zum Prädikat `add/3` in Beispiel 5.49

Suchbaum für append

Beispiel 5.66

Wissensbank

```
append([ ],L,L).
append([H|T],L,[H|R]):-
  append(T,L,R).
```

```
append([a,b,c],[1,2,3],A)
    | H1 = a, T1 = [b,c]
    | L1 = [1,2,3], A = [a|R1]
append([b,c],[1,2,3],R1)
    | H2 = b, T2 = [c]
    | L2 = [1,2,3], R1 = [b|R2]
append([c],[1,2,3],R2)
    | H3 = c, T3 = [ ]
    | L3 = [1,2,3], R2 = [c|R3]
append([ ],[1,2,3],R3)
    | L4 = [1,2,3], R3 = L4
□
✓
A = [a,b,c,1,2,3]
```

```
A = [a|R1]
  = [a|[b|R2]]
  = [a|[b|[c|R3]]]
  = [a|[b|[c|[1,2,3]]]]
  = [a,b,c,1,2,3]
```

Anwendungen von append

Beispiel 5.67

- Konkatenation von Listen

```
?- append([a,b],[c,d],X).
X = [a,b,c,d].
```

- Differenz-Listen

```
?- append([a,b],X,[a,b,c,d]).
X = [c,d].
?- append(X,[c,d],[a,b,c,d]).
X = [a,b] ;
false.
```

- Aufteilungsmöglichkeiten für Listen

```
?- append(X,Y,[a,b,c,d]).
X = [ ], Y = [a,b,c,d] ;
X = [a], Y = [b,c,d] ;
X = [a,b], Y = [c,d] ;
X = [a,b,c], Y = [d] ;
X = [a,b,c,d], Y = [ ] ;
false.
```

Wissensbank

```
prefix(Pre,List):-
  append(Pre,_,List).

suffix(Suf,List):-
  append(_,Suf,List).

sublist(Sub,List):-
  prefix(Pre,List),
  suffix(Sub,Pre).
```

Interpreter

```
?- prefix(X,[a,b,c]).
X = [] ;
X = [a] ;
X = [a, b] ;
X = [a, b, c] ;
false.
?- suffix(X,[a,b,c]).
X = [a, b, c] ;
X = [b, c] ;
X = [c] ;
X = [] ;
false.
```

Interpreter

```
?- sublist(X,[a,b,c]).
X = [] ;
X = [a] ;
X = [] ;
X = [a, b] ;
X = [b] ;
X = [] ;
X = [a, b, c] ;
X = [b, c] ;
X = [c] ;
X = [] ;
false.
```

Übung: Wer hat das Zebra?

Übung 5.68

Eine Straße besteht aus drei Häusern.

- Sie haben die Farben Rot, Grün und Blau.
- Sie werden von einem Engländer, einem Japaner und einem Spanier bewohnt.
- In jedem Haus gibt es ein Haustier: Eine Schnecke, einen Jaguar und ein Zebra.

Wir wissen:

- Der Engländer wohnt im roten Haus.
- Der Jaguar wohnt beim Spanier.
- Der Japaner wohnt rechts vom Halter der Schnecke.
- Der Halter der Schnecke wohnt rechts vom grünen Haus.

Wer hat das Zebra?

Tips:

- Nutzen Sie Listen, um die Straße und deren Häuser zu repräsentieren.
- Nutzen Sie die Prädikate `member` und `sublist`, um die Aussagen zu codieren.

Zusammenfassung: Listen

- `[Head | Tail]`

  Head erstes Element

  Tail Liste der restlichen Elemente
- leere Liste: `[ ]`
- Rekursive Bearbeitung
  - Basisklausel: Bearbeitung der leeren Liste
  - Rekursive Klausel: Bearbeitung des Kopfs, rekursive Bearbeitung des Rumpfs
- wichtige Prädikate: **`member`**, **`length`**, **`append`**

Inhalt

Beispiel 5.69 (Betrag)

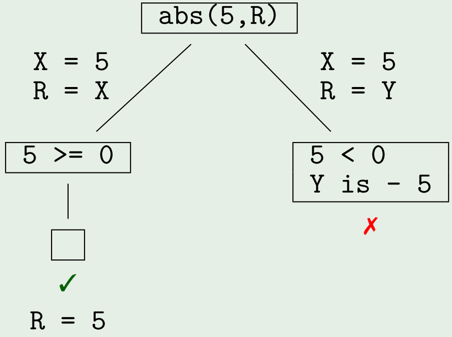
Wissensbank

```
abs(X,X) :- X >= 0.
abs(X,Y) :- X < 0, Y is -X.
```

Interpreter

```
?- abs(-5,R).
R = 5.
```

```
?- abs(5,R).
R = 5 ;
false.
```



- Verzweigungspunkt für jeden Aufruf von `abs`
- Wenn folgendes Goal fehlschlägt ⇝ Backtracking
  Z.B. `abs(5,X), X > 10, ...`
- Backtracking ist sinnlos, da Alternativen sich ausschließen
  - Platzverschwendung durch Verzweigungspunkt
  - Zeitverschwendung durch Backtracking
- Wünschenswert: Verzweigungspunkte verhindern

Eltern- und Subgoals

Definition 5.70 (Eltern-Goal, Subgoal)

Gegeben sei eine Regel mit Kopf K und Rumpf R.
Das Goal in K heißt Eltern-Goal der Goals in R; die Goals in R heißen Subgoals von K.

Beispiel 5.71

Wissensbank

```
a(X):- b(X), c(X), d(X).
```

- `a(X)` ist Eltern-Goal von `b(X)`, `c(X)` und `d(X)`.
- `b(X)`, `c(X)` und `d(X)` sind Subgoals von `a(X)`.

Das Prädikat !

- Name: Cut
- nullstellig
- immer erfolgreich
- entfernt Verzweigungspunkte, die nach dem Aufruf des Eltern-Goals angelegt wurden
  - kein Backtracking vor den Cut
  - bestehende Variablenbindungen werden fixiert
  - keine alternativen Unifikationen
  - keine alternativen Klauseln zur Erfüllung eines Goals
- prozedural, nicht deklarativ
- ermöglicht neue Programmkonstrukte (Negation)
- kann Effizienz erhöhen

Beispiel 5.72 (Betrag mit Cut)

Wissensbank

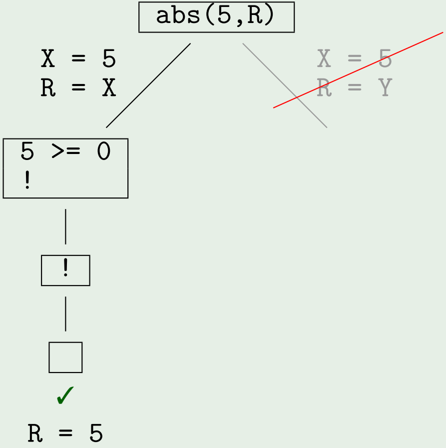
```
abs(X,X) :- X >= 0, !.
abs(X,Y) :- X < 0, Y is -X.
```

Beim Erreichen des Cut:

- Verzweigungspunkt gelöscht
- Variablenbindungen fixiert

Interpreter

```
?- abs(5,R).
R = 5.
```



Übung 5.73

Das einstellige Prädikat **number** gibt genau dann **true** zurück, wenn das Argument eine Zahl ist:

Interpreter

```
?- number(1).
true.
?- number(X).
false.
?- number([1]).
false.
?- number(1+2).
false.
?- X is 1 + 2, number(X).
X = 3.
```

Schreiben Sie ein zweistelliges Prädikat `filter`, das als erstes Argument eine Liste erhält und im zweiten Argument die Liste derjenigen Elemente zurückgibt, die keine Zahlen sind.

Das Prädikat `fail`

- nullstellig
- löst Backtracking aus
- kann zusammen mit Cut zum Beschreiben von Ausnahmen verwendet werden

Beispiel 5.74 („Vincent mag alle Burger außer dem Big Kahuna")

Wissensbank

```
likes(vincent,kahuna) :- !, fail.
likes(vincent,X) :- burger(X).

burger(bigMac).
burger(kahuna).
burger(royale).
```

Interpreter

```
?- likes(vincent,bigMac).
true.
?- likes(vincent,kahuna).
false.
?- likes(vincent,royale).
true.
?- likes(vincent,B).
false.
```

Negation as failure

Closed World Assumption Wahr ist nur, was aus der Wissensbank folgt.

Negation as Failure Was nicht aus der Wissensbank folgt, ist falsch.

Realisierung mit Cut und `fail`:

```
not(Goal) :- Goal, !, fail.
not(Goal).
```

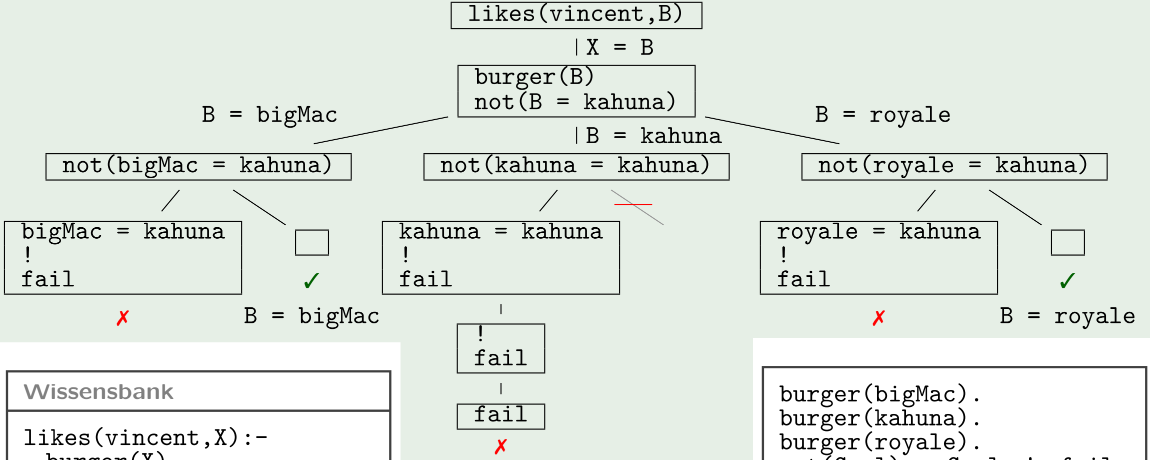
- Wenn `Goal` aus KB folgt $\leadsto$ `false.`
- Sonst $\leadsto$ `true.`

Unterschiede zu logischer Negation

- $\varphi \models \neg\psi$ gdw $\varphi \wedge \psi$ unerfüllbar ist.
- Aus KB folgt `not(Goal)`, wenn KB $\wedge \neg$`Goal` erfüllbar ist.
- Negierte Fakten sind nicht möglich (`not(happy(butch)).`)

Beispiel: Negation und Burger

Beispiel 5.75



Wissensbank

```
likes(vincent,X):-
  burger(X),
  not(X = kahuna).
```

```
burger(bigMac).
burger(kahuna).
burger(royale).
not(Goal) :- Goal, !, fail.
not(Goal).
```

Beispiel 5.76

Wissensbank

```
likes(vincent,X):- burger(X),
  not(X = kahuna).
burger(bigMac).
burger(kahuna).
```

Eltern-Goal: `not`.

Interpreter

```
?- likes(vincent,bigMac).
true.
?- likes(vincent,kahuna).
false.
?- likes(vincent,B).
B = bigMac.
```

Wissensbank

```
likes(vincent,kahuna):- !, fail.
likes(vincent,X):- burger(X).
burger(bigMac).
burger(kahuna).
```

Eltern-Goal: `likes`.

Interpreter

```
?- likes(vincent,bigMac).
true.
?- likes(vincent,kahuna).
false.
?- likes(vincent,B).
false.
```

Übung 5.77

Im folgenden Programm ist im Prädikat `likes` die Reihenfolge der beiden Goals vertauscht:

```
likes(vincent,X):- not(X = kahuna), burger(X).
```

Wie beantwortet der Interpreter nun die folgende Anfrage?

```
?- likes(vincent,B).
```

Zeichnen Sie ggf. den Berechnungsbaum.

Zusammenfassung: Cut

- entfernt Verzweigungspunkte
  - vom Aufruf des Eltern-Goals
  - bis zum Cut
- kann zusammen mit `fail` Ausnahmen codieren
- Prädikat `not` beschreibt negation as failure
  - Cut verhindert Backtracking
  - `fail` verursacht Scheitern des aktuellen Zweigs
  - nicht äquivalent zu logischer Negation

Zusammenfassung: Prolog

- deklarativ
  - Beschreibung der Domäne in der Wissensbank
  - Anfragen im Interpreter
- einfacher Term: Atom, Variable oder Zahl
- komplexer Term: Funktor und Argumente
- Goals, Fakten, Regeln und Anfragen
- Unifikation (=) bindet Variablen, == nicht
- Arithmetik: `is`, `=:=`, `=\=`, ...
- Suchbaum
  - Bearbeite Stack von oben nach unten
  - Unifiziere erstes Goal mit allen Regelköpfen
  - Verzweigungspunkte, Backtracking
- Rekursion: Prädikat verwendet sich selbst; Standard-Programmierparadigma
- Listen: Standard-Datenstruktur
- Cut verhindert Backtracking