Studiengang Elektrotechnik

Labor Grundlagen der Elektrotechnik 1

Versuch 4:

Signalverhalten von R, L und C

Modul/Unit-Nr. 1005.2

Kurs-Nr. TEL….GR....

Name der/s Studierenden: .....

☐ Laborausarbeitung in Ordnung.

☐ Laborausarbeitung ungenügend.

Betreuer: …….

Ort/Datum: ..... Unterschrift: .....

1. Einführende Fragen

1.1 Wie lauten die Lösungen der folgenden linearen Differentialgleichungen:

a) $$R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = U_0$$

b) $$L \cdot C \cdot \frac{d^2u_C}{dt^2} + R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = U_1 \quad (U_0, U_1 \text{ konstant})$$

1.2 Wo treten in RLC -Schaltungen bei Spannungen und Strömen Differentialquotienten auf?

1.3 Wie wirken sich die Differentialquotienten von Strömen bzw. Spannungen mit sinusförmigem Verlauf in der komplexen Rechnung aus?

2. Vorbereitung

Bei der Übertragung von elektrischer Energie einerseits und von Information mit Hilfe elektrischer Signale andererseits treten die folgenden physikalischen Erscheinungen auf: Widerstand gegen Ladungsträger beim Stromfluss, Auf- und Abbau magnetischer Felder, Auf- und Abbau elektrischer Felder.

Bei den Aufgaben der klassischen Energietechnik sind diese Erscheinungen zeitlich konstant oder ändern sich sinusförmig mit der konstanten Frequenz des Versorgungsnetzes. (Die moderne Leistungselektronik allerdings erweitert Strom- und Spannungsverläufe hin zu unterschiedlichen Frequenzen und Nicht-Sinusform.)

Die Information tragenden elektrischen Signale können beliebige Verläufe annehmen. Um ihre Wirkung auf Übertragungssysteme und Verarbeitungsschaltungen zu beschreiben, sind zwei Denkansätze wichtig geworden:

- die Antwort einer Schaltung auf sinusförmige Signale mit veränderlicher Frequenz: das Frequenzverhalten;
- die Antwort einer Schaltung z.B. auf einen Spannungssprung: das Einschwingverhalten. (Im Experiment ist die "Sprungantwort" a(t) wichtig, bei der theoretischen Beschreibung die "Impulsantwort" h(t); es ist $h(t) = da(t)/dt$).

Im folgenden Versuch sollen beide Betrachtungsweisen geübt werden.

Die physikalischen Erscheinungen werden bekanntlich schaltungstechnisch beschrieben mit den idealisierten Schaltelementen ohmscher Widerstand R, Spule mit Induktivität L und Kondensator mit Kapazität C. Dies gilt sowohl für die Schaltungen, die diese technisch verwirklichten Schaltelemente mit ihrem gewollten Verhalten enthalten, als auch für Schaltungen, in denen die physikalischen Erscheinungen als ungewollte Effekte auftreten.

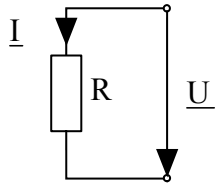
Es ist daher grundlegend wichtig, das Frequenzverhalten und das Einschwingverhalten von R, L und C als Einzelelemente und in Schaltungen kombiniert kennenzulernen. Dazu ist im Folgenden für einfache Fälle Gelegenheit geboten.

2.1 Frequenzverhalten des Stromes bei eingeprägter Spannung

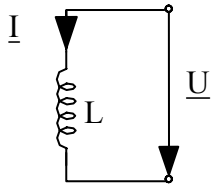
(Beschränkung auf Reihenschaltung)

Die Theorie der Wechselströme benutzt die komplexe Rechnung zur Bestimmung von Beträgen und Phasenverschiebungen.

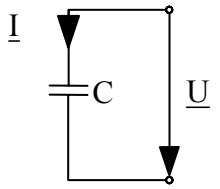
$\omega = 2\pi f$, das heißt Frequenz f und Kreisfrequenz ω, treten dabei als Parameter auf. Macht man f bzw. ω zur unabhängigen Variablen, so ist das Frequenzverhalten der Beträge und Phasenlagen beschrieben.



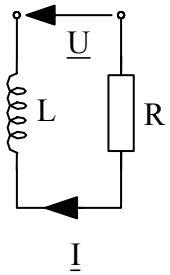
$$\left.\begin{aligned} &\underline{I} = \underline{U}/R\ ; \quad I = U/R \neq f(\omega)\ ; \\ &\varphi = \arg(\underline{I}/\underline{U}) = 0 \neq f(\omega) \end{aligned}\right\} \quad (1a)$$



$$\left.\begin{aligned} &\underline{I} = \underline{U}/j\omega L\ ; \quad I = U/\omega L \\ &\varphi = \arg(\underline{I}/\underline{U}) = -\pi/2 = \text{const.} \end{aligned}\right\} \quad (1b)$$

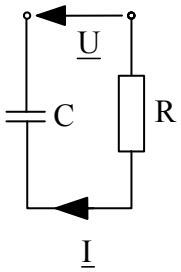


$$\left.\begin{aligned} &\underline{I} = \underline{U} \cdot j\omega C\ ; \quad I = U \cdot \omega C \\ &\varphi = \arg(\underline{I}/\underline{U}) = \pi/2 = \text{const.} \end{aligned}\right\} \quad (1c)$$



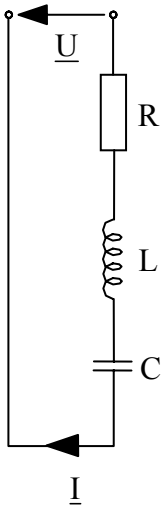
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j\omega L}; \quad I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \tag{2a}$$

$$\varphi = \arg(\underline{I}/\underline{U}) = -\arctan(\omega L/R) \tag{2b}$$



$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + 1/j\omega C} = \frac{\underline{U} \cdot j\omega C}{1 + j\omega RC}; \; I = \frac{U \cdot \omega C}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \tag{3a}$$

$$\varphi = \arg(\underline{I}/\underline{U}) = \pi/2 - \arctan \omega RC \tag{3b}$$



$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j\omega L + 1/j\omega C} = \underline{U}\frac{j\omega C}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega RC} \tag{4a}$$

$$I = U\frac{\omega C}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}} \tag{4b}$$

$$\varphi = \arg(\underline{I}/\underline{U}) = \pi/2 - \arctan\frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC} \tag{4c}$$

Normierung und Abkürzungen beim Reihenschwingkreis:

$LC = 1/\omega_0^{\,2}$

$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ = Resonanzkreisfrequenz

$\sqrt{L/C} = Z$ = Schwingungswiderstand

R dämpft die Schwingneigung des Kreises; je kleiner R ist, desto größer ist die "Güte" Q des Schwingkreises:

$$\frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{Z}{R} = Q \tag{5a}$$

Es sei : $\omega/\omega_0 = \Omega$ (5b)

Dann wird aus (4a, b, c):

$$\underline{I} = \underline{U} \cdot \frac{1}{Z} \cdot \frac{j\Omega}{(1-\Omega^2) + j\Omega/Q} \tag{6a}$$

$$I = U \cdot \frac{1}{Z} \cdot \frac{\Omega}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2}{Q^2}}} \tag{6b}$$

$$\varphi = \pi/2 - \arctan\frac{\Omega/Q}{1-\Omega^2} \tag{6c}$$

Der prinzipielle Verlauf von I aus Gl (6b) in Abhängigkeit von der normierten Kreisfrequenz Ω ist in Bild 1 dargestellt mit dem Parameter $Q \sim 1/R$;

(L und C sind als konstant angenommen).

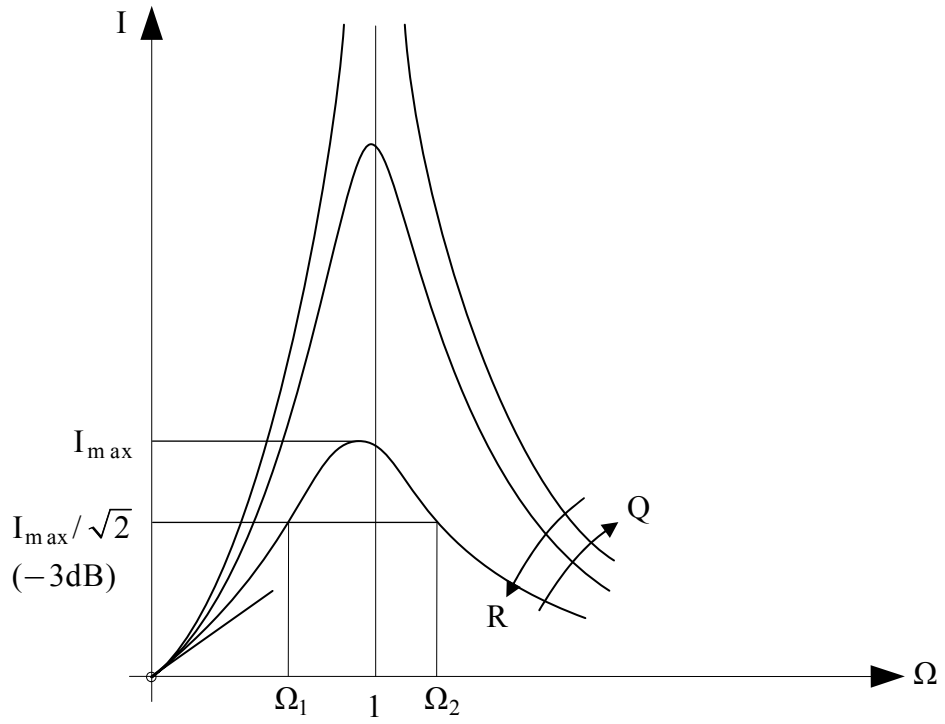


Bild 1

Die normierte Resonanzbreite $\Delta\Omega$ eines Schwingkreises ist definiert als

$$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 \tag{7 a}$$

Dabei sind Ω_1 und Ω_2 diejenigen normierten Frequenzen, bei denen I auf den Wert $I_{max}/\sqrt{2}$ abgesunken ist. (vgl. Bild 1).

Mit Gl. (6b) lässt sich zeigen, dass gilt:

$$\Delta\Omega = 1/Q \tag{7b}$$

Aufgabe 1

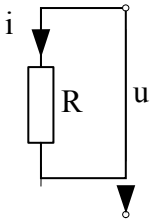
a) Skizzieren Sie in ein ω / I - Achsenkreuz die groben Verläufe $I(\omega)$ aus den Gleichungen (2a), (3a) und (4b); ergänzen Sie die ω-Achse durch eine Ω-Bezifferung gemäß Gl. (5b).

b) Skizzieren Sie in ein ω / φ Achsenkreuz die groben Verläufe $\varphi(\omega)$ aus den Gleichungen (2b), (3b) und (4c); ergänzen sie die ω-Achse durch eine Ω-Bezifferung gemäß Gl. (5b).

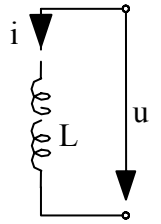
2.2 Einschwingverhalten des Stromes bei eingeschalteter Gleichspannung

(Spannungssprung zur Zeit t = 0)

Für Augenblickswerte u und i gilt bei den Schaltelementen R, L und C:

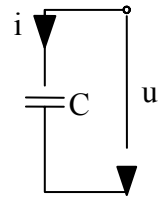


$$u = R \cdot i \qquad (8a)$$



$$u = L \cdot di/dt \qquad (8b)$$

Energieträger: Spulenstrom

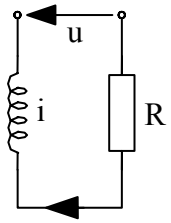


$$i = C \cdot du/dt \qquad (8c)$$

Energieträger: Kondensatorspannung

(Die energietragenden Größen können im zeitlichen Verlauf keine Unstetigkeitsstellen haben, da dies unendliche Leistung voraussetzen würde.)

Somit ergeben sich für Kombinationen von R, L und C Differentialgleichungen nach Art der folgenden Beispiele:



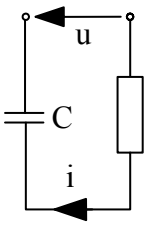
$$u = L \cdot di/dt + R \cdot i \qquad u = U \text{ für } t > 0$$

$$\text{Anfangsbedingung: } i(0) = 0$$

Die Lösung lautet (Angabe ohne Beweis):

$$i = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-t/\tau_L}\right) \quad \text{für } t \geq 0 \qquad (9)$$

$$\tau_L = \frac{L}{R}$$



$u = R \cdot i + u_C ; \qquad i = C \cdot du_C / dt$

$u = RC \cdot du_C/dt + u_C ; \qquad u = U \text{ für } t \geq 0$

Anfangsbedingung: $u_C(0) = 0 ;$

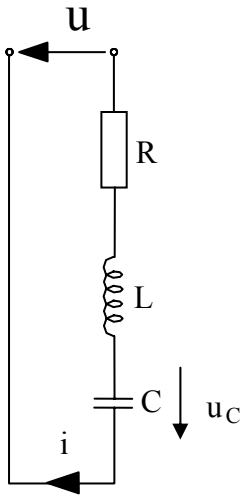
Die Lösung lautet (Angabe ohne Beweis)

$u_c = U(1 - e^{-t/\tau_c})$ für $t \geq 0$

$\tau_C = RC$

$$i = \frac{U}{R} e^{-t/\tau_C} \qquad \text{für } t \geq 0 \qquad (10)$$

$u = R \cdot i + L \cdot di/dt + u_c ; \qquad i = C \cdot du_c / dt$



$u = L \cdot C \cdot d^2u_c/dt^2 + R \cdot C \cdot du_c/dt + u_c$ (vergl. einf. Fragen 1.1.b)

$u = U \text{ für } t \geq 0$

Anfangsbedingungen: $u_c(0) = 0, \; i_c(0) = 0$

Mit den Abkürzungen aus Abschnitt 2.1 bietet sich eine entsprechende Normierung an:

$\omega_0 \cdot t = \tau \quad \text{mit } \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

Beachte: $\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \omega_0 \cdot \frac{d}{d\tau}$ und $\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{Z}{R} = Q$

Damit ergibt sich für die Differentialgleichung:

$$u = \frac{d^2u_C}{d\tau^2} + \frac{1}{Q}\frac{du_C}{d\tau} ; \qquad u = U \text{ für } \tau \geq 0$$

Anfangsbedingungen: $u_C(0) = 0, \; i(0) = 0$

Die Lösung der Differentialgleichung ergibt nach trigonometrischen Umformungen (Angabe ohne Beweis):

$$u_C = U\left(1 - \frac{1}{\beta} e^{-\alpha\tau} \cdot \sin(\beta\tau + \varphi)\right) \qquad \text{für } \tau \geq 0 \qquad (11a)$$

mit den Abkürzungen $\alpha = 1/2Q ; \; \beta = \sqrt{1 - 1/4Q^2}$

$\varphi = \arctan \beta/\alpha = \arctan \sqrt{4Q^2 - 1}$

Dabei ist Q > 1/2 angenommen. Beachte: $u_C(0) = 0$

Für den Strom ergibt sich aus (11a):

$$i = \frac{U}{Z}\,\frac{1}{\beta}\cdot e^{-\alpha\tau}\cdot \sin(\beta\tau) \qquad \text{für } \tau \geq 0 \qquad (11b)$$

mit $\alpha = 1/2Q$; $\beta = \sqrt{1 - 1/4Q^2}$; $Q > 1/2$

Beachte: $i(0) = 0$ und somit $du_C / d\tau = 0$

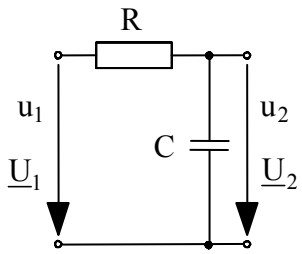
Aufgabe 2

Skizzieren Sie die prinzipiellen Verläufe der Ergebnisse (9), (10) und (11a, b).

2.3 Übertragungsverhalten elementarer RLC-Schaltungen

Einige Beispiele sollen das Übertragungsverhalten in seiner Beschreibung mit Frequenzfunktionen einerseits und mit einer Zeitfunktion andererseits im Vergleich aufzeigen. Dabei werden die Ergebnisse der Abschnitte 2.1 und 2.2 direkt angewandt.

2.3.1 RC-Glied



$$\underline{U}_2 = \underline{U}_C = \frac{\underline{U}_1 / j\omega C}{R + 1/j\omega C}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_1}{1 + j\omega RC} \qquad (12a)$$

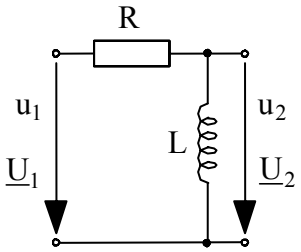
$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_C^{\,2}}}; \tau_C = RC \qquad (12b)$$

$$\varphi = \arg(\underline{U}_2 / \underline{U}_1) = -\arctan \omega\tau_C \qquad (12c)$$

Für $u_1(t) = \begin{cases} U \text{ für } t \geq 0 \\ 0 \text{ für } t < 0 \end{cases}$ gilt:

$$u_2(t) = u_C(t) = U(1 - e^{-t/T_C}); \quad \tau_C = RC; \quad t \geq 0 \qquad (12d)$$

2. 3. 2 RL-Glied



$$\underline{U}_2 = \underline{U}_L = \frac{\underline{U}_1 j\omega L}{R + j\omega L}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 \frac{j\omega L / R}{1 + j\omega L / R} \qquad (13a)$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\omega\tau_L}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_L^{\,2}}}; \quad \tau_L = L/R \qquad (13b)$$

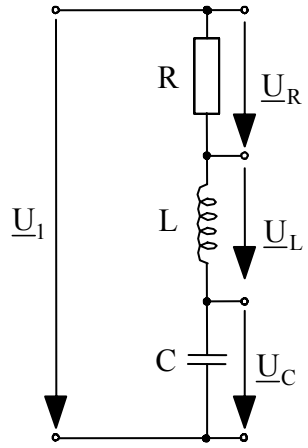
$$\varphi = \arg(\underline{U}_2 / \underline{U}_1) = \frac{\pi}{2} - \arctan \omega\tau_L \qquad (13c)$$

Für $u_1(t) = \begin{cases} U \text{ für } t \geq 0 \\ 0 \text{ für } t < 0 \end{cases}$ gilt:

$$u_2(t) = u_L(t) = U e^{-t/\tau_L}; \quad \tau_L = L/R; \quad t \geq 0 \qquad (13d)$$

(Beachte : $u_L = L \cdot di/dt$ mit i aus Gl.(9))

2.3.3 Reihenschwingkreis



Es ist $\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}$ mit $\underline{I}$ aus Abschnitt 2.1, Gl. (6a)

Daher :

$$\frac{\underline{U}_R}{\underline{U}_1} = \frac{1}{Q} \cdot \frac{j\Omega}{(1-\Omega^2)+j\Omega/Q} \qquad (14a)$$

$$\frac{U_R}{U_1} = \frac{1}{Q} \cdot \frac{\Omega}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2+\Omega^2/Q^2}} \qquad (14b)$$

(vgl. Bild 2)

$$\varphi_R = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\Omega/Q}{1-\Omega^2} \qquad (14c)$$

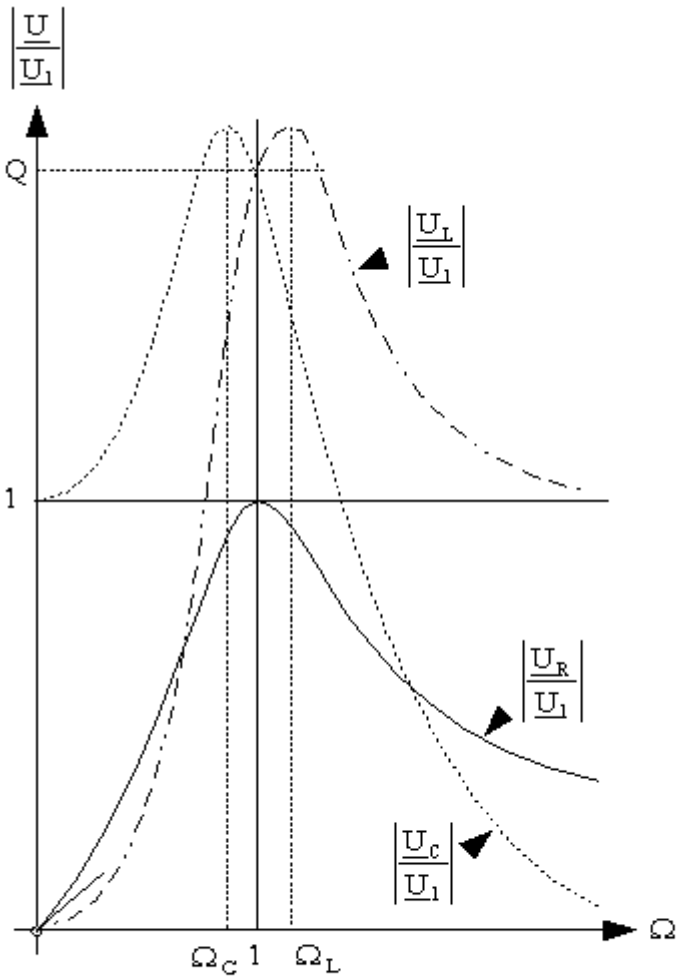


Bild 2

$$\Omega_L \cdot \Omega_C = 1$$

$$\Omega_C = \sqrt{1-1/(2Q^2)}$$

$$\Omega_L = \frac{1}{\sqrt{1-1/(2Q^2)}}$$

Es ist $\underline{U}_L = j\omega L \cdot \underline{I} = j\Omega Z \cdot \underline{I}$

Daher: $$\frac{\underline{U}_L}{\underline{U}_1} = \frac{-\Omega^2}{(1-\Omega^2) + j\Omega\ /Q} \qquad (15a)$$

$$\frac{U_L}{U_1} = \frac{\Omega^2}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + \Omega^2/Q^2}} \qquad \text{(vgl. Bild 2)} \qquad (15b)$$

$$\varphi_L = \pi - \arctan\frac{\Omega/Q}{1-\Omega^2} \qquad (15c)$$

Es ist $\underline{U}_C = \underline{I}/j\omega C = \underline{I} \cdot Z/j\Omega$

Daher: $$\frac{\underline{U}_C}{\underline{U}_1} = \frac{1}{(1-\Omega^2) + j\Omega\ /Q} \qquad \text{(vgl. Bild 2)} \qquad (16a)$$

$$\frac{U_C}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + \Omega^2/Q^2}} \qquad (16b)$$

$$\varphi_C = -\arctan\frac{\Omega/Q}{1-\Omega^2} \qquad (16c)$$

Nach Abschnitt 2.2 gilt für die Signale im Zeitbereich:

u_C aus Gl. (11a)

i aus Gl (11b)

$u_R = R \cdot i$

$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = Z \cdot \frac{di}{d\tau}$ mit $\tau = \omega_0 \cdot t$

Für $u_1(\tau) = \begin{cases} U & \text{für } \tau \geq 0 \\ 0 & \text{für } \tau < 0 \end{cases}$ gilt daher:

$$u_C = U\left[1 - \frac{1}{\beta} e^{-\alpha\cdot\tau} \cdot \sin(\beta\tau + \varphi)\right] \qquad (17a)$$

$$u_R = -\frac{1}{\beta Q} U \cdot e^{-\alpha\cdot\tau} \cdot \sin\beta\tau; \quad \tau \geq 0 \qquad (17b)$$

$$u_L = -\frac{1}{\beta} U \cdot e^{-\alpha\cdot\tau} \cdot \sin(\beta\cdot\tau - \varphi)\ ; \quad (\text{ohne Beweis}) \qquad (17c)$$

$$\left(\alpha = \frac{1}{2Q}, \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}, \quad Q > 0{,}5\right)$$

Aufgabe 3

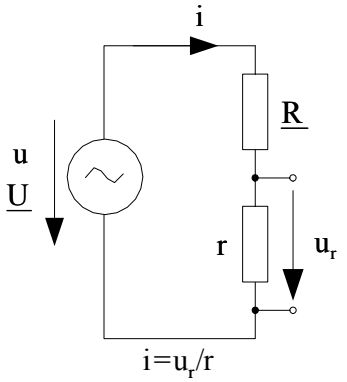
Welche Filtereigenschaften werden beschrieben in den Gleichungen (12), (13), (14), (15) und (16)?

Beachten Sie in Bild 2, dass die Maxima von U_C/U_1 und U_L/U_1 nicht bei $\Omega = 1$ liegen!

3. Messaufgaben und Auswertung

3.1 Der Strom bei Wechselspannung mit veränderlicher Frequenz.

- Messen Sie für $u = \sqrt{2}\ U \cos 2\pi f t$, $10 \le f \le 10\ \text{kHz}$ vom Strom



$i = \frac{u_r}{r} = \sqrt{2}\ I \cos(2\pi f t + \varphi_i)$; $U_{eff} = 1V$ $(\hat{U} = \sqrt{2} \cdot U_{eff})$

den Effektivwert I und die Phasenverschiebung φ_i.

Dabei sei

a) $\underline{R} = j\omega L$ $\quad L = 470\ \text{mH}$

b) $\underline{R} = 1/j\omega C$, $\quad C = 10\ \text{nF}$

c) $\underline{R} = j\omega L + 1/j\omega C$

In allen Fällen sei $r = 2{,}0\ \text{k}\Omega$

- Zeichnen Sie alle Funktionen $i = i(f)$ für a) bis c) in ein gemeinsames Achsenkreuz ein.

  Zeichnen Sie ebenso alle Funktionen $\varphi_i = \varphi_i(f)$ in ein zweites Achsenkreuz ein.

- Wie groß ist die Resonanzfrequenz f_0?

  Wie groß ist die Resonanzbreite $\Delta f = \Delta\Omega \cdot f_0$?

  Wie groß ist die Güte Q?

  Vergleichen Sie Mess- und Rechenergebnisse.

3.2 Der Strom als Antwort auf den Spannungssprung

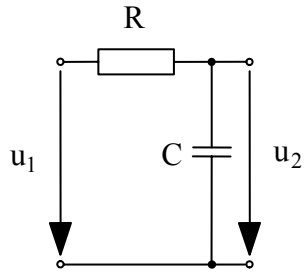
- Messen Sie für $u_1(t) = \begin{cases} U & \text{für } t \ge 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$ den Strom $i = \frac{u_r}{r}$ in allen Fällen

  a) bis c) aus 3.1.

- Bestimmen Sie die auftretenden Zeitkonstanten und Periodendauern und skizzieren Sie die Zeitverläufe.

- Vergleichen Sie Mess- und Rechenergebnisse.

3.3 Übertragungsverhalten einiger elementarer RLC-Schaltungen



a)Bringen Sie am zweikanaligen Oszilloskop u_1 und u_2 zur Anzeige!

Überprüfen Sie die Richtigkeit der Vorhersage der Gleichungen (12a – 12d)!

Messen Sie besonders

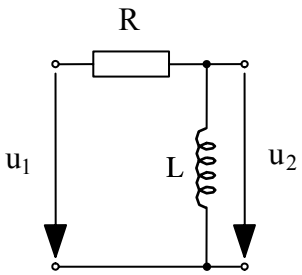
- die sog. 3-dB-Grenzfrequenz ($f = f_g$ bei $u_2 = u_{2max}/\sqrt{2}$)

- die Zeitkonstante τ_C des exponentiellen Einschwingens.

In welcher Beziehung stehen τ_C und f_0 zueinander?

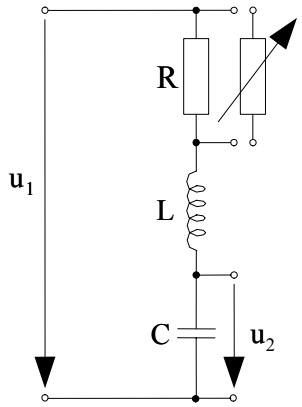
- Wiederholen Sie die Messung für R* = 2R und für C* = C/2.

Was hat sich geändert?



b) Überprüfen Sie wie in a) die Richtigkeit der Vorhersage der Gleichungen (13a – 13d) und messen Sie wie dort

- die 3dB-Grenzfrequenz
- die Zeitkonstante τ_L des exponentiellen Einschwingens.



c) Überprüfen Sie wie in a) die Richtigkeit der Vorhersage der Gleichungen (16) und (17a). Messen Sie besonders:

- u_2 / u_1 bei $f = 0$ und bei $f = f_0$.

  Wie groß ist Q nach dieser Messung? (vgl. Bild 2)

- $\varphi = \text{arc}(u_2/u_1)$ bei $f = f_0$

- Ersetzen Sie den Festwiderstand durch einen veränderlichen Widerstand! Beobachten Sie bei $u_1(t) = U \cdot s(t)$ (Spannungssprung) die Ausgangsspannung $u_C(t) = u_2(t) = U \cdot a(t)$ (Sprungantwort) in Abhängigkeit vom Parameter R. Suchen Sie den „a-periodischen Grenzfall"!