

Regelungssysteme Teil 1 und Teil 2

Vorlesung und Übungen

Ausgabe 0.5, 16.12.2015
Autor: Stephan Rupp

Inhaltsverzeichnis

1.	PID Regler	6
1.1.	Steuerung	6
1.2.	Regelung	10
1.3.	P-Regler	11
1.4.	I-Regler	13
1.5.	PI-Regler	14
1.6.	PID-Regler	16
1.7.	Übertragungsfunktion	17
1.8.	Einfluss des Reglers auf die Übertragungsfunktion	18
2.	Drehzahlregelung mit PID Regler	19
2.1.	Regelstrecke	19
2.2.	Regelalgorithmus	20
2.3.	Einstellung der Reglerparameter	20
2.4.	Stabilität	21
3.	Zustandsregelung	22
3.1.	Zustandsmodell	22
3.2.	Normalformen der Zustandsgleichungen	29
3.3.	Zustandsregelung	31
3.4.	Störgrößen im Regelkreis	36
4.	Schätzung der Zustände und Systemparameter	41
4.1.	Optimale Regler	41
4.2.	Regler mit Beobachter	44
4.3.	Unbekannte Regelstrecke	48
4.4.	Instabile Regelstrecke	52
5.	Seminararbeit	54
6.	Übungen	55

6.1.	Verladebrücke	55
6.2.	Lineare Regression	59
6.3.	Führungsverhalten und Störverhalten	60
6.4.	Optimale Regler	61
6.5.	Regelung durch Zustandsrückführung	61
6.6.	Tempomat	62
6.7.	Abstandsregelung für Fahrzeuge	64
6.8.	Linear-quadratisch optimale Regler (LQ-Regler)	65
6.9.	Inverses Pendel	66
6.10.	Beobachter für das inverse Pendel	69
6.11.	Rollbewegung eines Flugzeugs	70
6.12.	Störgrößenaufschaltung	71
6.13.	Signalflüsse für Normalformen	72
6.14.	Stabile und instabile Systeme	72
6.15.	Lageregelung	73
6.16.	Kaskadenregelung: Luftheizungsanlage	74
6.17.	Mehrgrößenregelung (Zwei-Behälter-System)	75
6.18.	Schätzung der Systemparameter	76
6.19.	Frequenzregelung für Stromnetze (Primärregelung)	78
6.20.	Leistungsregelung für Stromnetze (Sekundärregelung)	81
7.	Klausuraufgaben	83
7.1.	P-Regler	83
7.2.	Zustandsregler	84
7.3.	Einfluss von Störgrößen	87
7.4.	Systembeschreibung durch Polvorgabe	88
7.5.	Zustandsregler	89
7.6.	Füllstandsregelung mit 2 Behältern	91
7.7.	Strecke mit P-Regler	94
7.8.	Zustandsregler	95

7.9. Gleichstrommotor als Regelstrecke

1. PID Regler

1.1. Steuerung

Eine einfache Möglichkeit, die Drehzahl eines Gleichstrommotors einzustellen, zeigt folgende Abbildung. Hierbei wird die Spannung an den Anschlussklemmen durch ein Stellglied variiert.

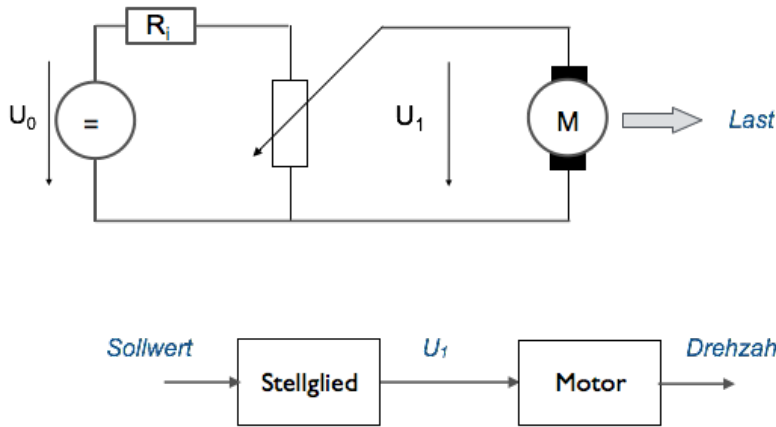


Bild 1.1 Steuerung

Im Gleichstrommotor wird ein Gleichgewicht zur Ankerspannung U_1 hergestellt durch eine drehzahlabhängige, im Erregerfeld induzierte Spannung. Die Drehzahl ω des Motors ist somit im eingeschwungenen Zustand proportional zur Ankerspannung: $\omega = k U_1$.

Für einen Motor mit konstanter Erregung (z.B. Permanentmagnet im Stator) ist das Drehmoment des Motors proportional zum Ankerstrom. Das Drehmoment stellt sich also bis zur magnetischen Sättigung (bei Nennspannung) auf die Last ein (d.h. auf das geforderte Drehmoment). Die Drehzahl bleibt somit auch bei Laständerungen gut bei dem über U_1 eingestellten Wert.

Somit genügt in vielen Fällen bei Gleichstrommotoren eine Steuerung: die Drehzahl wird durch Vorgabe eines Sollwertes über ein Stellglied eingestellt. Die Anpassung an Lastschwankungen übernimmt in diesem Fall der Motor selber.

Lastabhängige Drehzahl

Folgende Abbildung zeigt ein Ersatzschaltbild des Ankerkreises.

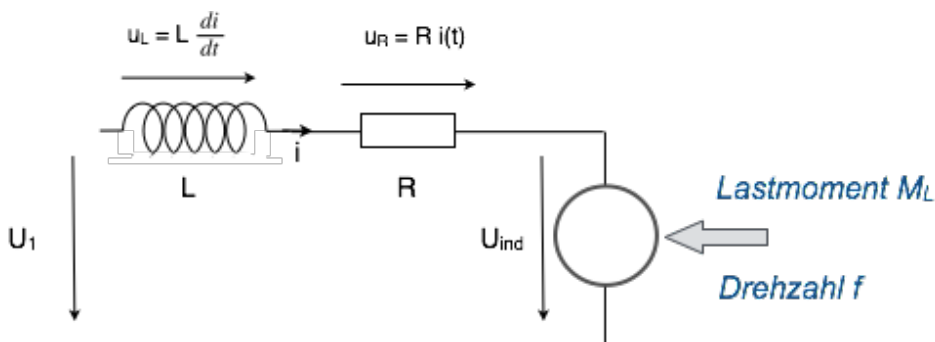


Bild 1.2 Elektrisches Ersatzschaltbild des Motors (Ankerkreis)

Die Induktivität L des Ankerkreises ist nur beim Einschalten relevant und kann daher hier zunächst vernachlässigt werden. Im eingeschwungenen Zustand verbleiben jedoch die ohmschen Verluste. Drehzahlabhängig ist die induzierte Spannung U_{ind} . Es gilt:

$$\omega = k U_{\text{ind}} \quad (1.1)$$

Unter Berücksichtigung des ohmschen Spannungsabfalls erhält man:

$$U_1 = I \cdot R + U_{\text{ind}} \quad (1.2)$$

Mit wachsender Last verringert sich die Drehzahl durch den ohmschen Spannungsabfall, der durch den größeren Laststrom verursacht wird. Hierdurch reduziert sich bei konstanter Ankerspannung U_1 die induzierte Spannung U_{ind} . Die eingangs verwendete Beziehung $\omega = k U_1$ gilt im Leerlauf ($I = 0$).

Für den Ankerstrom erhält man aus der Maschengleichung oben: $I = U_1 / R - U_{\text{ind}} / R = U_1 / R - \omega / kR$. Der Ankerstrom ist proportional zum Lastmoment. Als Kennlinie des Drehmoments über der Drehzahl erhält man den in der folgenden Abbildung gezeigten Verlauf.

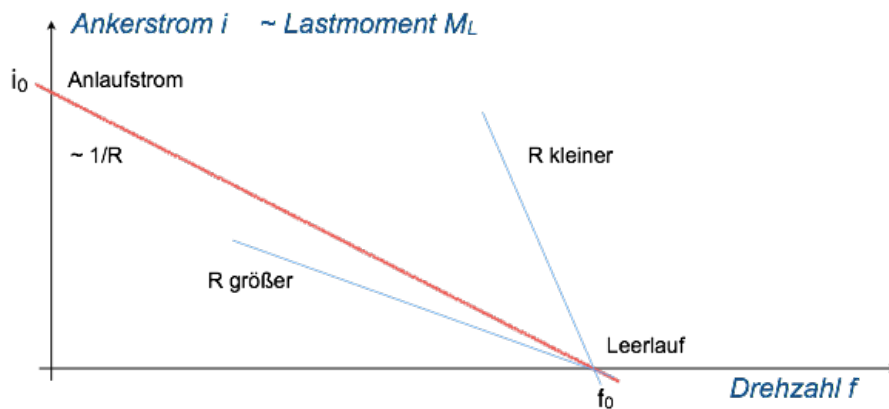


Bild 1.3 Drehmoment-Drehzahl Kennlinie

Die Drehzahl des Motors in Abhängigkeit der Stellgröße U_1 lässt sich durch Umformen der Stromgleichung wie folgt beschreiben: $\omega = k U_1 - i k R$, wobei die Konstante k aus der Leerlaufdrehzahl ω_0 und der Nennspannung U_{10} folgt: $k = \omega_0 / U_{10}$. Da das Drehmoment proportional zum Ankerstrom ist, gilt:

$$\omega = k U_1 - k_2 M = k U_1 - k_2 (M_L + J\omega') \quad (1.3)$$

Das Drehmoment des Motors entspricht dem Drehmoment der Last M_L plus der Änderung des Drehimpulses des Ankers (Rotors) bedingt durch dessen Trägheitsmoment.

Übung 1.1: Für einen Motor sind folgende Kenngrößen gegeben: Nenndrehzahl 3000 pro Minute, Nennstrom 3A, Nennleistung 45 W, Nennspannung 24 V, Trägheitsmoment des Rotors 600 gcm². Berechnen Sie: (1) die induzierte Spannung U_{ind} im Nennbetrieb, (2) den Ankerwiderstand R , (3) das Nennmoment, (4) die Leerlaufdrehzahl, (5) den Anlaufstrom, (6) das Anlaufmoment. Hinweis: Vernachlässigen Sie das Trägheitsmoment des Rotors.

Übung 1.2: Einstellung der Drehzahl unter Last. Für den Motor mit den Kennzahlen aus Übung 1.1 soll die Drehzahl mit Hilfe der Ankerspannung für ein gegebenes Drehmoment eingestellt werden. Wie berechnen Sie die Ankerspannung U_1 für eine gegebene Drehzahl und ein gegebenes Drehmoment?

Übung 1.3. Laständerungen. Spielt das Trägheitsmoment des Rotors beim in Übung 1.1 gegebenen Motor eine Rolle? Geben Sie bei konstanter Ankerspannung U_1 einen Lastsprung um ein gegebenes Drehmoment vor und berechnen Sie die Änderung des Drehimpulses.

Lösung zu Übung 1.1:

- $P_N = U_{indN} I_N$: hieraus folgt $U_{indN} = 45 \text{ W} / 3 \text{ A} = 15 \text{ V}$
- $U_N = I_N \cdot R + U_{indN}$: hieraus folgt $R = (24\text{V} - 15\text{V}) / 3\text{A} = 3 \Omega$
- $P_N = M_N \cdot \omega_N$: hieraus folgt $M_N = 45 \text{ W} / (2\pi \cdot 50 \text{ 1/s}) = 0,143 \text{ Ws} = 0,143 \text{ Nm}$
- $f \sim U_{ind}$, somit gilt $f_0/f_N = U_N/U_{indN}$: hieraus folgt $f_0 = 3000 \text{ 1/min} \cdot 24\text{V}/15\text{V} = 4800 \text{ 1/min}$
- Im Anlauf ist $U_{ind} = 0$, hieraus folgt: $I_A = U_N/R = 24 \text{ V} / 3 \Omega = 8 \text{ A}$
- $M \sim I$, somit gilt $M_A/M_N = I_A/I_N$: hieraus folgt $M_A = (8\text{A} / 3\text{A}) \cdot M_N = 0,381 \text{ Nm}$

Lösung zu Übung 1.2: Vorgegeben sind M_1 , f_1 , gesucht ist U_1 .

- $M \sim I$, somit gilt $M_1/M_N = I_1/I_N$: hieraus folgt $I_1 = I_N \cdot M_1/M_N$
- $f_1/f_N = U_{ind1}/U_{indN}$
- U_1 folgt aus Gleichung (1.2): $U_1 = I_1 \cdot R + U_{indN} \cdot f_1/f_N$

Lösung zu Übung 1.3: Vorgabe z.B. Lastsprung von M_N auf $M_1 = 0,5 M_N$ innerhalb $\Delta t = 20 \text{ ms}$.

- Strom bei M_1 (siehe Übung 1.2): $I_1 = I_N \cdot M_1/M_N = 0,5 I_N$
- $U_1 = U_N$ bleibt konstant, U_{ind1} erhöht sich gemäß Gleichung (1.2): $U_N = 0,5 I_N R + U_{ind1}$
- $U_{ind1} = U_N - 0,5 I_N R = 24\text{V} - 1,5 \text{ A} \cdot 3 \Omega = 19,5\text{V}$
- Änderung der Drehzahl: $f_1/f_N = U_{ind1}/U_{indN}$ hieraus folgt $f_1 = 19,5/15\text{V} \cdot 50 \text{ 1/s} = 65 \text{ 1/s}$
- $J\omega' \approx J \cdot 2\pi \Delta f / \Delta t = J \cdot 2\pi \cdot 15/0,02 \text{ (1/s}^2) = J \cdot 4710 \text{ (1/s}^2) = 0,28 \text{ kg m}^2/\text{s}^2 = 0,28 \text{ Nm}$
- Die Trägheit des Rotors ist für den vorgegebenen Lastsprung relevant.

Physikalisches Modell der Regelstrecke

Der Motor mit den beschriebenen Eigenschaften und das Lastmoment sollen nun als Regelstrecke für die Steuerung betrachtet werden. Statt einzelne Arbeitspunkte manuell zu berechnen, soll ein Modell der Motors zusammen mit einem vorgegebenen Lastprofil in Form einer Tabellenkalkulation als Modell der Regelstrecke erstellt werden. Es werden hierfür die Parameter des Motors aus Übung 1.1 verwendet.

Zur Erstellung des Modells werden zunächst die Kenngrößen des Motors als Variable in die Tabellenkalkulation eingetragen. Auf diese Weise lassen sich später die Motoreigenschaften leicht verändern. Weiterhin wird ein Zeitintervall vorgegeben, zu dem Messpunkte errechnet werden (beispielsweise $\Delta t = 10 \text{ ms}$, so dass man bei 20 ms pro Umdrehung 2 Messpunkte erhält). Als Eingangsgrößen werden verwendet: (1) ein Index k für die Zeitintervalle $k \cdot \Delta t$, (2) das Lastmoment M_L in Abhängigkeit des Index k . Für K und M_L wird hierzu jeweils eine Spalte in der Tabellenkalkulation

verwendet, wobei der Index k z.B. von 0 bis 99 über 100 Stützstellen verläuft (entsprechend 10 Umdrehungen). Die Ankerspannung U_1 ist ebenfalls eine Eingangsvariable, wird aber bei der Steuerung über den Index k nicht variiert, sondern bleibt fest eingestellt. Aus Ausgangsgröße dient (3) die Drehzahl f gemäß Gleichung 1.3.

Übung 1.4: Erstellen Sie eine Tabellenkalkulation nach der oben beschriebenen Vorgehensweise. Gehen Sie hierzu vor wie in Übung 1.2 ($M \Rightarrow I \Rightarrow U_{ind} \Rightarrow f$). Analysieren Sie das Verhalten der Steuerung bei Vorgabe eines willkürlichen Lastprofils (z.B. einen Lastsprung bei Index $k = N$). Welches Verhalten zeigt die Regelstrecke bei einem durch die Steuerung fest eingestellten Sollwert? Hinweis: Verwenden Sie eine Grafik. Folgendes Schema soll als Muster für einen möglichen Aufbau eines Arbeitsblattes in der Tabellenkalkulation dienen.

Motor	Nennrehzahl fN	3000 rpm	abgeleitete Größen:		
	Nennstrom IN	3 A	Drehmomen MN	0,143 Nm	
	Nennleistung PN	45 W	Uind Nenn UindN	15,000 V	
	Nennspannung UN	24 V	Ankerwiders R	3,000 Ohm	
	Trägheitsmomen J	60 1,00E-06 kg m2	Drehzahl fN	50,000 1/s	
Sollwert	Ankerspannung U1	24 V	$k = w0/UN = wN/UindN$	20,95 1/Vs	
			$k2 = k * R * IN / MN$	1316,29 1/VAs2	
Modell	Zeitintervall Δt	0,01 s	2 Messpunkte pro Umdrehung bei fN		
ohne Trägheitsmoment des Rotors					
Index k	ML/MN	I	Uind	Drehzahl f	f/fN
-1					
0	0,5	1,500	19,50	3900	1,3
1	0,5	1,500	19,50	3900	1,3
2	0,5	1,500	19,50	3900	1,3
3	0,5	1,500	19,50	3900	1,3
4	0,5	1,500	19,50	3900	1,3
5	0,5	1,500	19,50	3900	1,3
mit Trägheitsmoment des Rotors					
w(k)	f(k) [rpm]	f(k)/fN	$w(k) = a * U1 - b * ML + c * w(k-1)$		
0	0	0,00	Startbedingung: Stillstand		
45,91	438	0,15			
86,65	827	0,28			
122,82	1173	0,39			
154,92	1479	0,49			
183,42	1751	0,58			
208,71	1993	0,66			

Übung 1.5: Modifizieren Sie die Tabellenkalkulation aus Übung 1.4 so, dass das Trägheitsmoment des Rotors berücksichtigt wird. Verwenden Sie hierzu Gleichung (1.3). Welchen Einfluss hat das Trägheitsmoment des Rotors auf Lastsprünge? Hinweis: Verwenden Sie die Konstanten k und k2, die sich in der Tabellenkalkulation numerisch leicht berechnen lassen. Ersetzen Sie die Ableitung ω' durch die Differenzgleichung $\omega' = \Delta\omega / \Delta t = (\omega(k) - \omega(k-1)) / \Delta t$. Formen Sie die Gleichung nach $\omega(k)$ um. Verwenden Sie eine Grafik zum Vergleich mit Übung 1.4.

Folgende Abbildung zeigt eine mit Hilfe eines Programms zur Tabellenkalkulation erzeugte Grafik. Hierbei wurden die Kennzahlen des Motors aus Übung 1.1 verwendet. Fest vorgegeben wurden: $U_1 = U_N = 24 V$, $\Delta t = 0,01 s$ (d.h. zwei Messwerte pro Umdrehung), Startbedingung: Stillstand (bei Index $k = -1$ wurde $\omega(-1) = 0$ vorgegeben). Das Lastprofil $M(k)$ wurde abhängig vom Index k in drei Stufen vorgegeben, wie im unteren Teil der Abbildung zu erkennen ist.

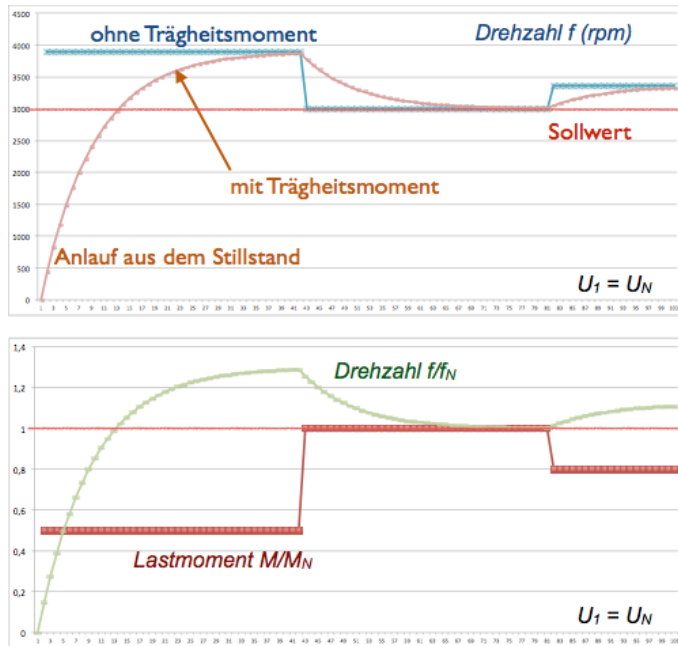


Bild 1.4 Verhalten des Motors bei wechselnder Last (aus dem Modell berechnet)

Wie man aus der Abbildung erkennt, startet der Motor aus dem Stillstand mit halber Last ($M/M_N=0,5$). Nach dem Anlaufen erhöht sich die Drehzahl über den gewünschten Sollwert (Nennzahl) hinaus. Die Last springt dann auf den Wert der Nennlast ($M/M_N=1$). Die Drehzahl erreicht unter dem Einfluss der Trägheit des Rotors den Sollwert. Anschliessend sinkt die Last auf $0,8 M_N$, wodurch sich die Drehzahl wiederum erhöht. Die Drehzahlschwankungen bewegen sich bei diesem Motor im Bereich von 30% bei Lastschwankungen von 50%.

1.1. Regelung

Möchte man die Drehzahl genauer bzw. ohne Kenntnis der Regelstrecke einstellen, ist eine Messung der tatsächlichen Drehzahl erforderlich. Ein Drehgeber liefert die aktuelle Drehzahl. Die Abweichung vom vorgegebenen Sollwert wird durch einen Regler minimiert. Der Regler wirkt hierzu auf das Stellglied solange ein, wie sich die Regelabweichung reduzieren lässt.

Kennzeichen eines Regelkreises ist die Rückkopplung: der gemessene aktuelle Wert wird mit dem Sollwert verglichen. Die Abweichung dient als Kriterium für das Einwirken des Reglers. Folgende Abbildung zeigt eine mögliche Erweiterung der Steuerung zu einer Regelung der Drehzahl.

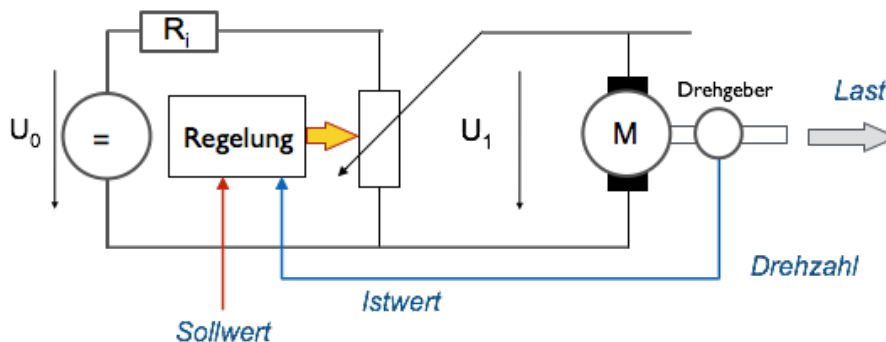


Bild 1.5 Erweiterung der Steuerung zu einer Regelung

Die Regeleinrichtung bewertet die Abweichung der Drehzahl vom gewünschten Sollwert und wirkt über das Stellglied auf den Motor ein, indem sie die bisher konstant gehaltene Ankerspannung in geeigneter Weise verstellt. In der Praxis würde man für eine digitale Regelung die Ankerspannung durch Pulsweitenmodulation verstellen, also ein digitales Schaltelement als Stellglied verwenden. Das Prinzip ist jedoch gleich. In der Regelungstechnik sind für Regelkreise die in folgender Abbildung gezeigten Begriffe gebräuchlich.

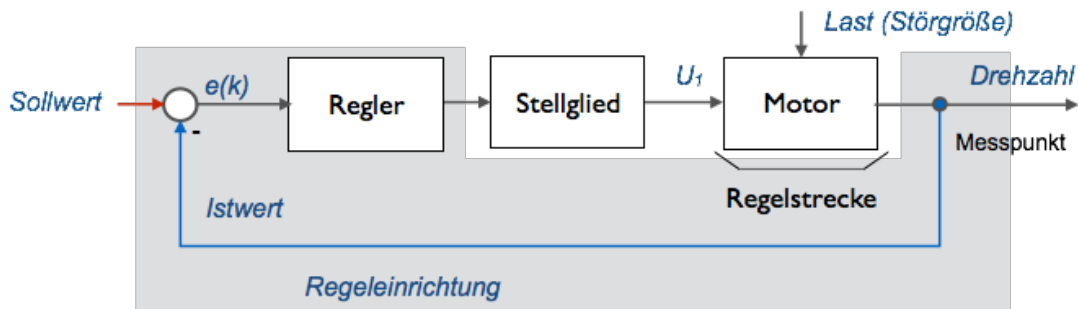


Bild 1.6 Regelkreis

Der Motor bildet die Regelstrecke. Die wechselnde Last ist nicht voraus kalkulierbar und wirkt daher als Störgröße auf die Regelstrecke ein. Der Messpunkt, die Bildung der Differenz aus Sollwert und Istwert, sowie der Regler gehören zur Regeleinrichtung. Unter dem Regler wird der Teil verstanden, der auf die Regelabweichung reagiert und auf das Stellglied einwirkt. In der Abbildung wird die Rückkopplung in Form der Regelschleife deutlich.

1.2. P-Regler

Für den Regler ist nun zu definieren, in welcher Weise er auf die Regeldifferenz (die Abweichung des gemessenen Istwertes vom Sollwert) reagieren soll. Im einfachsten Fall soll für die Drehzahlregelung bei einer Abweichung von der Sollzahl die Ankerspannung proportional zur Regelabweichung angehoben oder gesenkt werden. In diesem Fall spricht man von einem Proportionalregler, kurz: P-Regler.

Den P-Regler kann man durch den Faktor beschreiben, mit dem er die Regelabweichung bewertet. Der P-Regler lässt sich also durch folgende Gleichung beschreiben:

$$u_R(k) = K_P * e(k) \quad (1.4)$$

Hierbei bezeichnet $e(k)$ die Regeldifferenz, K_P den Proportionalitätsfaktor des Reglers, und $u_R(k)$ die Ausgangsgröße des Reglers. In dieser normierten Schreibweise ist die Ausgangsgröße $u_R(k) = 0$, wenn der Sollwert erreicht ist. Auf positive Regeldifferenzen (Istwert kleiner als Sollwert) reagiert der Regler mit positivem Ausgangssignal, er möchte den Istwert also nach oben treiben. Umgekehrt reagiert er auf negative Regeldifferenzen (Istwert überschreitet den Sollwert) abschwächend auf die Regelstrecke.

In der normierten Schreibweise ist der Reglerausgang gleich Null, wenn der Istwert auf Soll ist (Regeldifferenz gleich Null). Im Falle der Drehzahlregelung soll in diesem Fall die Ankerspannung gleich der Nennspannung sein. Die Stellgröße $U_1(k)$ errechnet sich also aus folgender Gleichung.

$$U_1(k) = K_P * e(k) + U_N \quad (1.5)$$

Übung 1.6: Ergänzen Sie Ihr Modell der Regelstrecke in der Tabellenkalkulation um den Regler. Wählen Sie für K_P einen geeigneten Wert. Vergleichen Sie das Verhalten der Regelstrecke mit Regler mit dem Verhalten ohne Regler aus Übung 1.5. Hinweis: Am einfachsten kopieren Sie das Arbeitsblatt der Steuerung in ein neues Arbeitsblatt Regelung. So bleibt Ihnen die unregelte Strecke erhalten. Für den Regler ergänzen Sie eine Spalte für die Regeldifferenz $e(k)$, sowie eine Spalte für den Regelalgorithmus gemäß Gleichung (1.5). Verwenden Sie eine Grafik.

Folgende Abbildung zeigt das Verhalten der Regelstrecke mit dem P-Regler. Während bei halbem Lastmoment die unregelte Strecke (siehe Abbildung 1.4 unten) eine Abweichung von ca 30% zeigte, ist diese Abweichung mit dem gewählten Proportionalitätsfaktor des Reglers deutlich geringer. Außerdem schwingt die Regelstrecke deutlich schneller auf Laständerungen ein. Einsatz des Reglers verbessert die Einhaltung der Sollfrequenz und das Zeitverhalten deutlich. Allerdings erkennt man auch, dass der P-Regler Abweichungen vom Sollwert nicht ausregelt.

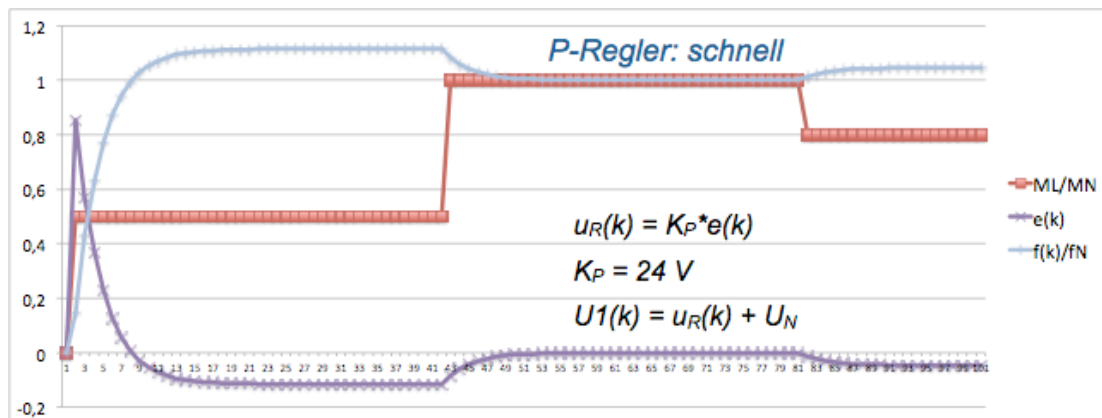


Bild 1.7 Drehzahlregelung mit P-Regler

Das in der Abbildung oben gezeigte Verhalten des Reglers ist in Bezug auf folgende Anwendungsfälle interessant:

- Führungsverhalten: Wie folgt der Regelkreis Änderungen der Führungsgröße? Die Führungsgröße ist in diesem Beispiel die durch den Sollwert vorgegebene gewünschte Drehzahl (Frequenz f_s). Die Führungsgröße ändert sich im abgebildeten Fall beim Einschalten: Sie folgt einer Sprungfunktion (im abgebildeten Maßstab f_s/f_N dem Einheitssprung). Die Drehzahl des Regelkreises schwingt sich nach dem Einschalten ohne Überschwinger etwas oberhalb des gewünschten Wertes ein. Bei einer Regelung auf einen festen Wert der Führungsgröße wäre das Führungsverhalten hiermit beschrieben. Bei einer Folgeregelung (variable Führungsgröße, hier: Vorgabe einer variabel einstellbaren Drehzahl) beschreibt das Führungsverhalten die Güte, mit der der Regelkreis den Vorgaben folgt.
- Störverhalten: Wie kompensiert der Regelkreis Änderungen der Störgröße? In der Abbildung spielt die variable Last die Rolle der Störgröße. Das Störverhalten beschreibt, wie gut der Regelkreis Lastwechsel ausregelt. Das Störverhalten zeigt sich in der Abbildung also an den Lastwechseln, wobei die Führungsgröße hierbei konstant gehalten wurde.

In Gleichung (1.4) wurde der Regelalgorithmus des P-Regler in zeitdiskreter Schreibweise angegeben, so wie man ihn bei einer digitalen Regelung programmieren würde. Zur Erläuterung der Funktionsweise ist die Darstellung im Zeitbereich hilfreich.

$$u_R(t) = K_P * e(t) \quad (1.6)$$

In dieser Darstellung lässt sich der P-Regler als System interpretieren, das aus der Eingangsgröße $e(t)$ die Ausgangsgröße $u_R(t)$. Das System lässt sich im Zeitbereich z.B. beschreiben durch seine Impulsantwort oder Sprungantwort. Dem System lässt sich mit Hilfe der Laplace-Transformation eine Übertragungsfunktion $G(s)$ zuordnen. Folgende Abbildung zeigt die Sprungantwort und die Übertragungsfunktion des P-Reglers.

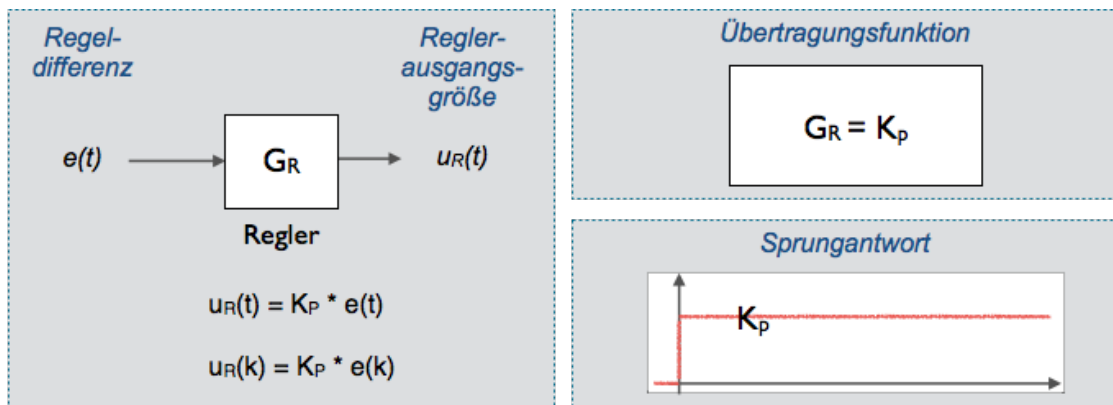


Bild 1.8 P-Regler als System mit Sprungantwort und Übertragungsfunktion

In diesem einfachen Fall wäre die Impulsantwort des Systems $u_{Ri}(t) = K_P * \delta(t)$. Die Laplace-Transformation der Impulsantwort ergibt als Übertragungsfunktion $G_R(s) = K_P$, den Proportionalitätsfaktor des Reglers. Wie man dem Regelalgorithmus entnimmt, folgt der Regler einem Einheitssprung Eingang ebenfalls proportional mit K_P (siehe Sprungantwort).

1.3. I-Regler

Beim I-Regler deutet der Name auf eine Integration hin (als sogenanntes Integrations-Glied bzw. kurz I-Glied in einer Signalkette). Integriert wird hierbei die Regeldifferenz über der Zeit. Der Regler lässt sich durch folgende Gleichung beschreiben.

$$u_R(t) = K_i * \int e(\tau) d\tau \quad \text{mit } \tau = 0 \text{ bis } t \quad (1.6)$$

Der Regler summiert (integriert) die Regelabweichungen aus der Vergangenheit bis zum Zeitpunkt $\tau=t$ und bewertet diese Fehlersumme mit der Reglerkonstanten K_i . In zeitdiskreter Schreibweise ersetzt man das Differenzial $d\tau$ durch das Abtastintervall Δt . Das Integral über den Abtastwerten $e(k)$ ist die Summe der Abtastwerte. Er ergibt sich folgende Gleichung für den I-Regler.

$$u_R(k) = K_i * \Delta t * \sum e(i) \quad \text{mit } i = 0, \dots, k \quad (1.7)$$

Übung 1.7: Ergänzen Sie in Ihrer Tabellenkalkulation den I-Regler. Wählen Sie den Reglerkoeffizienten K_i in geeigneter Weise und testen Sie den Regler an der Regelstrecke. Vergleichen Sie das Regelverhalten mit der unregelmäßigten Strecke und mit dem P-Regler. Hinweis: Ergänzen Sie einfach den P-Regler um eine zusätzliche Spalte für den I-Regler. Verwenden Sie eine Grafik.

Beim I-Regler wirken Regelabweichungen wegen der Integration dauerhaft auf das Regelverhalten. Auf diese Weise regelt der I-Regler Regelabweichungen aus. Ein Vergleich mit dem P-Regler zeigt aber auch, dass der I-Regler deutlich langsamer reagiert. Folgende Abbildung zeigt einen Testlauf mit den in der Abbildung genannten Reglerparametern.

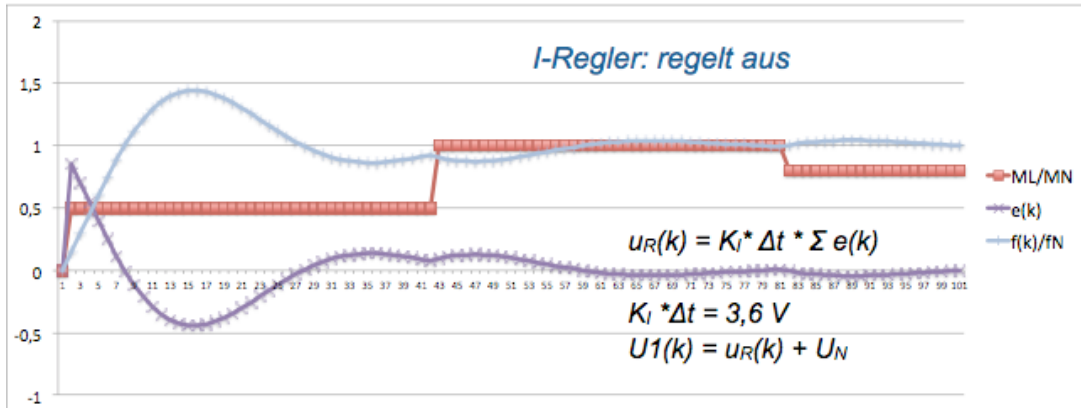


Bild 1.9 Drehzahlregelung mit I-Regler

Wenn man den I-Regler als System interpretiert, kann man ihn ebenfalls durch seine Übertragungsfunktion und Sprungantwort beschreiben. Das Abbild der Integration im Laplace-Bereich ist der Quotient $1/s$. Insgesamt erhält man also für die Übertragungsfunktion $G_R(s) = K_i / s$. Die Sprungantwort ermittelt man aus Gleichung (1.6) als Gerade mit der Steigung $K_i * \Delta t$, bzw. in zeitdiskreter Form aus Gleichung (1.7) zu $K_i * \Delta t$.

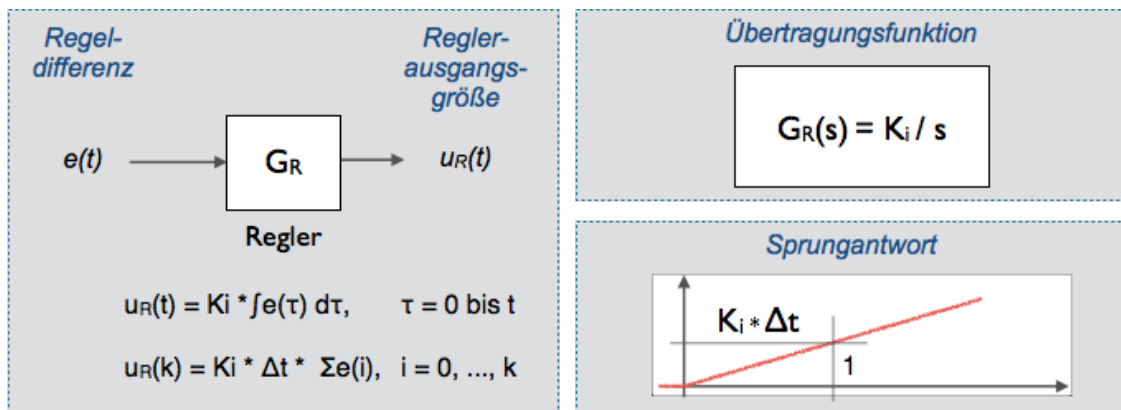


Bild 1.10 I-Regler als System mit Sprungantwort und Übertragungsfunktion

1.4. PI-Regler

Ein Vergleich der beiden Regler zeigt, dass P-Regler schnell und wirkungsvoll reagieren, aber nicht ausregeln. I-Regler regeln aus, sind allerdings langsam. Ein nahe liegender Gedanke ist es daher, beide Eigenschaften zu einem PI-Regler zu kombinieren. Kombination der Regelalgorithmen ergibt folgende Gleichungen für den kontinuierlichen und zeitdiskreten Fall.

$$m(t) = K_P * e(t) + K_I * \int e(\tau) dt \quad \text{mit } \tau = 0 \text{ bis } t \quad (1.8)$$

$$m(k) = K_P * e(k) + K_I * \Delta t * \sum e(i) \quad \text{mit } i = 0, \dots, k \quad (1.9)$$

Beide Regler wirken also in Abhängigkeit der Regeldifferenz und addieren ihre Wirkung. In einem Blockschaltbild hätte man also einen P-Regler und I-Regler parallel betrieben, deren Ausgänge sich zur Ausgangsgröße m addieren.

Übung 1.8: Ergänzen Sie in Ihrer Tabellenkalkulation den PI-Regler. Vergleichen Sie das Regelverhalten mit der unregulierten Strecke, dem P-Regler und dem I-Regler.

Folgende Abbildung zeigt einen Testlauf des kombinierten Reglers. Hierbei wurden die Reglerparameter unverändert übernommen, lediglich die Regelalgorithmen gemäß Gleichung (1.9) kombiniert. Es zeigt sich, dass sich tatsächlich die positiven Eigenschaften beider Regler kombinieren: Der PI-Regler reagiert wirkungsvoller und etwas schneller als der I-Regler. Im Unterschied zum P-Regler regelt er aus.

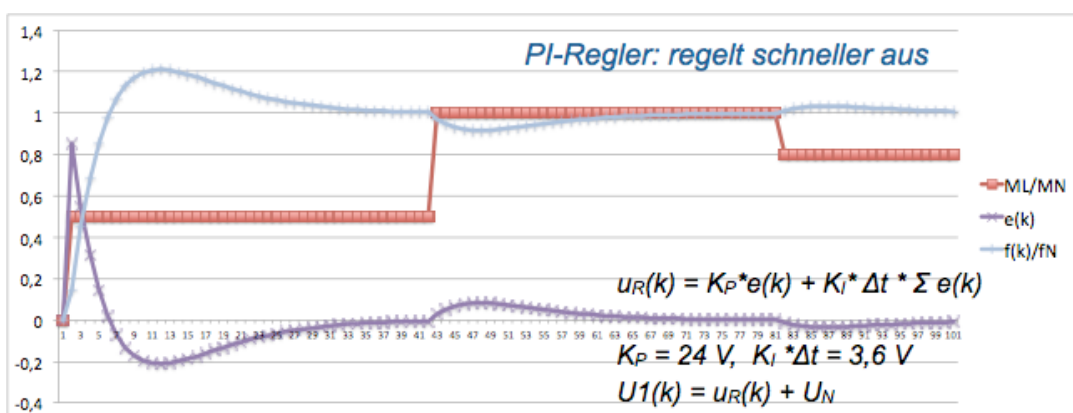


Bild 1.11 Drehzahlregelung mit PI-Regler

Übung 1.9: Beschreiben Sie die Übertragungsfunktion und die Sprungantwort des PI-Reglers.

Zusätzlicher D-Anteil

Um die Regelung noch etwas zu beschleunigen, könnte man aus der Regeldifferenz $e(t)$ einen Trend antizipieren und somit vorausschauend auf die Regelstrecke einwirken. Ein Trend der Funktion $e(t)$ entspricht mathematisch der Ableitung der Funktion, also $e'(t) = de(t) / dt$. Zusammen mit diesem differentiellen Anteil (D-Anteil) ergibt sich aus dem PI-Regler ein sogenannter PID-Regler. Folgende Abbildung zeigt die Regelkriterien für den in Abbildung 11 dargestellten Ablauf.

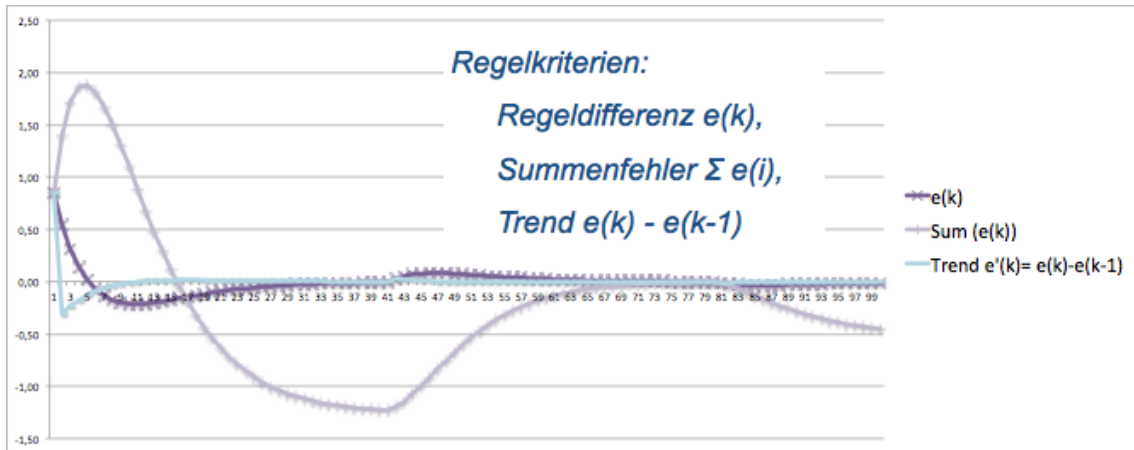


Bild 1.12 Regelkriterien

Der P-Regler reagiert unmittelbar auf die Regelabweichung $e(k)$. Der Summenfehler $\sum e(i)$ als Integral der Regelabweichung sorgt für das nachhaltige Ausregeln bei verbleibenden Regeldifferenzen. Die Trendkurve $e(k) - e(k-1)$ antizipiert den Verlauf der Regelabweichung: Beim Anfahren und bei den folgenden Lastsprüngen verstärkt sie den proportionalen Anteil unmittelbar nach dem Lastwechsel.

1.5. PID-Regler

Der D-Anteil des Reglers verwendet als Regelkriterium ist der Trend $e'(t) = de(t)/dt$ als zeitliche Ableitung der Regeldifferenz. Dieser Anteil ist mit dem Reglerparameter K_d zu bewerten. Insgesamt erhält man für den PID-Regler also folgende Gleichungen.

$$u_R(t) = K_P * e(t) + K_I * \int e(\tau) d\tau + K_d de(t)/dt \quad \text{mit } \tau = 0 \text{ bis } t \quad (1.10)$$

$$u_R(k) = K_P * e(k) + K_I * \Delta t * \sum e(i) + (K_d / \Delta t) * (e(k) - e(k-1)) \quad \text{mit } i = 0, \dots, k \quad (1.11)$$

Übung 1.10: Ergänzen Sie den PI-Regler in Ihrer Tabellenkalkulation um einen D-Anteil zu einem PID-Regler. Testen Sie den Regler.

Folgende Abbildung zeigt einen Testlauf, wobei die bisherigen Reglerparameter beibehalten wurden. Das Regelverhalten weicht mit den gewählten Parametern und dem gewählten Lastprofil nur unerheblich vom PI-Regler ab.

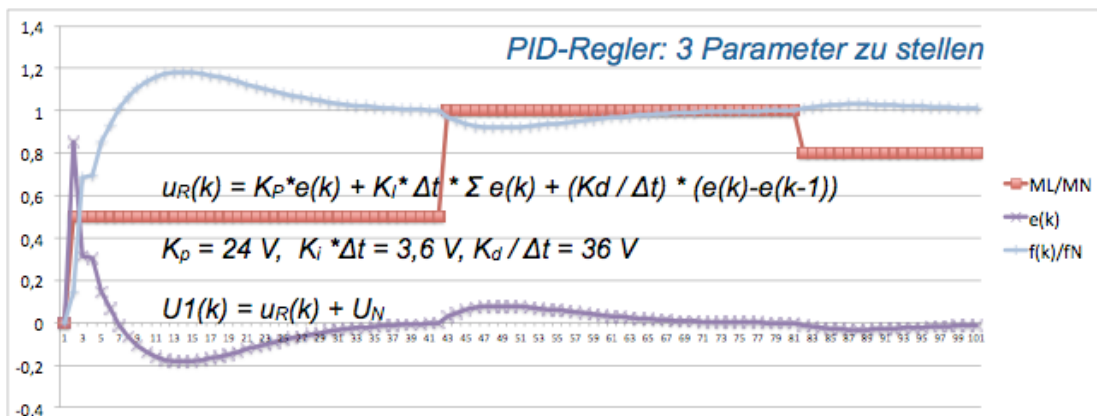


Bild 1.13 Drehzahlregelung mit PID-Regler

Das Reglerverhalten überrascht mit Blick auf die Regelkriterien (Fehler, Summenfehler und Fehlertrend) der einzelnen Anteile nicht. Der Fehlertrend gibt bei den Lastsprüngen nur punktuell einen Beitrag. Allerdings ist auch unverkennbar, dass mit den gewählten Reglerkoeffizienten der integrative Anteil überwiegt. Die Koeffizienten K_p , K_i und K_d wichten die in Abbildung 1.12 gezeigten Regelkriterien. Die Wahl geeigneter Koeffizienten, d.h. in der Einstellung der Reglerparameter, ist die wesentliche Aufgabe in der Regelungstechnik.

Wegen der durch den Regelkreis gegebenen Rückkopplung kann bei ungünstiger Wahl der Reglerparameter der Regelkreis instabil werden. Außerdem sind die Stellgrößen in einem realen System nur innerhalb vorgegebener Grenzen veränderbar. In diesem Fall ist die Ankerspannung des Motors zu beachten. Mit den gewählten Parametern des P-Anteils und D-Anteils ist diese beim initialen Lastsprung zu hoch. Im realen Fall würde man den Motor mit Hilfe einer Vorsteuerung erst auf Nenndrehzahl hochfahren (Ankerspannung wie in Abschnitt 1.1 festlegen), bevor man den Regler aktiviert. Kriterien zur Einstellung der Reglerparameter werden in Kapitel 2 im Zusammenhang mit einer realen Regelstrecke vorgestellt.

1.6. Übertragungsfunktion

Für die Regelstrecke sei eine Übertragungsfunktion G_S angenommen. Durch Hinzufügen des Reglers und des Regelkreises erhält man die in folgender Abbildung gezeigte Struktur. Hierbei sei G_R die Übertragungsfunktion des Reglers. Der Regelkreis verändert das Verhalten der Regelstrecke. In welcher Weise die Regelung das Verhalten beeinflusst, zeigt sich durch Vergleich der Übertragungsfunktion der Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion des geregelten Systems.

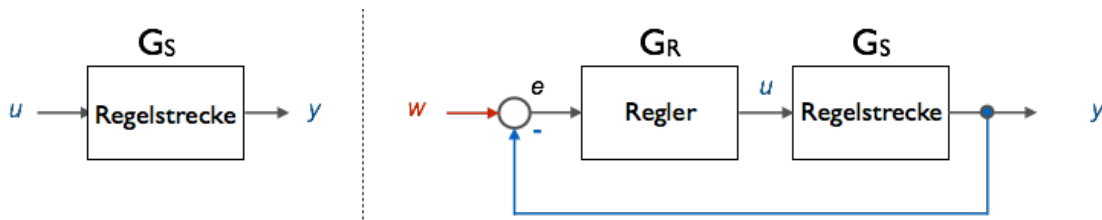


Bild 1.14 Vergleich der unregelten mit der geregelten Strecke

Die Übertragungsfunktion eines Systems ist als Verhältnis des transformierten Ausgangssignals zum transformierten Eingangssignal definiert. Am Ausgang des Regelkreises erhält man:

$$Y(s) = (W(s) - Y(s)) G_R(s) G_S(s) \quad (1.12)$$

Nach Umformung erhält man als Übertragungsfunktion des Regelkreises aus dem Verhältnis $Y(s)$ zu $W(s)$:

$$G(s) = G_R(s) G_S(s) / (1 + G_R(s) G_S(s)) \quad (1.12)$$

Die Einführung des Regelkreises hat also erheblichen Einfluss auf die Übertragungsfunktion des geregelten Systems im Vergleich zur unregelten Regelstrecke. Die durch Gleichung (1.3) beschriebene Regelstrecke hat eine Übertragungsfunktion der Form:

$$G_S(s) = a / (1 + b s) \quad (1.13)$$

Im einfachsten Fall wird die Strecke durch einen P-Regler mit der Übertragungsfunktion $G_R = K_p$ geregelt. Für die Übertragungsfunktion des geregelten Systems erhält man dann:

$$G(s) = K_P a / (1 + K_P a + b s) \quad (1.14)$$

Übung: 1.11: Berechnen Sie die Koeffizienten a und b der Regelstrecke aus Gleichung (1.13) in Abhängigkeit der Konstanten in Gleichung (1.3) unter der Annahme $M_L=0$.

Übung 1.12: Berechnen Sie die Polstellen der Übertragungsfunktionen der unregelmäßigten Strecke nach Gleichung (1.13), sowie die Polstellen der geregelten Strecke nach Gleichung (1.14). Berechnen Sie die konkreten Werte der Polstellen für die Kennzahlen und Reglereinstellung aus Abschnitt 1.2. Welchen Einfluss hat der Regler?

1.7. Einfluss des Reglers auf die Übertragungsfunktion

Das Beispiel zeigt, dass sich durch den Einfluss des Reglers die Polstellen der Übertragungsfunktion gegenüber dem unregelmäßigten System verschieben. Mit den Werten aus Abschnitt 1.2 ergibt sich folgendes Bild. Für den unregelmäßigten Motor im Leerlauf erhält man die Übertragungsfunktion:

$$G_s(s) = 3,33 / (1 + 0,08 s) \quad (1.15)$$

Hierbei wurde als Eingangsgröße die Ankerspannung U_1 in V gewählt, als Ausgangsgröße die Frequenz f in Hz (nicht die Kreisfrequenz $\omega = 2 \pi f$). Für den Regler wurde in Abschnitt 1.3 der relative Fehler $e'(t) = (f_s - y(t)) / f_s$ verwendet. Bei Verwendung des absoluten Wertes der Frequenz f als Ausgangssignal $y(t) = f(t)$ ist die Regeldifferenz $e(t) = f_s - y(t)$. Der zugehörige Reglerparameter K_P errechnet sich dann aus dem in Abschnitt 1.5 verwendeten Parameter K'_P zu $K_P = K'_P / 50$ Hz für die gewünschte Sollfrequenz f_s . Unter diesen Voraussetzungen errechnet sich die Übertragungsfunktion des geregelten Systems zu:

$$G(s) = 1,6 / (2,6 + 0,008 s) = 0,615 / (1 + 0,03 s) \quad (1.16)$$

Berechnet man die zugehörigen Polstellen, so ergibt sich im ersten Fall ein Pol bei $s = -1 / 0,08 = -12,6$. Im zweiten Fall erhält man eine Polstelle bei $s = -1 / 0,03 = -32,9$. Der Einsatz des Reglers hat den Pol der unregelmäßigten Strecke weiter nach links in der komplexen Ebene verschoben.

Wie man sich vielleicht aus der Systemtheorie erinnert, liefern die Pole p der Übertragungsfunktion im Zeitbereich Beiträge der Form e^{-pt} . Man kann die Faktoren vor s in den Gleichungen (1.15) und (1.16) daher auch unmittelbar als Zeitkonstanten τ verstehen im Sinne von $e^{-pt} = e^{-t/\tau}$.

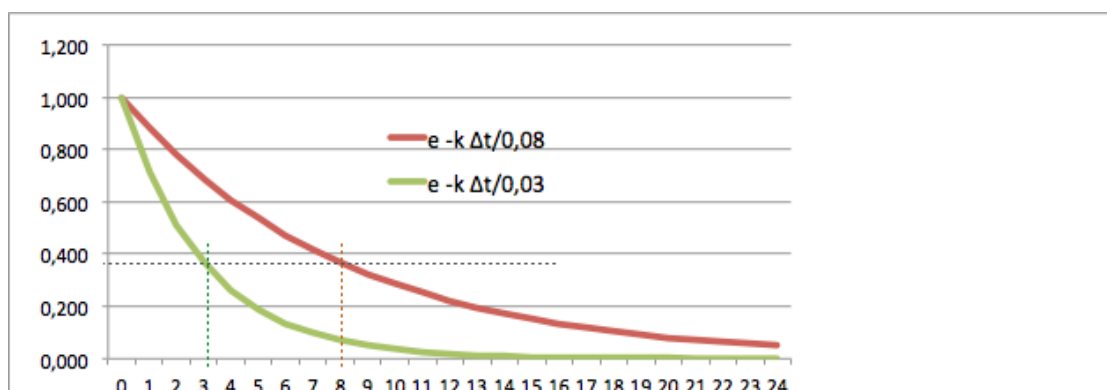


Bild 1.15 Einfluss des Reglers auf das Einschwingverhalten

Aus dieser Perspektive ist die Wirkung des Reglers unmittelbar einleuchtend: Die unregelmäßigte Strecke hat eine Zeitkonstante τ von 0,08 Sekunden. Bezogen auf die Dauer einer Umdrehung von $f_s = 20$ ms bei Sollfrequenz bzw. auf das in Abschnitt 1.5 verwendete Intervall von $\Delta t = 10$ ms zwischen

den Messpunkten vergehen also ca. 4 Umdrehungen bzw. 8 Messpunkte innerhalb der Anstiegszeit $\tau = 0,08$. Der Einsatz des Reglers verringert die Anstiegszeit auf 0,03 Sekunden. Die Abbildung oben gibt den Verlauf beider Beiträge wieder, wobei als Zeitintervall zwischen dem Messwerten $\Delta t = 10$ ms gewählt wurde.

Übung 1.13: Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Polstellen und dem Einschwingverhalten (Sprungantwort) des Systems? Vergleichen Sie den geregelten Fall mit dem ungeregelten Fall.

Übung 1.14: Wir könnten Sie die Lage der Polstellen zur Auslegung des Reglerkonstanten K_P verwenden? Welche Werte für K_P sollten Sie vermeiden? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Übung 1.15: Welche Bedeutung hat der Zähler der Übertragungsfunktionen in den Gleichungen (1.15) und (1.16)? Vergleichen Sie die unregelte Strecke mit der geregelte Strecke im eingeschwungenen Zustand. Hinweis: Verwenden Sie die Grenzwertsätze der Laplace-Transformation. Wohin bewegt sich die Variable s in der Übertragungsfunktion für $t \rightarrow \infty$? Wohin bewegt sich die Variable s in der Übergangsfunktion für $t \rightarrow \infty$? Welcher Fall hat im eingeschwungenen Zustand die geringere Abweichung vom Sollwert?

2. Drehzahlregelung mit PID Regler

In diesen Abschnitt soll ein Gleichstromantrieb als reale Regelstrecke durch einen digitalen Regler mit vorgegebener, konstanter Drehzahl betrieben werden. Der Regler wird als Software auf einer SPS realisiert. Die Regelstrecke enthält den Motor mit Drehgeber, wie aus dem Laborversuch mit analogem Regler bekannt. Der Algorithmus soll auf dem Regler für minimalen Rechenaufwand optimiert werden. Zur Einstellung der Reglerparameter werden Regeln vorgestellt, die sich unmittelbar in der Realität überprüfen lassen.

2.1. Regelstrecke

Die Regelstrecke ist auf einer Motorbaugruppe untergebracht, die bereits in Laborversuchen für analoge Regler verwendet wurde. Die Motorbaugruppe enthält einen Drehgeber zur Messung der Regelgröße. Als Stellglied wird ein Leistungsverstärker verwendet, der sich über Pulsweitenmodulation ansteuern lässt. Folgende Abbildung zeigt den Aufbau.

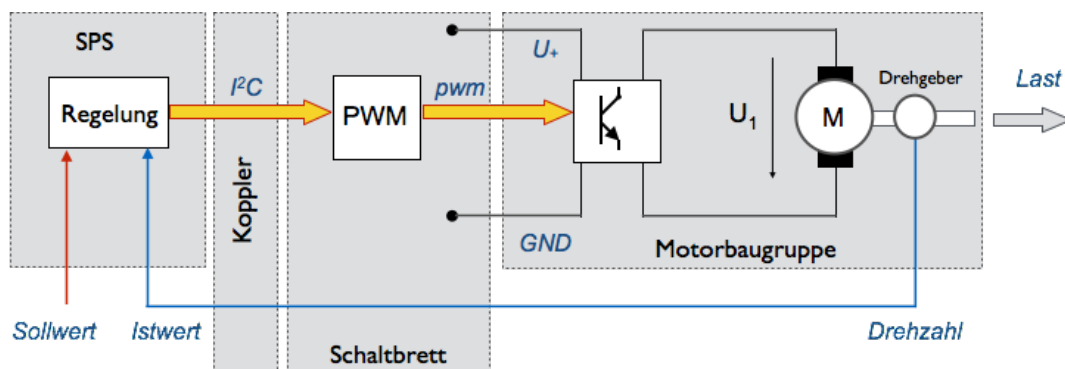


Bild 2.1 Aufbau der Drehzahlregelung mit SPS

Somit benötigt die SPS nur digitale Eingänge und Ausgänge. Damit die Pulsweite nicht direkt vom Prozessor (CPU) der SPS erzeugt werden muss, wird ein Baustein verwendet, der zu einem

gegebenen Wert eigenständig ein pulsweitenmoduliertes Signal erzeugt. Der gegebene Wert wird von der SPS an den Baustein über einen seriellen Bus (I²C-Bus) übertragen. Der serielle Bus sowie die digitalen Eingänge und Ausgänge der SPS werden über einen Koppler (Flachbandkabel mit passendem Steckern zur SPS sowie einem Übergang an ein Schaltbrett angeschlossen. Der PWM-Baustein sowie ggf. weitere benötigte Elemente werden auf dem Schaltbrett verdrahtet.

Übung 2.1: Bereiten Sie Ihre SPS auf den Anschluss der Regelstrecke vor. Hierzu zählt die Vorgabe der Ankerspannung über Pulsweitenmodulation (PWM), sowie das Einlesen der Messwerte des Drehgebers. Schliessen Sie die Regelstrecke an Ihre SPS an. Betreiben Sie die Regelstrecke mit Hilfe der SPS als Steuerung. Hinweis: Die Bibliothek der SPS enthält Beispiele und Funktionsbausteine zum Anschluss des PWM-Bausteins sowie weiterer Schnittstellen.

2.2. Regelalgorithmus

Der Regler soll als PID-Regler ausgeführt werden. Gleichung (2.1) beschreibt den Regelalgorithmus im zeitkontinuierlichen Fall. Gleichung (2.2) beschreibt den Algorithmus im zeitdiskreten Fall, wobei Δt das Abtastintervall bezeichnet.

$$u_R(t) = K_P * e(t) + K_I * \int e(\tau) d\tau + K_D de(t)/dt \quad \text{mit } \tau = 0 \text{ bis } t \quad (2.1)$$

$$u_R(k) = K_P * e(k) + K_I * \Delta t * \sum e(i) + (K_D / \Delta t) * (e(k) - e(k-1)) \quad \text{mit } i = 0, \dots, k \quad (2.2)$$

Bei der Realisierung als digitaler Regler wird der Algorithmus in einer Programmschleife zyklisch ausgeführt. Um den Rechenaufwand bzw. die Laufzeit auf dem Regler zu reduzieren, lässt sich der Algorithmus in folgenden Punkten optimieren: (1) rekursive Berechnung der Fehlersumme $\sum e(i)$, (2) die Division durch eine Multiplikation ersetzen, (3) die Anzahl der Operationen reduzieren. Durch Umformen erhält man einen vereinfachten Algorithmus der Form:

$$u_R(k) = u_R(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) \quad (2.3)$$

Hierbei bedeuten

$$q_0 = K_P + K_I * \Delta t + (K_D / \Delta t) \quad (2.4)$$

$$q_1 = -K_P - 2 * (K_D / \Delta t) \quad (2.5)$$

$$q_2 = (K_D / \Delta t) \quad (2.6)$$

Übung 2.2: Prüfen Sie die Korrektheit von Gleichung (2.3) in Bezug auf Gleichung (2.2).

Übung 2.3: Programmieren Sie den Regelalgorithmus auf Ihrer SPS. Testen Sie den Algorithmus an der Regelstrecke.

2.3. Einstellung der Reglerparameter

Zum Einstellen der Reglerparameter gibt es unterschiedliche Methoden. Ein guter Startpunkt ist die unregelmäßige Strecke, d.h. alle Reglerparameter sind zunächst auf Null. Dann lässt sich z.B. durch Probieren eine günstige Reglereinstellung finden. Hierzu erhöht man zunächst den proportionalen Anteil K_P , bis die Dämpfung des Systems schlecht wird. Anschließend erhöht man den I-Anteil. Dann wäre zu probieren, ob ein D-Anteil die Strecke stabilisiert.

Neben der Methode des Probierens kann man auch einschlägige Einstellregeln verwenden, wie z.B. die Einstellregeln nach Ziegler/Nichols. Nach diesem Verfahren wird ausgehend vom Startpunkt Null zunächst der K_P -Anteil so weit erhöht, bis das System ins Schwingen gerät, d.h. in einen kritischen Zustand. Diese Reglereinstellung wird als K_{krit} erfasst, sowie die Periodendauer T_{krit} der Schwingung. Als Reglereinstellungen verwendet man dann: $K_P = 0,6 K_{krit}$, $K_i = 1,2 K_{krit}/T_{krit}$ und $K_d = 0,075 K_{krit} * T_{krit}$. Das Verfahren von Ziegler-Nichols setzt voraus, dass man die Regelstrecke in einen kritischen Zustand fahren darf.

Die Einstellung der Reglerparameter sind natürlich abhängig von den Eigenschaften der Regelstrecke. Für unterschiedliche Strecken finden sich in der Literatur Vorschläge für günstige Reglereinstellungen. Ist die Strecke bekannt, kann man jedoch mit Hilfe der Übertragungsfunktion des geregelten Systems selber günstige Reglereinstellungen ableiten, z.B. durch Vorgabe der gewünschten Zeitkonstanten bzw. der Lage der Pole.

Übung 2.4: Optimieren Sie die Einstellung Ihrer Reglerparameter nach Ihren Vorstellungen. Untersuchen Sie das Führungsverhalten und Störverhalten Ihres Reglers.

2.4. Stabilität

Wie in Abbildung 1.14 in Abschnitt 1 gezeigt, entsteht durch die Einführung des Regelkreises eine Rückkopplung (engl. feed back). Wenn diese Rückkopplung zu einer Mitkopplung wird, gerät das geregelte System ins Schwingen. Dieser Effekt ist von Veranstaltungen bekannt, wenn ein Mikrofon in die Nähe eines Lautsprechers gerät. Die Übertragungsfunktion des Regelkreises beträgt

$$G(s) = G_R(s) G_S(s) / (1 + G_R(s) G_S(s)) \quad (2.7)$$

Hierbei bedeutet $G_S(s)$ die Übertragungsfunktion der Strecke, und $G_R(s)$ die Übertragungsfunktion des Reglers. Aus der Lage der Pole der Übertragungsfunktion lässt sich die Stabilität des Systems ableiten. Gibt es Pole in der rechten komplexen Halbebene, so ist das System instabil. Die Wahl der Reglerparameter ist also so zu wählen, dass es solche Pole nicht gibt.

Haben alle Pole der Übertragungsfunktion negative Realteile, so ist das System asymptotisch stabil, d.h. es schwingt sich auf einen stabilen Zustand ein. Je weiter die Pole der Übertragungsfunktion in der linken Halbebene von der imaginären Achse entfernt sind, desto geringer sind die Zeitkonstanten und desto höher ist die Dämpfung des Systems.

Ist der Realteil eines Poles gleich Null, so ist das System ungedämpft. Ein Beispiel hierfür wäre ein idealer Schwingkreis (mit einem konjugiert komplexen Polpaar auf der imaginären Achse). Ein solches System bezeichnet man als grenzstabil. Pole mit positivem Realteil bedeuten, dass das System sich aufschwingt, also instabil ist. Zu den instabilen Systemen rechnet man auch die grenzstabilen Systeme.

3. Zustandsregelung

3.1. Zustandsmodell

Unter einem Zustandsmodell versteht man eine einheitliche Beschreibung der Regelstrecke in Form eines Differenzialgleichungssystems erster Ordnung. Für den Gleichstrommotor erhält man eine Zustandsbeschreibung wiederum aus dem elektrischen Ersatzschaltbild. Es wird zunächst der leer laufende Motor betrachtet (ohne das Lastmoment M_L).

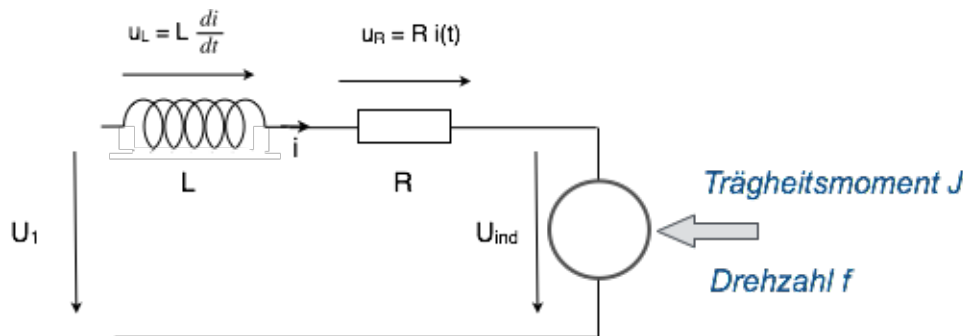


Bild 3.1 Elektrisches Ersatzschaltbild des Motors (Ankerkreis) im Leerlauf

Nach der Maschenregel folgt aus dem Ersatzschaltbild (siehe auch Kapitel 1):

$$u_1(t) = L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) + \omega(t)/k \quad (3.1)$$

Für die Drehmomente gibt es ebenfalls eine summarische Betrachtung: Das Drehmoment des Motors ist gleich der Drehimpulsänderung des Rotors (Ankers):

$$M_M(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} \quad (3.2)$$

Der Ankerstrom ist proportional zum Drehmoment. Einsetzen von $M_M(t) = k_M i(t)$ ergibt:

$$k_M i(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} \quad (3.3)$$

Mit den Gleichungen (3.1) und (3.3) erhält man ein Differenzialgleichungssystem für die beiden Zustandsvariablen $i(t)$ und $\omega(t)$. Die Ankerspannung $u_1(t)$ ist Eingangsgröße des Systems: $u(t) = u_1(t)$. Ausgangsgröße des Systems ist die Drehzahl des Motors, hier dargestellt als Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$. Das System ist beschrieben durch seine physikalischen Eigenschaften: L , R , J , $k_M = M_N/I_N$. Hierbei bezeichnet J das Trägheitsmoment des Rotors. Der Proportionalitätsfaktor (Motorkonstante) k_M berechnet sich aus dem Verhältnis $M/M_N = i/I_N$ (z.B. im eingeschwungenen Zustand mit Lastmoment M_L).

Wenn man die beiden Zustandsvariablen $i(t) = x_1(t)$ und $\omega(t) = x_2(t)$ bezeichnet, sowie die Eingangsgröße mit $u(t)$ und die Ausgangsgröße mit $y(t)$, lassen sich die beiden Gleichungen (3.1) und (3.3) auf eine einheitliche Form bringen, indem man die beiden Gleichungen nach $\dot{x}_1(t) = dx_1(t)/dt$ und $\dot{x}_2(t) = dx_2(t)/dt$ umformt.

$$\dot{x}_1(t) = - (R/L) * x_1(t) - (1/kL) * x_2(t) + (1/L) * u(t) \quad (3.4)$$

$$\dot{x}_2(t) = (k_M/J) * x_1(t) \quad (3.5)$$

Allgemein haben die Gleichungen (3.4) und (3.5) nun die Form:

$$\dot{x}_1(t) = a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + b_1 u(t) \quad (3.6)$$

$$\dot{x}_2(t) = a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t) + b_2 u(t) \quad (3.7)$$

Im speziellen Fall sind $a_{22}=0$ und $b_2 = 0$, woraus die Darstellung in (3.4) und (3.5) folgt. In vektorieller Schreibweise kann man (3.6) und (3.7) wie folgte zusammenfassen.

$$\dot{x}(t) = A x(t) + b u(t). \tag{3.8}$$

Hierbei enthält die Systemmatrix nun die Systemkoeffizienten. Aus dem skalaren Eingangssignal $u(t)$ wird durch Multiplikation mit dem Spaltenvektor $b = (b_1, b_2)$ der Spaltenvektor $((b_1 u(t), b_2 u(t)))$. Der Vektor $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ enthält die beiden Zustandsgrößen $x_1(t)= i(t)$ und $x_2(t)= \omega(t)$ und wird folglich als Zustandsvektor bezeichnet. Diese Darstellung als Differenzialgleichungssystem erster Ordnung ist immer möglich: Differenzialgleichungen höherer Ordnung lassen sich immer in ein Differenzialgleichungssystem erster Ordnung umformen.

Die Ausgangsgröße $y(t) = \omega(t)$ lässt sich schließlich ebenfalls in allgemein gültiger Form durch eine Vektoroperation aus dem Zustandsvektor berechnen:

$$y(t) = c^T x(t) \tag{3.9}$$

Hierbei ist der Ausgangsvektor c^T ein Zeilenvektor mit $c^T = (0, 1)$. Folgende Abbildung zeigt sich die Beschreibung der Regelstrecke im Zustandsraum durch die Gleichungen (3.8) und (3.9) als Blockschaltbild. Hierbei wurde Gleichung (3.9) noch durch einen skalaren Durchgangsfaktor d erweitert, der eine direkte Einwirkung des Eingangssignals $u(t)$ auf das Ausgangssignal $y(t)$ ermöglicht.

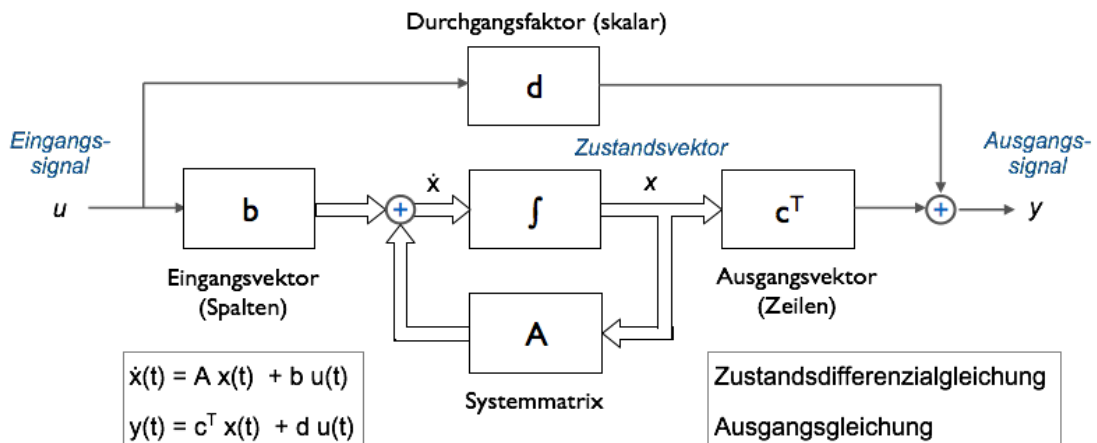


Bild 3.2 Blockschaltbild der Zustandsgleichungen

Übung 3.1: Gegeben sei die Differenzialgleichung (DGL) 3. Ordnung: $y'''(t) + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = u(t)$. Formen Sie die DGL um in ein Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung nach dem Schema der Zustandsgleichungen. Beschreiben Sie die Systemmatrix, Eingangsvektor und Ausgangsvektor. Hinweis: Verwenden Sie die Beziehungen $x_1(t)=y(t)$, $x_2(t)=y'(t)$, $x_3(t)=y''(t)$, ...

Übung 3.2: Simulieren Sie das Zustandsmodell des Gleichspannungsmotors mit Ihrem Programm zur Tabellenkalkulation bzw. in MATLAB. Hinweis: Berechnen Sie die Systemmatrix mit den Motorkenngrößen aus Übung 1.5. Nehmen Sie einen plausiblen Wert für die Induktivität (z.B. $L = 1 \text{ mH}$). Stellen Sie den Verlauf der Zustandsgrößen für ein vorgegebenes Eingangssignal dar.

Folgende Abbildung zeigt einen Testlauf des Modells mit der Tabellenkalkulation. Gezeigt sind die Eingangsgröße $u_1(k)$, sowie die beiden Zustandsgrößen $x_1(k)$ (Ankerstrom) und $x_2(k)$ (Drehzahl). Um die Darstellung zu normieren, sind die auf die Nennwerte bezogenen Verläufe gezeigt (also Eingangsspannung/Nennspannung, Ankerstrom/Nennstrom, Drehzahl/ Nenndrehzahl). Die Werte

wurden durch Diskretisierung der Zustandsgleichungen berechnet, wobei die Ableitungen $\dot{x}(t)$ durch die Differenzen $(x(k) - x(k-1)) / \Delta t$ ersetzt wurden. Diese Näherung gilt, wenn das Abtastintervall Δt hinreichend klein gewählt wird (im Verhältnis zu den Zeitkonstanten des Systems). Das Differenzialgleichungssystem wird hierbei in ein Differenzengleichungssystem überführt, das sich nach den für lineare Gleichungssysteme gängigen Verfahren lösen lässt (für ein System 2. Ordnung: durch Einsetzen nach einer Variable auflösen, dann die zweite Variable berechnen).

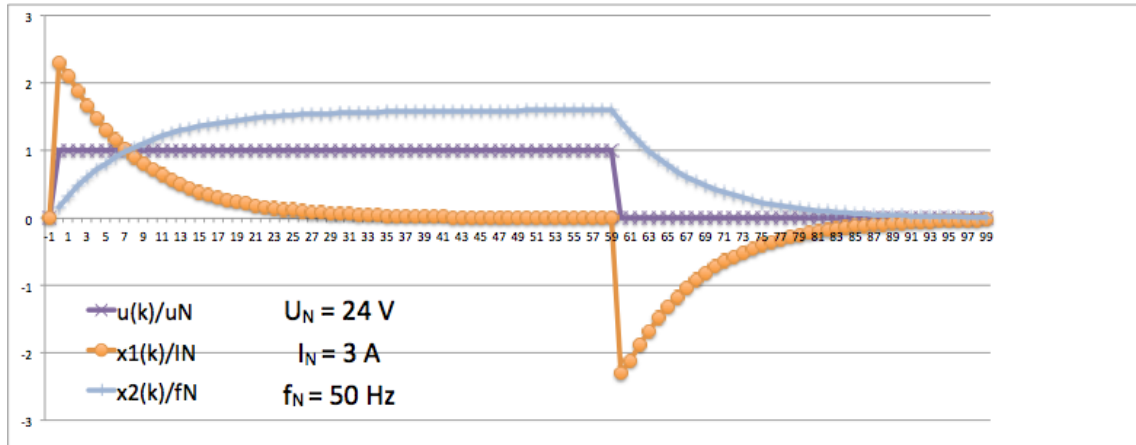


Bild 3.3 Verlauf der Zustände beim Einschalten und Ausschalten

Die Beschreibung der Regelstrecke in der Form der Zustandsgleichungen enthält im Vergleich zu der Berechnung in Abschnitt 1 mehr Informationen, nämlich den Ankerstrom als Zustandsgröße $x_1(k)$. Im gezeigten Verlauf wurde die Eingangsgröße $u(k)$ (die Ankerspannung) zu Beginn der Berechnung von Null auf den Nennwert geschaltet. Nach 60 Stützstellen wurde die Spannung dann wieder abgeschaltet.

Der Ankerstrom zeigt jeweils ein Schaltverhalten, das im wesentlichen durch die Trägheit des Rotors bestimmt ist. Nach dem Einschalten steigt der Ankerstrom auf mehr als das Doppelte des Nennstroms an, während der Motor hochläuft. Die Leerlaufdrehzahl stabilisiert sich nach dem Einschalten auf einen Wert oberhalb der Nenndrehzahl. Bei konstantem Drehimpuls ist der Ankerstrom dann gleich Null. Unmittelbar nach dem Abschalten der Spannung arbeitet der Motor als Generator, bis der Drehimpuls durch die ohmschen Verluste im Ankerkreis abgebaut ist.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -(R/L) * x_1(t) - (1/k) * x_2(t) + (1/L) * u(t) & a_{11} &= -R/L & a_{12} &= -1/kL & b_1 &= 1/L \\ \dot{x}_2(t) &= (kM/J) * x_1(t) & a_{21} &= kM/J & a_{22} &= 0 & b_2 &= 0 \end{aligned}$$

Zeitdiskret:

$\dot{x}_1(t) \rightarrow$	$(x_1(k) - x_1(k-1)) / \Delta t$	$a_{11} =$	-3000 1/s
$\dot{x}_2(t) \rightarrow$	$(x_2(k) - x_2(k-1)) / \Delta t$	$a_{12} =$	-47,74 A
		$a_{21} =$	795,7 1/As ²
		$a_{22} =$	0
		$b_1 =$	1000 A/Vs
		$b_2 =$	0

R=	3,00 V/A
L=	0,0010 Vs/A
kM=	0,048 Vs
k=	20,95 1/Vs
J=	6,00E-05 kg m ²
2π=	6,284

Modell	Zeitintervall Δt	0,01 s	2 Messpunkte pro Umdrehung bei f_N
--------	--------------------------	--------	--------------------------------------

Index k	$u(k)$ [V]	$x_1(k)$ [A]	$x_2(k)$ [Hz]	$f(k)=x_2(k)/2\pi$	$u(k)/u_N$	$x_1(k)/I_N$	$x_2(k)/f_N$
-1	0	0	0		0	Vorgabe: Stillstand	
0	24	6,90	54,88	8,73	1	2,30	0,17
1	24	6,34	105,34	16,76	1	2,11	0,34
2	24	5,63	150,17	23,90	1	1,88	0,48
3	24	5,00	189,94	30,23	1	1,67	0,60
4	24	4,43	225,22	35,84	1	1,48	0,72

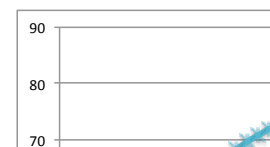


Bild 3.4 Ansatz zur Simulation des Zustandsmodells mit Tabellenkalkulation

Trotz ihrer abstrakten mathematischen Form geben die Zustandsgleichungen somit den physikalischen Zustand der Regelstrecke wieder. Dass diese mathematische Form auf jedes System anwendbar ist, rechtfertigt den etwas höheren Aufwand gegenüber einer anwendungsspezifischen Modellierung.

Lösung der Zustandsgleichung im eindimensionalen Fall

Die Zustandsgleichungen lassen sich analytisch lösen. Die Lösung des Differenzialgleichungssystems 1. Ordnung folgt hierbei der Lösung einer Differenzialgleichung 1. Ordnung, erweitert um einige Vektoroperationen. Daher sei an dieser Stelle vorab die Lösung der einfachen Differenzialgleichung rekapituliert. In diesem Fall reduziert sich die Zustandsdifferenzialgleichung auf die Form:

$$\dot{x}(t) = a x(t) + b u(t) \quad (3.10)$$

Die Lösung der Differenzialgleichung lässt sich wie folgt beschreiben:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = e^{a(t-t_0)} x(t_0) + \int e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau \quad \text{mit } \tau = t_0 \text{ bis } t \quad (3.11)$$

Die Lösung $x(t)$ setzt sich zusammen aus der Lösung $x_h(t)$ der homogenen Zustandsdifferenzialgleichung (ohne externe Anregung $u(t)$), sowie der partikulären Lösung $x_p(t)$ mit der äußeren Einwirkung $u(t)$. Der homogene Anteil $x_h(t)$ beschreibt hierbei den Übergang aus dem initialen Zustand $x(t_0)$ in den Zustand $x_h(t)$. Dieser Anteil beschreibt die Eigenbewegung des Systems aus dem initialen Zustand $x(t_0)$ unabhängig von äußeren Einflüssen. Der partikuläre Anteil $x_p(t)$ beschreibt die Reaktion des Systems unter dem Einfluss der äußeren Anregung $u(t)$. Beide Anteile überlagern sich.

Das Ausgangssignal $y(t)$ erhält man mit Hilfe des Ausgangsfaktors c aus dem Zustand $x(t)$:

$$y(t) = c x(t) \quad (3.12)$$

Übung 3.3: Erkunden Sie die Korrektheit der Lösung (3.11) der Differenzialgleichung (3.10) durch eigene Überlegung bzw. durch Recherche in Ihrer Literatur (Manuskripte, Formelsammlung etc).

Lösung: Ausgangspunkt: Differenzialgleichung 1. Ordnung nach Gleichung (3.10). Der Lösungsweg folgt einer zielstrebigem Beweisführung. Erster Schritt: Multiplikation mit e^{-at} ergibt:

$e^{-at} \dot{x}(t) = e^{-at} a x(t) + e^{-at} b u(t)$	$e^{-at} a x(t)$
$e^{-at} \dot{x}(t) - a e^{-at} x(t) = e^{-at} b u(t)$	linke Seite = $d/dt (e^{-at} x(t))$
$d/dt (e^{-at} x(t)) = e^{-at} b u(t)$	Integration $\tau = t_0$ bis t
$\int d/d\tau (e^{-a\tau} x(\tau)) d\tau = \int e^{-a\tau} b u(\tau) d\tau$	linke Seite berechnen
$e^{-at} x(t) - e^{-at_0} x(t_0) = \int e^{-a\tau} b u(\tau) d\tau$	e^{at}
$x(t) - e^{a(t-t_0)} x(t_0) = \int e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau$	hieraus folgt (3.11)

Lösung der Zustandsgleichungen

Dieses Lösungsschema lässt sich auch auf das Differenzialgleichungssystem erster Ordnung übertragen. Hierbei ist sind nun $\dot{x}(t)$ und $x(t)$ als Vektoren zu verstehen, die mit Hilfe einer Multiplikation mit der Systemmatrix A und der Multiplikation des skalaren Eingangssignals $u(t)$ mit dem Eingangsvektor b auseinander hervorgehen. Statt (3.10) erhält man:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + b u(t). \quad (3.13)$$

Die Lösung des Differenzialgleichungssystems hat wiederum die Form:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int e^{A(t-\tau)} b u(\tau) d\tau \quad \text{mit } \tau = t_0 \text{ bis } t \quad (3.14)$$

Der exponentielle Ausdruck e^{At} hierbei als Matrix zu interpretieren. Die Interpretation der Lösung (3.11) mit den Zustandsvektoren $x_h(t)$ und $x_p(t)$ bleibt erhalten. Der erste Ausdruck beschreibt die Transition vom initialen Zustand $x(t_0)$ in den Zustand $x_h(t)$ für das System ohne Einfluss von Außen. Der zweite Ausdruck beschreibt das System unter dem Einfluss des Eingangssignals $u(t)$. Beide Anteile sind einander überlagert.

Transitionsmatrix

Die Matrix $\Phi(t) = e^{At}$ wird als Transitionsmatrix bezeichnet. Wie man in Gleichung (3.14) erkennt, bestimmt sie die Lösung der homogenen und der partikulären Zustandsgleichung. Der homogene Anteil lässt sich mit Hilfe der Transitionsmatrix wie folgt beschreiben:

$$x_h(t) = \Phi(t - t_0) x(t_0) \quad (3.15)$$

Die Gleichung beschreibt den Übergang vom initialen Zustand $x(t_0)$ zum Zeitpunkt t_0 in den Zustand $x_h(t)$ zum Zeitpunkt t . Umgekehrt lässt sich mit Hilfe der Transitionsmatrix vom Zustand $x_h(t)$ aus auf den initialen Zustand $x(t_0)$ schliessen:

$$x(t_0) = \Phi^{-1}(t - t_0) x_h(t) = \Phi(t_0 - t) x_h(t) \quad (3.16)$$

Für den Fall des Startzeitpunkts $t_0 = 0$ gilt also:

$$x(0) = \Phi(-t) x_h(t) \quad (3.17)$$

Im Fall $t_0 = 0$ ergeben sich für die Transitionsmatrix folgende Werte:

$$\text{Anfangswert: } \Phi(0) = E \text{ (Einheitsmatrix, sofern } A \text{ in Diagonalform vorliegt)} \quad (3.18)$$

$$\text{Endwert: } \Phi(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \text{ (Nullmatrix)} \quad (3.19)$$

Der homogene Teil der Lösung der Zustandsdifferenzialgleichung strebt also mit der Zeit einen Ruhepunkt an, wobei sich der Zustandsvektor nach einer initialen Auslenkung $x(t=0)$ auf den Wert $x(t \rightarrow \infty) = 0$ hin entwickelt.

Die partikuläre Lösung der Zustandsdifferenzialgleichung lässt sich mit Hilfe der Transitionsmatrix wie folgt beschreiben:

$$x_p(t) = \int \Phi(t-\tau) b u(\tau) d\tau \quad \text{mit } \tau = t_0 \text{ bis } t \quad (3.20)$$

Insgesamt lautet die Schreibweise der Lösung des Differenzialgleichungssystems nach Gleichung (3.14) für den Startzeitpunkt $t_0 = 0$ mit Hilfe der Transitionsmatrix also:

$$x(t) = \Phi(t) x(0) + \int \Phi(t-\tau) b u(\tau) d\tau \quad \text{mit } \tau = 0 \text{ bis } t \quad (3.21)$$

Übung 3.4: Begründen Sie die Beziehungen in Gleichung 3.18 und 3.19.

Übung 3.5: Skizzieren Sie die analytische Lösung der Zustandsgleichungen für den Gleichstrommotor. Erstellen Sie hierzu die Zustandsgleichungen in vektorieller Schreibweise. Erläutern Sie das Systemverhalten für den homogenen und inhomogenen Teil der Differenzialgleichung mit Hilfe der Transitionsmatrix. Wählen Sie $t_0=0$ und geben Sie $x(t=0)$ vor. Wie verhält sich das System, wenn Sie es aus dem Ruhezustand heraus anschalten? Wie verhält sich das System, wenn Sie es aus dem Leerlauf bei Nenndrehzahl abschalten? Welcher Teil der Differenzialgleichung ist jeweils relevant?

Zustandsgleichungen im Bildbereich

Im letzten Abschnitt wurden die Lösungen der Zustandsgleichungen im Zeitbereich berechnet. Wegen der Umwandlung der Differenzialgleichungen des Systems (Regelstrecke) in ein Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung ist diese Lösung mit vertretbarem Aufwand und ohne Hilfestellung durch Transformation in den Bildbereich (Laplace-Transformation) möglich. Um den Zusammenhang mit Operationen an der Übertragungsfunktion (d.h. Operationen im Bildbereich) zu zeigen, erfolgt an dieser Stelle eine Berechnung der Zustandsgleichungen im Bildbereich.

Ausgangspunkt der Berechnung sind die Zustandsgleichungen nach (3.8) und (3.09), die hier der besseren Lesbarkeit halber nochmals aufgeführt sind.

$$\dot{x}(t) = A x(t) + b u(t) \quad (3.22)$$

$$y(t) = c^T x(t) \quad (3.23)$$

Mit $X(s)$ sei die Abbildung des Zustandsvektors $x(t)$ im Bildbereich bezeichnet, die man durch die Laplace Transformation der Komponenten des Vektors erhält: $X(s) = L\{x(t)\}$. Nach den bekannten Regeln ergibt die Transformation der zeitlichen Ableitung $\dot{x}(t)$ somit $L\{\dot{x}(t)\} = s X(s) - x(t_0)$. Somit erhält man für die Zustandsgleichungen im Bildbereich:

$$s X(s) - x(t_0) = A X(s) + b U(s) \quad (3.24)$$

$$Y(s) = c^T X(s) \quad (3.25)$$

Die Übertragungsfunktion $G(s)$ lässt sich als Verhältnis des transformierten Ausgangssignals $Y(s)$ zum transformierten Eingangssignal $U(s)$ beschreiben. Als initialer Zustand des Systems wird hierbei $x(t_0)=0$ angenommen. In Gleichung (3.24) wird zunächst nach $X(s)$ aufgelöst.

$$X(s) = (s E - A)^{-1} b U(s) \quad (3.26)$$

Durch Einsetzen von (3.26) in (3.25) erhält man:

$$Y(s) = c^T (s E - A)^{-1} b U(s) \quad (3.27)$$

Somit erhält man für die Übertragungsfunktion:

$$G(s) = c^T (s E - A)^{-1} b \quad (3.28)$$

Wie zu erwarten, ist die Übertragungsfunktion durch die Systemeigenschaften beschrieben, die sich in der Systemmatrix A , dem Eingangsvektor b und dem Ausgangsvektor c^T finden. Für eine Berechnung der inversen Matrix $(s E - A)^{-1}$ ist ein Blick in eine mathematische Formelsammlung nützlich. Für eine Matrix M gilt: $M^{-1} = \text{adj}(M) / \det(M)$, wobei $\text{adj}(M)$ die adjungierte Matrix von M ist, und $\det(M)$ die Determinante der Matrix. Die inverse Matrix ist so definiert, dass das Produkt $M M^{-1}$ die Einheitsmatrix ergibt, also $M M^{-1} = E$.

Ein Vergleich von Gleichung (3.26) mit der Lösung der Zustandsgleichung im Zeitbereich $x(t)$ in Gleichung (3.14) für $x(t_0)=0$ zeigt übrigens, dass der Ausdruck $(s E - A)^{-1}$ die Transformation der Transformationsmatrix $\Phi(t)$ in den Bildbereich darstellt.

$$\Phi(s) = (s E - A)^{-1} \quad (3.29)$$

Aus den Zustandsgleichungen kann man gemäß Gleichung (3.28) also für Operationen im Bildbereich auf die Übertragungsfunktion $G(s)$ schließen. Um den Aufwand hierfür im Rahmen zu halten, gibt es Normalformen der Zustandsgleichungen. Aus der sogenannte Regelungsnormalform der Zustandsgleichungen kann man unmittelbar auf die Koeffizienten des Zähler- und Nennerpolynome der Übertragungsfunktion schließen.

Lösung der Zustandsgleichungen für den Gleichstrommotor

Die Beziehungen im Bildbereich lassen sich zur Berechnung der Transitionsmatrix verwenden. Aus dem Abbild der Transitionsmatrix $\Phi(s)$ gemäß Gleichung (3.29) erhält man durch Rücktransformation in den Zeitbereich die Transitionsmatrix $\Phi(t)$. Diese lässt sich dann in die Lösung des Differenzialgleichungssystems gemäß Gleichung (3.21) einsetzen. Das Vorgehen wird am Beispiel des Gleichstrommotors erläutert.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \Phi(s) = \left[\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} \right]^{-1}$$

Aus der Systemmatrix A (siehe Gleichungen (3.6) und (3.7)) erhält man gemäß Gleichung (3.29) das Abbild der Transitionsmatrix. Diese Form muss nun noch invertiert werden. Die inverse Matrix M^{-1} zu einer Matrix M ergibt sich für ein System 2. Ordnung wie folgt.

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{bmatrix}$$

Hierbei bezeichnet $\det(M) = m_{11} m_{22} - m_{12} m_{21}$ die Determinante der Matrix M . Die Matrix daneben ist die zu M adjungierte Matrix. Mit Hilfe dieser Vorschrift lässt sich $\Phi(s)$ berechnen. Die Transitionsmatrix ergibt sich dann aus $\Phi(s)$ durch Rücktransformation der Komponenten $\varphi_{ij}(s)$.

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(s) & \varphi_{12}(s) \\ \varphi_{21}(s) & \varphi_{22}(s) \end{bmatrix} \Rightarrow \Phi(t) = L^{-1}\{\Phi(s)\} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) \end{bmatrix}$$

Die Matrix $\Phi(t)$ lässt sich nun in die Lösung der Zustandsgleichungen gemäß Gleichung (3.21) einsetzen. Hierbei beschreibt dann $x_h(t) = \Phi(t) x(0)$ den homogenen Teil der Lösung, abhängig von den Initialwerten des Ankerstromes $x_1(0)$ und der Kreisfrequenz $x_2(0)$.

$$x(t) = \Phi(t) x(0) + \int \Phi(t-\tau) b u(\tau) d\tau \quad \text{mit } \tau = 0 \text{ bis } t \quad (3.30)$$

Der partikuläre Lösung $x_p(t) = \int \Phi(t-\tau) b u(\tau) d\tau$ beschreibt die erzwungene Reaktion des Systems auf die Eingangsgröße $u(t)$, die Ankerspannung. Im speziellen Fall ist der Eingangsvektor $b = (1,0)$ als Spaltenvektor. Hierdurch spielen für die partikuläre Lösung nur die Komponenten $\varphi_{11}(t)$ und $\varphi_{21}(t)$ eine Rolle. Für ein System 2. Ordnung ist der Aufwand für eine solche analytische Berechnung noch überschaubar. In der Praxis wird man Systeme numerisch mit Hilfe eines mathematischen Werkzeugs wie MATLAB auslegen.

Übung 3.6: Skizzieren Sie die Lösung der Zustandsgleichungen in Gleichung (3.30) in vektorieller Schreibweise für die Komponenten $x_1(t)$ und $x_2(t)$. Beschreiben Sie das Verhalten der homogenen und der partikulären Lösung je nach Vorgabe der Startwerte und der Eingangsgröße.

Berechnung der Übertragungsfunktion aus den Zustandsgleichungen

Die Übertragungsfunktion ergibt sich ebenfalls mit Hilfe des Abbilds der Transformationsmatrix $\Phi(s)$. In Gleichung (3.28) findet sich hierzu folgender Zusammenhang.

$$G(s) = c^T (s E - A)^{-1} b = c^T \Phi(s) b \quad (3.31)$$

Das Abbild Transformationsmatrix $\Phi(s)$ enthält hierbei die Systemmatrix A , und wird mit dem Ausgangsvektor c^T und Eingangsvektor b verrechnet. Für den Gleichstrommotor erhält man mit den Zeilenvektor $c^T = (0, 1)$ und dem Spaltenvektor $b = (1, 0)$.

$$G(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{11}(s) & \varphi_{12}(s) \\ \varphi_{21}(s) & \varphi_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{11}(s) \\ \varphi_{21}(s) \end{pmatrix} = b_1 \varphi_{21}(s)$$

Übung 3.7: Berechnen Sie die Komponente $\varphi_{21}(s)$ des Abbilds der Transitionsmatrix. Berechnen Sie hieraus die Übertragungsfunktion. Wo liegen die Polstellen der Übertragungsfunktion? Hinweis: verwenden Sie bitte die Motorkenngrößen aus Übung 3.2.

Übung 3.8: Vergleichen Sie die Übertragungsfunktion aus Übung 3.7 mit der Berechnung gemäß Gleichung (1.15). Wie kommt der Unterschied zustande?

3.2. Normalformen der Zustandsgleichungen

Die Beschreibung eines Systems durch seine Übertragungsfunktion und die Beschreibung durch Zustandsgleichungen können ineinander überführt werden. Hierzu sind normierte Schreibweisen gebräuchlich. Die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems sei in folgender normierter Schreibweise mit den Zählerkoeffizienten b_i und Nennerkoeffizienten a_j gegeben.

$$G(s) = Y(s)/U(s) = (b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m) / (a_0 + a_1 s + \dots + s^n) \quad \text{wobei } m \leq n \quad (3.31)$$

Hierbei sei vorausgesetzt, dass der Grad m des Zählers kleiner als der Grad n des Nenners ist. Die Gleichung ist so normiert, dass der letzte Koeffizient $a_n=1$ ist. Aus der gegebenen Form gemäß Gleichung (3.31) lassen sich die Nullstellen des Zählers und Nenners ermitteln. Letztere stellen die Polstellen der Übertragungsfunktion dar. Zur Transformation in den Zeitbereich lässt sich die Form (3.31) in Partialbrüche zerlegen. Die Beiträge der Partialbrüche lassen sich dann mit Hilfe einer Korrespondenztabelle in den Zeitbereich transformieren.

Regelungsnormalform

Die Regelungsnormalform der Zustandsgleichungen liegt vor, wenn die Systemmatrix, der Eingangsvektor, der Ausgangsvektor und der Durchgangsfaktor folgende Form haben:

$$\dot{x}(t) = A_R x(t) + b_R u(t) \quad (3.32)$$

$$y(t) = c_R^T x(t) + d_R u(t) \quad (3.33)$$

$$A_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & \dots \end{pmatrix} \quad b_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_R^T = [c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_{n-2} \quad c_{n-1}] \quad d_R = b_m$$

Die Nennerkoeffizienten a_j der Übertragungsfunktion finden sich nun unmittelbar in der letzten Zeile der Systemmatrix. Für die Zählerkoeffizienten b_i gilt folgende Beziehung.

$$c_i = b_i - a_i b_n \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.34)$$

Während der Zustandsvektor bisher physikalische Größen repräsentierte, ist die Darstellung in der Regelungsnormform nun abstrakt. Die Zustandsbeschreibung in Bezug auf die Übertragungsfunktion und das Zeitverhalten ist jedoch gleich. Bezogen auf die Systemmatrix lassen sich die unterschiedlichen Darstellungen im Sinne anderer Koordinatensysteme betrachten.

In der Regelungsnormform ist der Eingangsvektor b_R Null bis auf die letzte Komponente. Die Eingangsgröße wirkt somit nur auf die letzte Koordinate des Zustandsvektors $x_{nR}(t)$. Das Ausgangssignal $y(t)$ wird aus dem Skalarprodukt $c_R^T x(t)$ gebildet und ist abhängig vom Grad m des Zählerpolynoms. Ist das Zählerpolynom der Übertragungsfunktion von Grad Null, so gilt hier einfach $y(t) = b_0 x_{1R}(t)$. Der Durchgangsfaktor d_R ist in der Praxis ein seltener Gast und in Gleichung (3.33) nur der Vollständigkeit halber erwähnt.

Übung 3.9: Erstellen Sie die Regelungsnormform der Zustandsgleichungen zur Übertragungsfunktion aus Übung 3.7. Zeichnen Sie einen Signalflussplan der Zustandsgleichungen. Hinweis: Beginnen Sie mit der letzten Zeile. Was ist charakteristisch für die Regelungsnormform?

Beobachternormform

Die Beobachternormform verwendet eine andere Sicht der Zustandsgleichungen.

$$\dot{x}(t) = A_B x(t) + b_B u(t) \quad (3.35)$$

$$y(t) = c_B^T x(t) + d_B u(t) \quad (3.36)$$

$$A_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad b_B = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$c_B^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \quad d_B = b_m$$

Hier finden sich nun die Nennerkoeffizienten a_i der Übertragungsfunktion nach Gleichung (3.31) in der letzten Spalte der Systemmatrix. Die Koeffizienten des Zählers finden sich wieder in Gleichung (3.34), wie bei der Regelungsnormform. Jedoch finden sich die Koeffizienten c_i nun als Koordinaten des Eingangsvektors b_B (und nicht wie bei der Regelungsnormform im Ausgangsvektor c_R^T).

Übung 3.10: Erstellen Sie die Beobachternormform der Zustandsgleichungen zur Übertragungsfunktion aus Übung 3.7. Zeichnen Sie einen Signalflussplan. Was ist charakteristisch für die Beobachternormform? Welche Unterschiede bestehen zur Regelungsnormform?

Diagonalform

In der Diagonalform präsentieren sich die Zustandsgleichungen auf folgende Weise.

$$\dot{x}(t) = A_D x(t) + b_D u(t) \quad (3.37)$$

$$y(t) = c_D^T x(t) + d_D u(t) \quad (3.38)$$

$$A_D = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & 0 \\ & & & & 0 & p_n \end{pmatrix} \quad b_D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_D^T = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \dots \quad c_{n-1} \quad c_n] \quad d_D = d$$

In dieser Form ist die Systemmatrix eine Diagonalmatrix. Die Diagonale enthält unmittelbar die Polstellen p_1 bis p_n der Übertragungsfunktion. Der Ausgangsvektor c_D^T enthält unmittelbar die Koeffizienten der Übertragungsfunktion in der Partialbruchdarstellung:

$$G(s) = Z(s) / (s-p_1)(s-p_2) \dots (s-p_n) = c_1/(s-p_1) + c_2/(s-p_2) + \dots + c_n/(s-p_n) \quad (3.39)$$

In dieser Form lassen sich die Zustandsgleichungen unmittelbar in die Lösung im Zeitbereich übertragen. Die Pole können hierbei einfach, mehrfach, bzw. konjugiert komplex sein.

Übung 3.11: Erstellen Sie die Diagonalform der Zustandsgleichungen zur Übertragungsfunktion aus Übung 3.7. Zeichnen Sie einen Signalfussplan. Berechnen Sie aus der Systemmatrix, dem Eingangsvektor und dem Ausgangsvektor die Lösung der Zustandsgleichungen.

Übung 3.12: Berechnen Sie die Lösung der Zustandsgleichungen mit Hilfe der Transitionsmatrix $\Phi(t)$. Verwenden Sie die Beziehung (3.29) zur Berechnung des Abbilds $\Phi(s)$ aus der Systemmatrix A.

3.3. Zustandsregelung

Bei der Regelung wird üblicherweise die Ausgangsgröße $y(t)$ gemessen und das Messsignal auf den Eingang der Regelschleife zurückgeführt. Dort erfolgt Differenzbildung mit der Führungsgröße. Der Regler verwendet die Regelabweichung zur Führung der Regelstrecke über das Stellglied. Folgende Abbildung zeigt einen solchen Regelkreis.

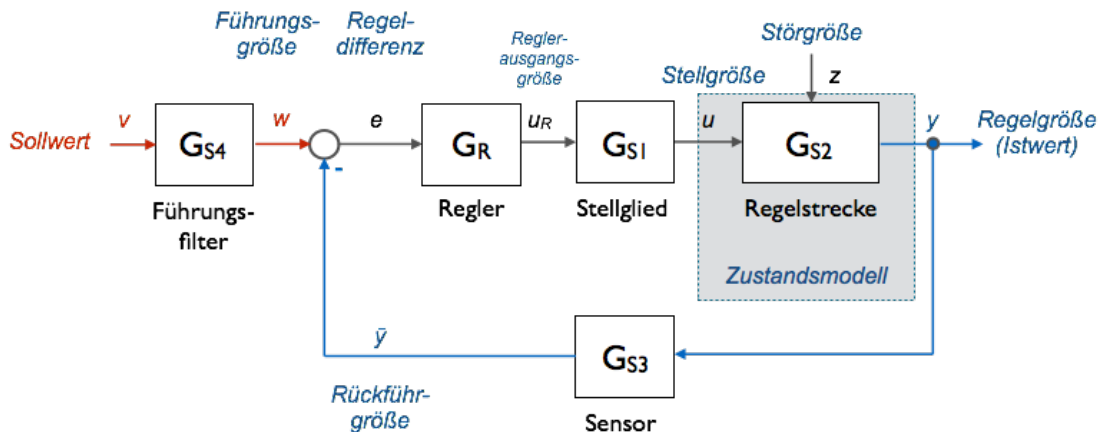


Bild 3.5 Regelkreis

Grundsätzlich wäre dieses Vorgehen auch mit einer Systembeschreibung durch Zustandsgleichungen möglich: Diese beschreiben ein Modell der Regelstrecke. Allerdings ist ein wirksamerer Eingriff in das Verhalten der Regelstrecke möglich, wenn man statt des Ausgangssignals $y(t)$ die Zustandsgrößen $x(t)$ misst. Folgende Abbildung zeigt eine solche Anordnung.

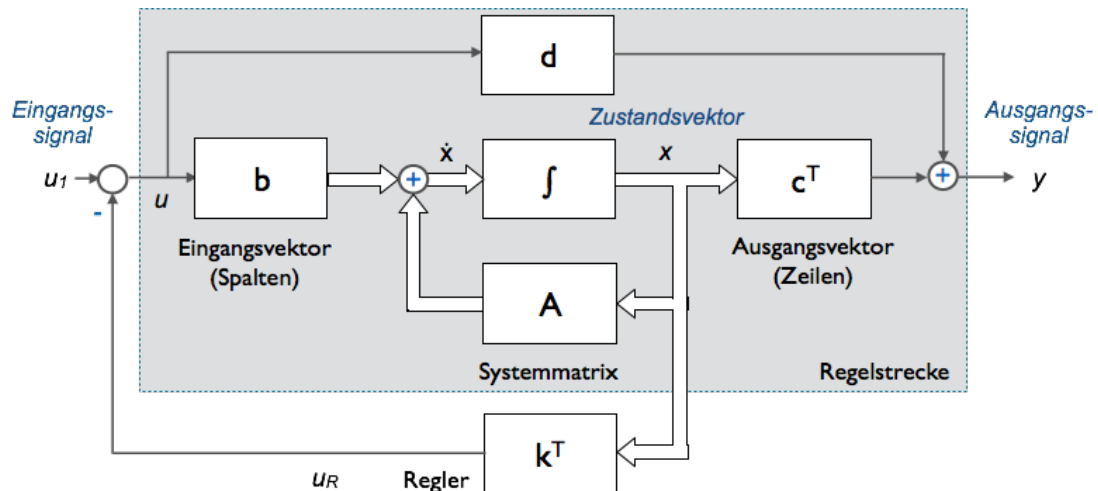


Bild 3.6 Regelkreis im Zustandsmodell

In dieser Darstellung ist das Stellglied in den Regler integriert, als Eingangssignal wird die Stellgröße $u(t)$ verwendet. Der wesentliche Unterschied ist also die Messung der Zustandsgrößen für den Reglereingang, anstelle des Ausgangssignals der Regelstrecke. Der Regler bildet selbst mit Hilfe des Zeilenvektors k^T eine gewichtete Summe der Systemzustände, die vom Eingangssignal $u_1(t)$ subtrahiert wird. Am Reglerausgang erhält man das Skalarprodukt

$$u_R(t) = \sum k_i^T x_i(t) \quad (3.40)$$

Wählt man den Zeilenvektor $k^T = k c^T$, so erhält man am Ausgang des Reglers das mit dem skalaren Faktor k gewichtete Ausgangssignal $y(t)$ des Reglers. In diesem Fall entspricht der Zustandsregler einem einfachen Proportionalregler mit der Gewichtung k . Der Vorteil der Zustandsregelung liegt darin, dass alle Zustandsgrößen zur Rückführung auf den Eingang verwendet werden können.

Übung 3.13: Konzipieren Sie einen Zustandsregler für den Gleichstrommotor aus Übung 3.7. Simulieren sie das Verhalten des Gesamtsystem bei geeigneter Wahl der Gewichtungen k^T .

Übung 3.14: Welchen Einfluss hat die Wahl der Gewichtungsfaktoren k^T aus Übung 3.13 auf die Lage der Polstellen der Übertragungsfunktion? Vergleichen Sie ihre Wirksamkeit mit der Regelung auf Basis der gemessenen Ausgangsgröße $y(t)$. Können Sie die Gewichtungsfaktoren so wählen, dass Grenzen der Zustandsgrößen $x(t)$, wie beispielsweise der Ankerstrom, durch den Regler nicht überschritten werden?

Zustandsregler für den Gleichstrommotor

Die Regelung durch Rückführung der Zustände lässt sich als einfache Erweiterung des Modells der Regelstrecke realisieren. Folgende Abbildung zeigt ein Muster für eine Simulation mit Hilfe eines Programms zur Tabellenkalkulation auf Basis des Zustandsmodells des Gleichstrommotors aus Übung 3.2. Der Regler ist in diesem Fall durch die beiden Konstanten k_1 und k_2 definiert.

Mit Hilfe von k_2 lässt sich die Kreisfrequenz $x_2(t)$ auf die Stellgröße zurückführen. Diese Regelung entspricht dem Proportionalregler aus Kapitel 1. Mit Hilfe von k_1 kann man den Ankerstrom $x_1(t)$ auf die Stellgröße $u(t)$ zurückführen. Stellt man beide Konstanten auf Null ein, erhält man das Verhalten der unregelmäßigten Strecke.

$$\dot{x}_1(t) = -(R/L) * x_1(t) - (1/k) * x_2(t) + (1/L) * u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = (kM/J) * x_1(t)$$

$$a_{11} = -R/L \quad a_{12} = -1/kL \quad b_1 = 1/L$$

$$a_{21} = kM/J \quad a_{22} = 0 \quad b_2 = 0$$

Zeitdiskret:

$$x_1(k) \rightarrow (x_1(k) - x_1(k-1)) / \Delta t$$

$$x_2(k) \rightarrow (x_2(k) - x_2(k-1)) / \Delta t$$

a11=	-3000 1/s
a12=	-47,74 A
a21=	795,7 1/As2
a22=	0
b1=	1000 A/Vs
b2=	0

R=	3,00 V/A
L=	0,0010 Vs/A
kM=	0,048 Vs
k=	20,95 1/Vs
J=	6,00E-05 kg m2
2π=	6,284
Regler	
k1=	-1,3 V/A
k2=	0,03 Vs

Modell	Zeitintervall Δt	0,01 s	2 Messpunkte pro Umdrehung bei fN
--------	------------------	--------	-----------------------------------

Index k	u(k) [V]	u(k) - uR(k) [V]	x1(k) [A]	x2(k) [Hz]	f(k)=x2(k)/2π	u(k)/uN	x1(k)/IN	x2(k)/fN	uR(k)	k1*x1(k-1)	k2*x2(k-1)
-1	0	0	0	0	0	0	Vorgabe: Stillstand	0	0	0,00	0,00
0	24	24	6,90	54,88	8,73	1	2,30	0,17	0,00	0,00	0,00
1	24	31	8,45	122,08	19,43	1,305	2,82	0,39	-7,32	-8,97	1,65
2	24	31	7,57	182,29	29,01	1,305	2,52	0,58	-7,32	-10,98	3,66
3	24	28	5,87	228,99	36,44	1,182	1,96	0,73	-4,37	-9,84	5,47
4	24	25	4,14	261,95	41,68	1,032	1,38	0,83	-0,76	-7,63	6,87

Bild 3.7 Muster zur Realisierung der Regelstrecke (Tabellenkalkulation)

Geeignete Reglerkonstanten k_1 und k_2 lassen sich in der Simulation durch Probieren finden. In Anlehnung an die Drehzahlregelung aus Abschnitt 1 verbleibt zunächst $k_1 = 0$. Die Konstante k_2 führt dann die aktuelle Kreisfrequenz auf die Ankerspannung zurück. Folgende Abbildung zeigt Testläufe mit unterschiedlichen Einstellungen der Reglerkonstanten.

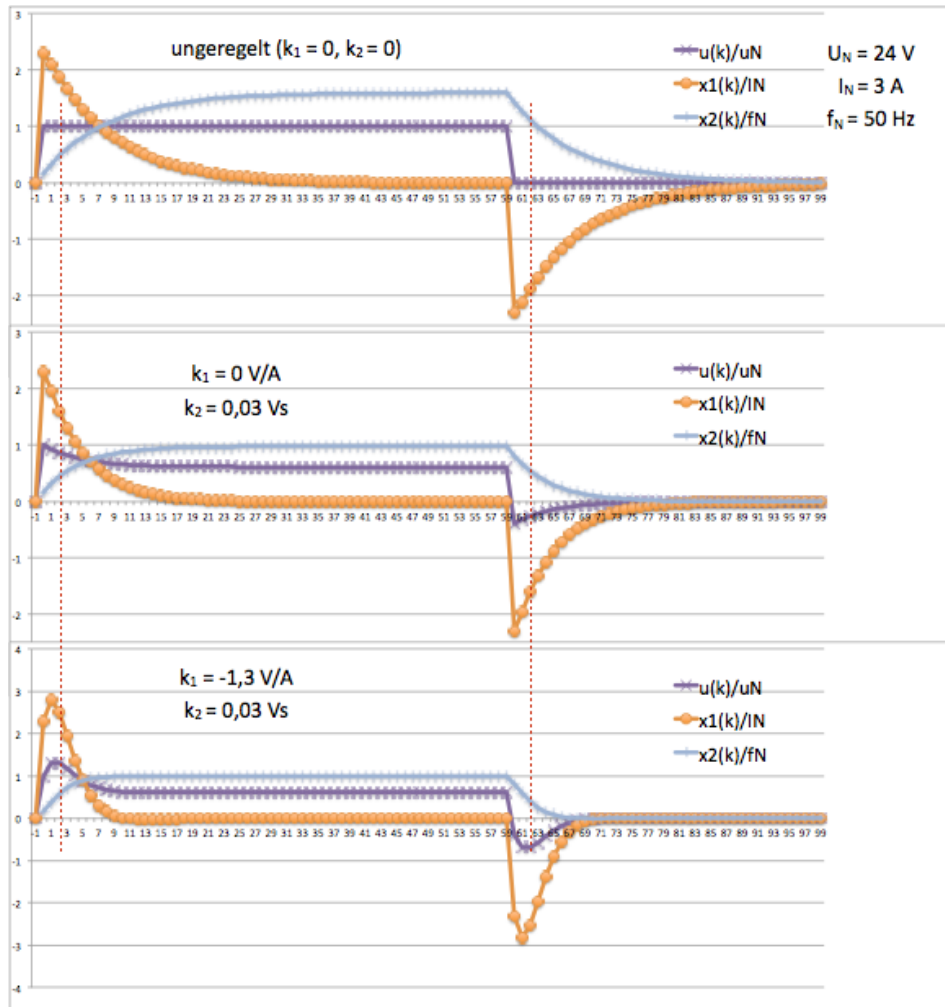


Bild 3.8 Testläufe des Zustandsreglers

Da die Drehzahl $x_2(t)$ die Nenndrehzahl x_N beim unregelmäßigem Motor (oberes Diagramm in der Abbildung) im eingeschwungenen Zustand deutlich übersteigt, wird die Konstante k_2 so gewählt, dass im eingeschwungenen Zustand der Motor auch im Leerlauf die Nenndrehzahl erreicht. Ein geeigneter Wert findet sich durch Probieren ausgehend von $k_2=0$ bei $k_2=0,03$ Vs. Das mittlere Diagramm zeigt, dass durch diese Maßnahme die Ankerspannung zunächst angehoben wird.

Hierdurch verbessert sich die Einschwingdauer gegenüber dem unregelmäßigem Zustand (wobei sich der Motor im unregelmäßigem Zustand auf eine höhere Drehzahl als gefordert einschwingt). Das Einschwingverhalten lässt sich durch Erhöhen von k_2 weiter verbessern, wobei der Motor dann allerdings seine Nenndrehzahl nicht mehr erreicht. Dieses Verhalten ist für P-Regler üblich.

Während die Drehzahl sich nach einer Weile auf einen gegebenen Wert einschwingt, sinkt der Ankerstrom im eingeschwungenen Zustand im Leerlauf auf Null. Mit Hilfe der Konstanten k_1 lässt sich daher nur das transiente Verhalten beeinflussen. Im unteren Diagramm der Abbildung wurde k_1 so gewählt, dass der Ankerstrom auf die Eingangsspannung mitkoppelt ($k_1 = -1,3$ V/A). Die Eingangsspannung folgt also dem Ankerstrom. Durch diese Anhebung der Spannung im transienten Zustand verkürzt sich die Einschwingdauer weiter.

Nach dem Abschalten der Eingangsspannung sorgt der Regler in beiden Fällen für eine umgepolte Regelspannung am Eingang, wodurch sich das Einschwingen auf den Ruhezustand verkürzt. Trotz der etwas komplexen mathematischen Form gestaltet die Einstellung des Reglers bei physikalisch plausiblen Zustandsgrößen recht intuitiv.

Einfluss auf die Übertragungsfunktion

Um den Einfluss des Reglers auf das Übertragungsverhalten abzuschätzen, werden die Zustandsgleichungen des geregelten Systems aufgestellt. Der Unterschied gegenüber dem unregelmäßigem System besteht in der Rückführung der Zustände auf die Stellgröße $u(t)$. Die Zustandsgleichungen des unregelmäßigem Systems finden sich in (3.22) und (3.23).

Für das geregelte System gilt:

$$u(t) = u_1(t) - u_R(t) = u_1(t) - k^T x(t) \quad (3.41)$$

Einsetzen in die Gleichung (3.22) ergibt die Zustandsgleichungen des geregelten Systems.

$$\dot{x}(t) = A x(t) + b u_1(t) - b k^T x(t) = (A - b k^T) x(t) + b u_1(t) \quad (3.42)$$

$$y(t) = c^T x(t) \quad (3.43)$$

Man erkennt, dass sich durch die Rückführung der Zustände die Systemmatrix ändert: Die Systemmatrix A des unregelmäßigem Systems wird in die Matrix A' des geregelten Systems überführt.

$$A' = (A - b k^T) \quad (3.44)$$

Die Übertragungsfunktion erhält man aus der Systemmatrix nach Gleichung (3.28). Für die Übertragungsfunktion des geregelten Systems $G'(s)$ erhält man mit der Systemmatrix A' also:

$$G'(s) = c^T (s E - A')^{-1} b = c^T \Phi'(s) b \quad (3.45)$$

Die Pole der Übertragungsfunktion erhält man aus der Determinanten der Transitionsmatrix $\Phi'(s)$ aus der Beziehung $\det(\Phi'(s)) = 0$. Da die Systemmatrix A durch die Rückführung gemäß Gleichung (3.44) in A' geändert wurde, verschiebt sich durch den Regler die Lage der Pole.

Sind die Zustandsgleichungen in der Regelungsnormalform gegeben, ist der Einfluss des Reglers auf die Pole unmittelbar abzulesen. Die Zustandsgleichungen haben in diesem Fall folgende Form.

$$\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}_R^T = [c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_{n-2} \quad c_{n-1}] \quad d_R = b_m$$

Die Beziehung $\mathbf{b} \mathbf{k}^T$ aus Gleichung (3.44) führt zu einer Matrix der Form:

$$\mathbf{b}_R \mathbf{k}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_{n-1} & k_n \end{pmatrix}$$

Durch Subtraktion von der Matrix \mathbf{A}_R erhält man als neue Systemmatrix \mathbf{A}'_R

$$\mathbf{A}'_R = \mathbf{A}_R - \mathbf{b}_R \mathbf{k}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -(a_0+k_1) & -(a_1+k_2) & -(a_2+k_3) & \dots & -(a_{n-2}+k_{n-1}) & -(a_{n-1}+k_n) \end{pmatrix}$$

Man erkennt, dass sich mit Hilfe der Faktoren k_i unmittelbar das Nennerpolynom des Systems beeinflussen lässt. Die Nullstellen des Nennerpolynoms repräsentieren die Pole der Übertragungsfunktion. Für die geregelte Strecke erhält man:

$$N(s) = s^n + (a_{n-1} + k_n) s^{n-1} + (a_{n-2} + k_{n-1}) s^{n-2} + \dots + (a_1 + k_2) s + (a_0 + k_1) = 0 \quad (3.46)$$

Das Nennerpolynom der unregelmäßigten Strecke erhält man hieraus für $k_i=0$. Somit lässt sich zur Bestimmung geeigneter Reglerparameter k_i folgendes Verfahren anwenden: Pole der unregelmäßigten Strecke berechnen, erwünschte Verschiebungen der Pole vorgeben, passendes Nennerpolynom hierzu berechnen, Reglerkoeffizienten hieraus durch Vergleich mit dem Polynom der unregelmäßigten Strecke ermitteln. Die Berechnung der Pole erfolgt am einfachsten numerisch aus dem Nennerpolynom mit Hilfe eines mathematischen Werkzeugs, wie z.B. MATLAB.

Beispiel: Mit Hilfe der MATLAB Befehle in Anhang E ermittelt man für die unregelmäßigte Strecke durch Eingabe der Zustandsgleichungen folgende Pole: $p_1 = -12.7$ und $p_2 = -2987.3$. Der erste Pol ist dominant, d.h. er bestimmt das Zeitverhalten der Strecke (der erste Pol hat eine wesentlich größere Zeitkonstante als der zweite Pol: $\tau = 0.0787$ und somit $\tau/\Delta t = 7.97$ Stützstellen im Simulationslauf). Als Nennerpolynom berechnet man: $N = s^2 + 3000 s + 37990$, der Zähler beträgt 795700. Das System schwingt sich somit auf den Wert $h(t \rightarrow \infty) = 20.9$ ein.

3.4. Störgrößen im Regelkreis

Bisher wurde im Modell der Regelstrecke bzw. im Zustandsregler keine Störgrößen berücksichtigt. Für den Gleichstrommotor wäre eine solche Störgröße ein wechselndes Lastmoment. Den Einfluss des Lastmoments als Störgröße entnimmt man dem elektrischen Ersatzschaltbild.

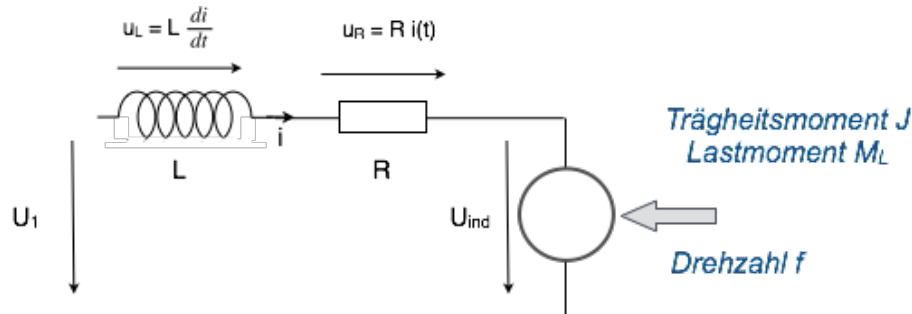


Bild 3.9 Elektrisches Ersatzschaltbild des Motors mit Lastmoment

Nach der Maschenregel folgt aus dem Ersatzschaltbild (siehe auch Kapitel 1):

$$u_1(t) = L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) + \omega(t)/k \quad (3.47)$$

Für die Drehmomente gilt die summarische Betrachtung: Das Drehmoment des Motors ist gleich der Summe aus dem Lastmoment und der Drehimpulsänderung des Rotors (Ankers):

$$M_M(t) = M_L + J \frac{d\omega(t)}{dt} \quad (3.48)$$

Der Ankerstrom ist proportional zum Drehmoment. Einsetzen von $M_M(t) = k_M i(t)$ ergibt:

$$k_M i(t) = M_L + J \frac{d\omega(t)}{dt} \quad (3.49)$$

Wenn man die beiden Zustandsvariablen $i(t) = x_1(t)$ und $\omega(t) = x_2(t)$ bezeichnet, sowie die Eingangsgröße mit $u(t)$ und die Ausgangsgröße mit $y(t)$, lassen sich die beiden Gleichungen (3.47) und (3.49) wiederum die Form der Zustandsgleichungen bringen, indem man die beiden Gleichungen nach $\dot{x}_1(t) = dx_1(t)/dt$ und $\dot{x}_2(t) = dx_2(t)/dt$ umformt.

$$\dot{x}_1(t) = -(R/L) * x_1(t) - (1/kL) * x_2(t) + (1/L) * u(t) \quad (3.50)$$

$$\dot{x}_2(t) = (k_M/J) * x_1(t) - M_L/J \quad (3.51)$$

Das Lastmoment M_L führt somit unmittelbar zu einer Drehzahländerung $\dot{x}_2(t)$. Abstrakt formuliert ist der Angriffspunkt der Störgröße die Zustandsänderung. Im Blockschaltbild wäre die Störgröße somit wie in folgender Abbildung zu berücksichtigen.

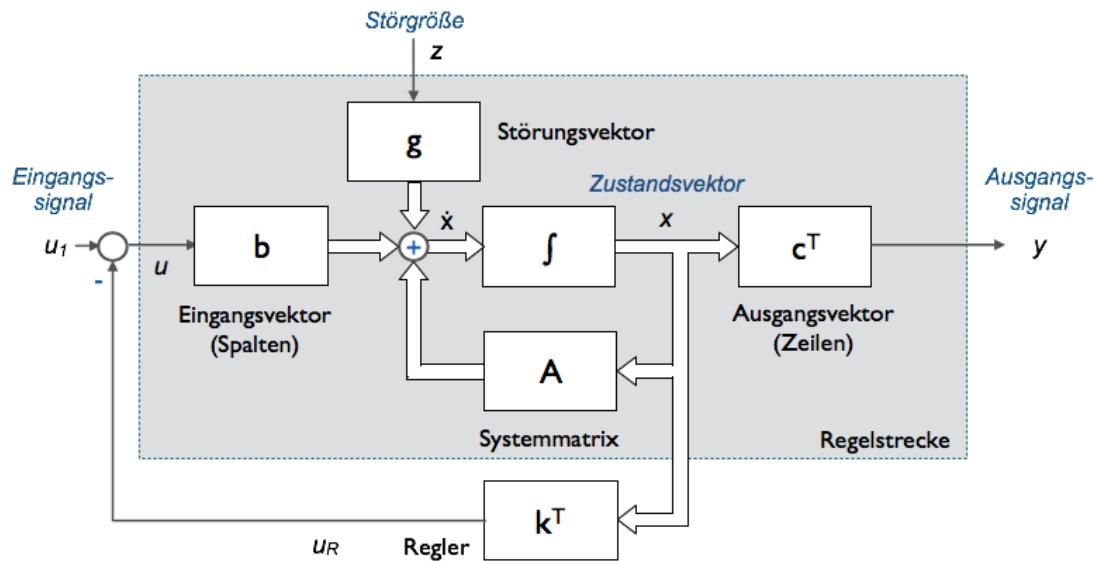


Bild 3.10 Zustandsregler mit Störgröße

Im Beispiel des Lastmoments wäre $z = M_L$ und der Spaltenvektor $g = (0, 1/J)$. Im allgemeinen ergibt sich mit den Bezeichnungen aus der Abbildung unter Berücksichtigung der Störgröße für die Zustandsgleichungen folgende Form.

$$\dot{x}(t) = A x(t) + b u(t) + g z(t) \quad (3.52)$$

$$y(t) = c^T x(t) + d u(t) \quad (3.53)$$

Die Störgrößen wirken somit auf den Zustand des Systems ein und bringen es aus dem Gleichgewicht. Vom Systemansatz wirkt eine Störgröße $z(t)$ auf die Regelstrecke genau wie die Stellgröße $u(t)$. Das geregelte System den Einfluss der Störgröße über die Regelschleife durch das Ausgangssignal des Reglers $u_R(t)$ entgegen wirken.

Übung 3.15: Ergänzen Sie das Lastmoment M_L als Störgröße in Ihrer Simulation der Regelung. Geben Sie willkürliche Lastwechsel vor. Analysieren Sie das Störverhalten Ihrer Regelung.

Führungsverhalten und Störverhalten des Zustandsreglers

Folgende Abbildung zeigt einen Testlauf des Zustandsreglers mit Lastwechsel. Das obere Diagramm in der Abbildung zeigt das Verhalten der unregulierten Strecke. Für das Führungsverhalten wurde die Eingangsgröße $u_1(t)$ gegenüber der Strecke in Abschnitt 3.3 beibehalten. Zu Beginn wird die Nennspannung eingeschaltet. Ab der 60. Stützstelle erfolgt eine Abschaltung.

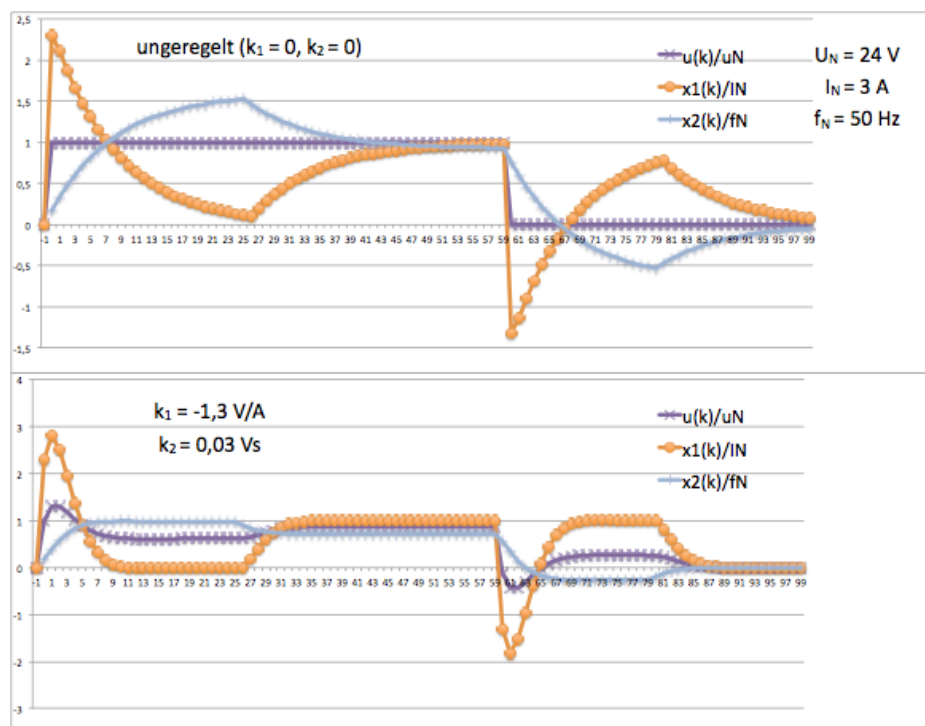


Bild 3.11 Führungsverhalten und Störverhalten

Da der Ankerstrom dem Lastmoment folgt, kann man die vorgegebenen Lastwechsel dem Motorstrom entnehmen. Zu Beginn läuft der Motor in den Leerlauf hoch: Der Ankerstrom geht mit steigender Drehzahl auf Null zurück. Ab der 26. Stützstelle erfolgt ein Lastsprung in Höhe der Nennlast des Motors: Der Motorstrom steigt auf seinen Nennwert. Die Nennlast bleibt über den Abschaltzeitpunkt hinaus bestehen, bis zur 79. Stützstelle, dann erfolgt ein Lastwechsel in den Leerlauf. Der Motor kehrt in den Ruhezustand zurück.

Dem unteren Diagramm in der Abbildung entnimmt man, dass die geregelte Strecke ein deutlich besseres Führungsverhalten sowie ein deutlich besseres Störverhalten besitzt. Die Lastwechsel werden deutlich schneller ausgeglichen. Die Reglerparameter wurden hierbei beibehalten, d.h. der Regler bleibt so eingestellt, dass er im Leerlauf die Nenndrehzahl erreicht. Bei Nennlast erreicht der geregelte Motor die Nenndrehzahl nicht mehr. Dieses Verhalten lässt sich durch Ändern des Parameters k_2 leicht ändern, allerdings auf Kosten der Regelabweichung im Leerlauf. Dieses Verhalten ist für P-Regler üblich.

Übung 3.16: Im letzten Drittel des Testlaufes treten übergangsweise negative Drehzahlen auf. Ist ein solches Verhalten plausibel und erklärbar?

Vorgelagerter I-Regler

Möchte man Regelabweichungen ausregeln, bietet sich ein zusätzlicher I-Regler an. Im einfachsten Fall lagert man diesen der Zustandsregelung vor. Die folgende Abbildung zeigt eine solche Anordnung. Als Regelstrecke des I-Reglers wird die per Zustandsrückführung geregelte Strecke verwendet, wie in Abbildung 3.10 gezeigt. Das Zeitverhalten der Regelstrecke organisiert die Zustandsregelung. Der vorgelagerte I-Regler soll verbliebene Abweichungen der Regelgröße ausregeln.

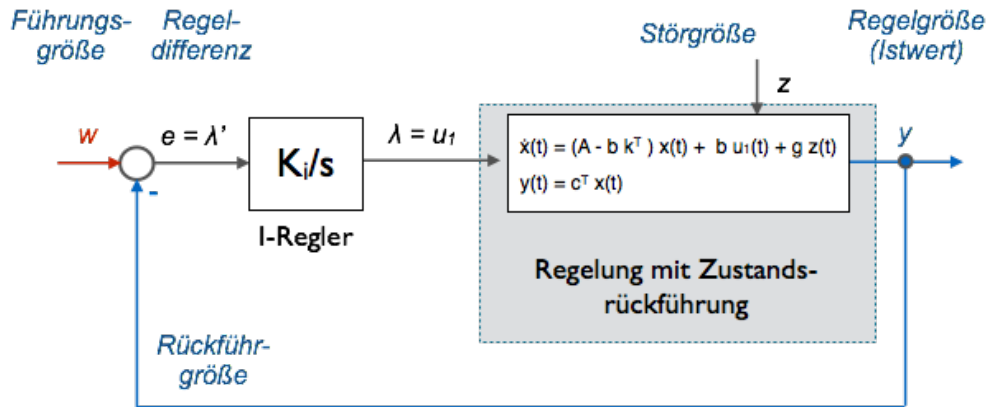


Bild 3.12 vorgelagerter I-Regler

Die Regeldifferenz $e(t)$ lässt sich als zeitliche Ableitung einer weiteren Zustandsgröße $\lambda(t)$ interpretieren, nämlich $e(t) = \lambda'(t) = d\lambda(t)/dt$. Auf diese Weise lässt sich der vorgelagerte I-Regler formal in die Zustandsgleichungen einbinden. Man erhält insgesamt:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + b u(t) + g z(t) \tag{3.54}$$

$$y(t) = c^T x(t) \tag{3.55}$$

$$u(t) = -k^T x(t) + K_i \lambda(t) \tag{3.56}$$

$$\lambda'(t) = e(t) = w(t) - y(t) = w(t) - c^T x(t) \tag{3.57}$$

Folgende Abbildung zeigt das Blockschaltbild der gesamten Anordnung. Die oben genannten Zustandsgleichungen lassen sich hieraus unmittelbar herleiten.

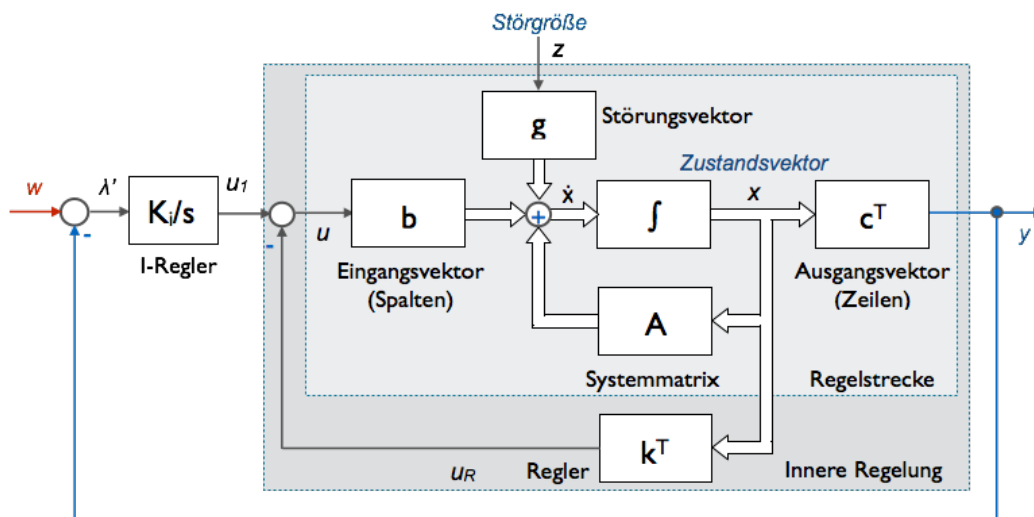


Bild 3.13 Zustandsrückführung mit I-Regler

Interpretiert man $\lambda(t)$ als weitere Zustandsgröße, so lässt sich Gleichung (3.57) als Erweiterung von Gleichung (3.54) darstellen. Man erhält eine erweiterte Systemmatrix. Die Ordnung des Systems hat sich durch $\lambda(t)$ um 1 erhöht. Die Stellgröße insgesamt ist durch Gleichung (3.56) beschrieben. Der Rückführvektor ergibt sich zu $\check{k}^T = [k^T; \lambda-K_i]$. In Matrizen und Vektoren dargestellt erhält man insgesamt:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \lambda'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A - b k^T) & K_i b \\ -c^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -c^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix}$$

Übung 3.17: Überprüfen Sie die Korrektheit der erweiterten Zustandsgleichungen oben.

I-Regler für den Gleichstrommotor

Die Realisierung des vorgelagerten I-Reglers ist leicht und erfolgt mit den Methoden aus Abschnitt 1 dieses Manuskripts. Folgende Abbildung zeigt das Verhalten des geregelten Antriebs mit zusätzlichem I-Regler. Im Vergleich zum oberen Diagramm (ohne I-Regler) zeigt das untere Diagramm, dass die Strecke nun unabhängig vom Lastzustand auf den vorgegebenen Sollwert ausgeregelt wird.

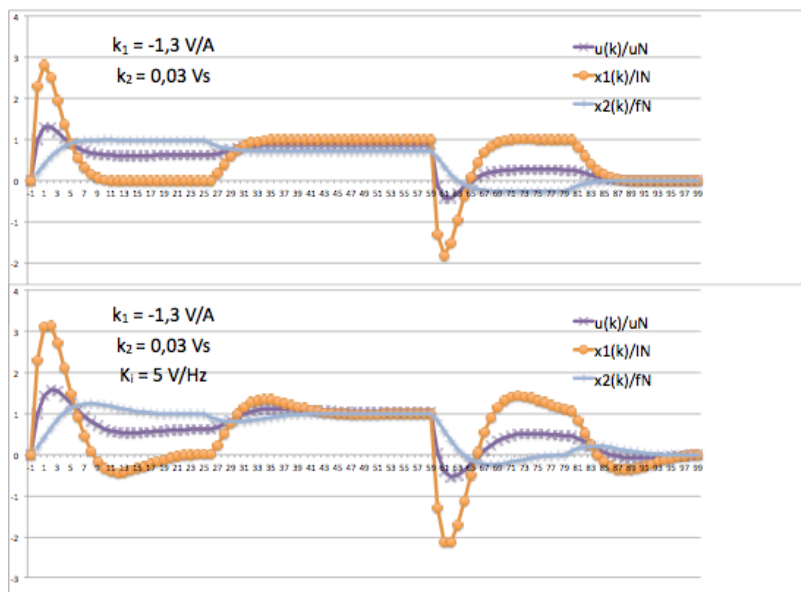


Bild 3.14 Verhalten der Strecke mit zusätzlichem I-Regler

Mit Hilfe der oben hergeleiteten erweiterten Zustandsgleichungen lässt sich das geregelte System analysieren. Mit den gewählten Reglereinstellungen finden sich aus den Eigenwerten der erweiterten Systemmatrix Pole an den Stellen: $p_1 = -42,97$, $p_{2,3} = -0,0149 \pm j 0,3847$.

Übung 3.18: Erweitern Sie Ihre Zustandsregelung im einen I-Regler. Analysieren Sie das Verhalten der Regelung und bestimmen Sie günstige Reglerparameter.

4. Schätzung der Zustände und Systemparameter

4.1. Optimale Regler

In den bisher betrachteten Fällen erfolgte die Einstellung der Reglerparameter willkürlich durch Probieren bzw. nach Einschätzung der Regelstrecke. Die Ziele der Regelung (Verbesserung des Zeitverhaltens, Ausregeln von Störungen etc) wurden nicht explizit formuliert. Ebenso wurden Randbedingungen nicht explizit formuliert. Hierzu wäre das Einhalten von Grenzen für Zustandsgrößen (z.B. Ankerstrom) bzw. Stellgrößen (z.B. Eingangsspannung) zu rechnen.

Bei formaler Vorgabe der Ziele und Randbedingungen lassen sich mit Hilfe einer Kostenfunktion zur Bewertung der Optionen in Bezug auf die Vorgabe optimale Reglereinstellung finden. Als Kostenfunktion dient hierbei z.B. die mittlere quadratische Abweichung von den Vorgaben (Methode der kleinsten Quadrate, engl. least squares). Für den zeitlichen Verlauf der Komponente $x_i(t)$ vom vorgegebenen Verlauf $x_{i0}(t)$ würde man die Abweichungen also wie folgt bewerten:

$$\int (x_i(\tau) - x_{i0})^2 d\tau = \text{minimum} \quad (4.1)$$

Im Unterschied zum I-Regler wird hier die Summe der quadratischen Abweichungen bewertet. Um die Abweichung insgesamt zu bewerten, wird eine Kostenfunktion definiert, die alle Komponenten des Vektors $x_i(t)$ individuell bewertet.

$$J(u) = \int \sum q_i (x_i(\tau) - x_{i0})^2 + r (u(\tau) - u_0)^2 d\tau = \text{minimum} \quad (4.2)$$

Die Bewertung q_i muss hierbei individuell vorgegeben werden. In Gleichung (4.2) wurde außerdem die quadratische Abweichung der Stellgröße u von der Vorgabe u_0 mit der Gewichtung r bewertet. Hierbei wurde voraus gesetzt, dass ein fester Betriebspunkt mit x_0 und u_0 eingehalten werden soll. $J(u)$ bezeichnet die Kostenfunktion bzw. Gütefunktion der gewählten Optimierung. Wählt man als Vorgabe $x_{i0}=0$, sowie $u_0=0$ so vereinfacht sich die Gleichung.

$$J(u) = \int \sum q_i x_i(\tau)^2 + r u(\tau)^2 d\tau = \text{minimum} \quad (4.3)$$

Die bewertete Summe $\sum q_i x_i(\tau)^2$ lässt sich auch als Produkt $x^T Q x$ interpretieren, wobei x^T einen Zeilenvektor mit den Komponenten x_i darstellt, und Q eine Diagonalmatrix mit den Komponenten q_i in der Hauptdiagonalen. In dieser vektoriellen Schreibweise lautet die Kostenfunktion wie folgt.

$$J(u) = \int x^T(\tau) Q x(\tau) + r u(\tau)^2 d\tau = \text{minimum} \quad (4.4)$$

Bei der gewählten Vorgabe $u_0=0$ (bzw. $u_1=0$ im Blockschaltbild der Zustandsregelung) gilt:

$$u(t) = -k^T x(t) \quad (4.5)$$

Daher lassen sich aus der Beziehung $J(u) = \text{minimum}$ in Bezug auf die Vorgabe optimale Reglerparameter k_i ableiten. Für die mathematische Herleitung der Lösung wird auf die Literatur im Literaturverzeichnis verwiesen. Die Lösung folgt aus den vorgegebenen Zustandsgleichungen (Systemmatrix A , Eingangsvektor b), sowie den Gewichtungen q_i und r . Die Lösung hat die Form

$$k_{\text{opt}}^T = f(A, b, Q, r) \quad (4.5)$$

Für die Funktion $f(A, b, Q, r)$ findet sich ein passender MATLAB Befehl in Anlage E. Voraussetzung für die Anwendbarkeit der optimalen Regelung ist jedoch die Steuerbarkeit der Regelstrecke: mit Hilfe der mit k^T gewichteten, zurückgeführten Zustandsgrößen $-k^T x(t)$ muss sich das System in den angestrebten Zustand x_0 überführen lassen, d.h. die Rückführung muss auf alle Zustandsgrößen wirken.

Steuerbarkeit

Die Steuerbarkeit definiert, ob sich alle Zustände durch die Eingangsgröße $u(t)$ beeinflussen lassen. Ein System gilt als vollständig steuerbar, wenn mit Hilfe des Eingangssignals $u(t)$ der initiale Systemzustand $x(t_0)$ innerhalb eines endlichen Zeitintervalls $t_1 - t_0$ in einen beliebigen Zustand $x(t_1)$ überführt werden kann.

Liegt die Systemmatrix des Systems in der Diagonalform vor (d.h. alle Eigenwerte bzw. Polstellen befinden sich in der Hauptdiagonalen der Systemmatrix), ist die Steuerbarkeit unmittelbar am Eingangsvektor b ablesbar.

$$\mathbf{A}_D = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}_D^T = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \dots \quad c_{n-1} \quad c_n] \quad \mathbf{d}_D = d$$

Wenn eine der Komponenten des Eingangsvektors b Null ist, kann das Eingangssignal $u(t)$ nicht auf die betreffende Zustandsvariable wirken:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + b u(t) + g z(t) \quad (4.6)$$

Der betreffende Zustand lässt sich somit nicht durch $u(t)$ beeinflussen, das System ist nicht vollständig steuerbar. Liegt die Systemmatrix nicht in Diagonalform vor, besteht eine Wechselwirkung zwischen den Zustandsgrößen: es besteht die Möglichkeit einer mittelbaren Beeinflussung. Für den allgemeinen Fall lässt sich ein Kriterium entwickeln, aus dem sich die Steuerbarkeit ermitteln lässt. Die Steuerbarkeitsmatrix Q_S wird hierzu wie folgt definiert:

$$Q_S = [b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b] \quad (4.7)$$

Die Steuerbarkeitsmatrix ist quadratisch, d.h. bei einem System 2. Ordnung bestehend aus dem Spaltenvektor b und dem Spaltenvektor $A*b$. Ein System ist steuerbar, wenn die Determinante der Steuerbarkeitsmatrix ungleich Null ist:

$$\det(Q_S) \neq 0 \quad (4.8)$$

Bei steuerbaren Systemen lassen sich mit Hilfe der Zustandsgrößenrückführung die Eigenwerte beliebig verändern.

Optimale Regelung für den Gleichstromantrieb

Für den Gleichstromantrieb würde man durch Betrachtung des physikalischen Modells davon ausgehen, dass das System durch die Eingangsgröße u nicht vollständig steuerbar ist: Die Eingangsspannung u führt zu einer Änderung der Drehzahl (Zustandsgröße x_2). Der Ankerstrom i (Zustandsgröße x_1) wird jedoch durch das Lastmoment bestimmt (sowie im transienten Zustand durch die Schwungmasse des Rotors). Durch Vorgabe der Ankerspannung wird man also den Ankerstrom nicht dauerhaft beeinflussen können.

Lässt man das Lastmoment als Störgröße weg (betrachtet das System also im Leerlauf), ist der Ankerstrom durch den ohmschen Verlust durch die Ankerspannung steuerbar. Für den Gleichstromantrieb berechnet sich die Steuerbarkeitsmatrix zu

$$Q_S = [b_1, b_1 * a_{11}; 0, b_1 * a_{21}] \quad (4.9)$$

Die Determinante ergibt sich somit zu $\det(Q_S) = b_1^2 \cdot a_{21}$. Die Determinante ist ungleich Null, da die Werte der Zustandsgleichungen $b_1 \neq 0$ und $a_{21} \neq 0$ sind. Das leerlaufende System ist somit vollständig steuerbar.

Für eine optimale Regelung werden folgende Kriterien gewählt: $r=1$ (die Steuerung soll sich mit minimalen Änderungen der Stellgröße erzielen lassen, $q_{11}=0$ (starke Änderungen und dauerhafte Abweichungen des Ankerstroms werden in Kauf genommen), $q_{22}=1$ (die Drehzahl soll sich möglichst genau auf die Vorgabe einstellen). Einsetzen dieser Vorgaben in Gleichung (4.5) ergibt folgende Reglerparameter:

$$k_{opt}^T = f(A, b, Q, r) \quad (4.10)$$

Numerische Berechnung ergibt $k_1=0,2431$ und $k_2=0,9532$. Berechnung der Eigenwerte der Systemmatrix der geregelten Strecke $A' = (A - b k^T)$ ergibt $\lambda_1=-29,752$ und $\lambda_2=-2,6785$ im Vergleich zu $\lambda_1=-29,8721$ und $\lambda_2=-0,1279$ der unregulierten Strecke. Die Lage des dominanten Pols λ_2 hat sich somit deutlich in Richtung kleinerer Zeitkonstanten verschoben.

Beim Testlauf im Simulator soll die Strecke gemäß der Vorgaben der Optimierung vom initialen Zustand $x(t_0) = [0; \omega_0]$ (Leerlauf bei Nenndrehzahl) in den Ruhezustand $x(t_0) = [0; 0]$ übergehen. Die Abbildung zeigt in der oberen Abbildung das Verhalten der unregulierten Strecke. Beim Einsetzen der Reglerparameter $k_1=0,2431$ und $k_2=0,9532$ ist zu beachten, dass k_2 für die Kreisfrequenz ω gilt. Bei Verwendung der Drehzahl f in der Simulation ist der Wert von k_2 durch 2π zu dividieren. Das untere Diagramm zeigt das Verhalten der geregelten Strecke.

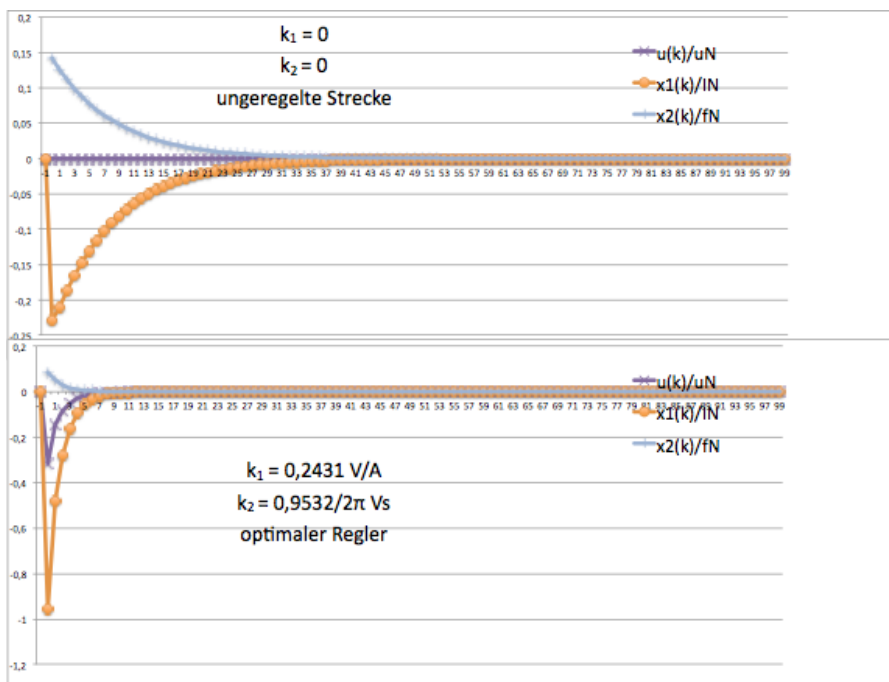


Bild 4.1 Ausschwingverhalten mit optimalem Regler

Die kürzere Reaktionszeit der geregelten Strecke ist deutlich zu erkennen. Der Ankerstrom steigt kräftig bis zum Betrag des Nennstroms. Das Beispiel zeigt auch, dass die Reglerparameter immer abhängig von den Vorgaben sind. Die Optimierung entlastet nicht von der Wahl vernünftiger Vorgaben für die Optimierung. Hierfür ist ein gutes physikalisches Verständnis der Regelstrecke hilfreich. Die Durchführung wird jedoch durch die standardisierte Form der Zustandsgleichungen sehr vereinfacht.

Übung 4.1: Verwenden Sie die optimalen Reglerparameter in einer Simulation mit Störgröße und analysieren Sie das Verhalten der Regelung.

4.2. Regler mit Beobachter

Nicht immer sind nicht alle Zustände messbar, bzw. der Aufwand hierfür ist zu hoch. Beim Gleichstrommotor wäre es beispielsweise denkbar, auf die Messung des Ankerstroms zu verzichten. Die Kenntnis aller Zustände ist jedoch für die Regelung per Zustandsrückführung erforderlich. Eine Alternative zur Messung der Zustände ist daher die Schätzung der Zustände aus dem Ausgangssignal. Dieses Verfahren ist bei digitalen Reglern praktikabel, wo der Messaufwand die Kosten für einen etwas komplexeren Regelalgorithmus übersteigt.

Die Schätzung der Zustände aus dem gemessenen Eingangssignal und gemessenen Ausgangssignal erfolgt durch einen sogenannten Beobachter. Der Beobachter enthält, wie in der Simulation, ein Modell der Regelstrecke. Mit Hilfe des Modells der Regelstrecke schätzt der Beobachter die Zustände so ab, dass sich das aus dem gemessenen Eingangssignal errechnete Ausgangssignal dem gemessenen Ausgangssignal anpasst. Der Beobachter liefert dem Regler die geschätzten Zustände. Folgende Abbildung zeigt die Anordnung.

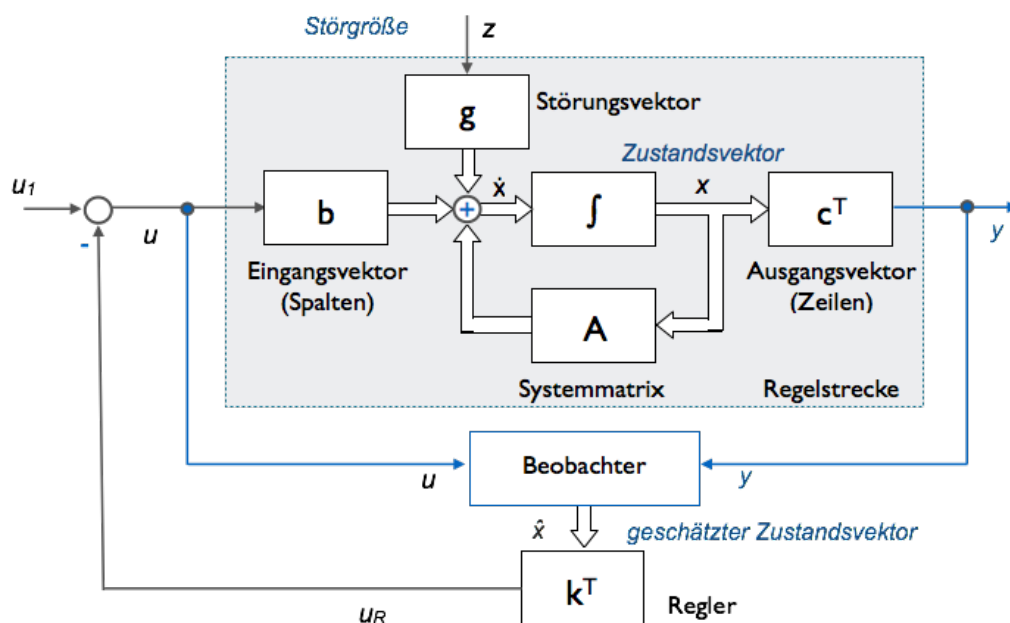


Bild 4.2 Regelung mit Beobachter

Der Beobachter benötigt einen Messpunkt am Eingangssignal und einen Messpunkt am Ausgangssignal. Voraussetzung für die Zustandsschätzung durch den Beobachter ist, dass sich die Zustände aus dem gemessenen Ausgangssignal und dem gemessenen Eingangssignal ableiten lassen. Das ist dann der Fall, wenn jede Komponente des Zustandsvektors der Strecke einen Einfluss auf das Ausgangssignal der Strecke hat.

Beobachtbarkeit

Formal ist die Beobachtbarkeit eines Systems so definiert, dass aus dem Eingangssignal $u(t)$ und dem Ausgangssignal $y(t)$ des Systems der Zustandsvektor $x(t)$ innerhalb eines endlichen Intervalls $[t_0, t_1]$ bestimmt werden kann.

Liegen die Zustandsgleichungen in der Diagonalform vor, so sind die Zustände voneinander entkoppelt. In diesem Fall lässt sich die Beobachtbarkeit unmittelbar am Ausgangsvektor c^T ablesen: der Ausgangsvektor darf keine Komponente enthalten, die gleich Null ist. Im allgemeinen Fall wird zur formalen Überprüfung der Beobachtbarkeit eine Beobachtbarkeitsmatrix Q_B gebildet.

$$Q_B = [c, A^T c, A^{T^2} c, \dots, (A^T)^{n-1} c] \quad (4.11)$$

Ein System gilt dann als beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix den Rang der Zustandsgleichungen besitzt. In diesem Fall sind alle Zeilen und Spalten der Matrix linear unabhängig. Die transponierte Systemmatrix A^T erhält man durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen. Den Rang der Beobachtbarkeitsmatrix ermittelt man aus der Determinante bzw. aus den Unterdeterminanten der Beobachtbarkeitsmatrix. Der Rang entspricht der größten Unterdeterminanten, die ungleich Null ist.

Beobachtbarkeit des Gleichstromantriebs

Da der Ausgangsvektor $c^T=(0,1)$ eine Null enthält, repräsentiert das Ausgangssignal nur die Komponente $x_2(t)$ des Zustandsvektors, d.h. die Kreisfrequenz $\omega(t)$. Der Strom $i(t)$ geht als Zustandsgröße $x_1(t)$ nicht unmittelbar in das Ausgangssignal ein. Allerdings gibt es eine mittelbare Abhängigkeit der Drehzahl vom Strom durch die Systemmatrix A .

Zur formalen Überprüfung ermittelt man für den Gleichstromantrieb

$$Q_B = [0, a_{21}; 1, 0] \quad (4.12)$$

Die Determinante errechnet sich zu $\det(Q_B) = -a_{21}$. Somit ist das System beobachtbar.

Aufbau des Beobachters

Der Aufbau des Beobachters entspricht den Zustandsgleichungen, wie in folgender Abbildung gezeigt. Als Eingangssignale erhält der Beobachter das gemessene Eingangssignal $u(t)$ der Strecke, sowie das gemessene Ausgangssignal $y(t)$ der Strecke.

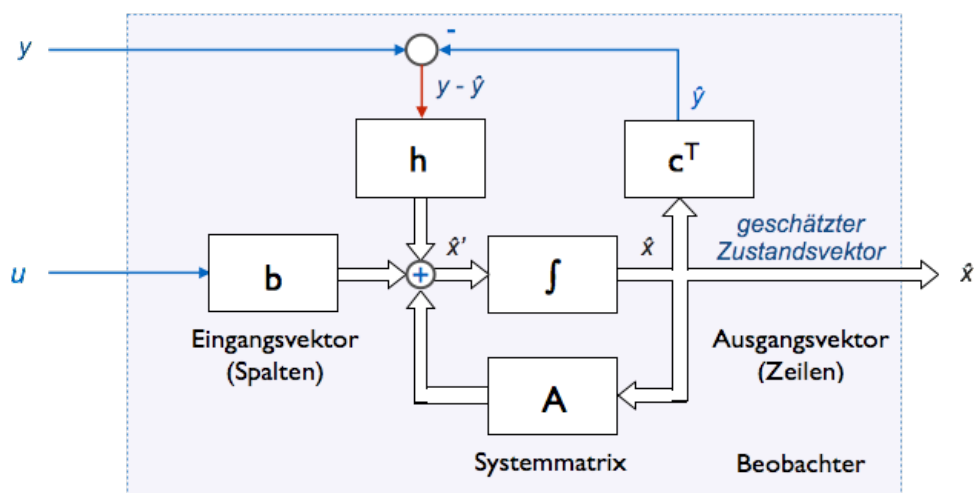


Bild 4.3 Aufbau des Beobachters

Das Ausgangssignal der Strecke wird verwendet, um den Beobachter zu führen. Die Abweichung des Ausgangssignals der Strecke $y(t)$ und des Schätzwertes des Ausgangssignals $\hat{y}(t)$ wird mit

dem Vektor h gewichtet und dient somit zur Korrektur der Schätzwerte der Zustände. Die Struktur des Beobachters entspricht somit der eines Regelkreises.

Aus dem Blockschaltbild ergeben sich die Zustandsgleichungen des Beobachters:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A \hat{x}(t) + b u(t) + h (y(t) - \hat{y}(t)) \quad (4.13)$$

$$\hat{y}(t) = c^T \hat{x}(t) \quad (4.14)$$

Durch Einsetzen von (4.14) erhält man hieraus:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - h c^T) \hat{x}(t) + b u(t) + h y(t) \quad (4.15)$$

Der Beobachter hat als Eingangssignale $u(t)$ und $y(t)$. Die Systemmatrix erhält durch die Rückführung des Schätzwertes $\hat{y}(t)$ die Form $A' = (A - h c^T)$. Der Schätzfehler der Zustände beträgt:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (4.16)$$

Für die zeitliche Ableitung des Schätzfehler $\dot{e}(t)$ ergibt sich mit den Zustandsgleichungen der Strecke und des Beobachters die Beziehung:

$$\dot{e}(t) = (A - h c^T) e(t) \quad (4.17)$$

Damit der Beobachter eine stabile Basis zur Regelung liefert, sollte der Schätzfehler mit der Zeit fallen. Die Ableitung des Schätzfehlers sollte somit in allen Komponenten kleiner als Null sein. Das ist dann der Fall, wenn alle Eigenwerte der Matrix $(A - h c^T)$ in der linken komplexen Ebene liegen, d.h. die Realteile der Eigenwerte negativ sind.

$$\text{Re} \{ \text{Eigenwerte} (A - h c^T) \} < 0 \quad (4.18)$$

Dieses Verhalten lässt sich durch geeignete Wahl des Vektors h realisieren. Die Matrix $(A - h c^T)$ beschreibt als Fehlermatrix die Annäherung der geschätzten Zustandswerte $\hat{x}(t)$ an die Zustandswerte $x(t)$. Nach Gleichung (4.15) ist diese Matrix zugleich die Systemmatrix des Beobachters. Die Wahl der Eigenwerte legt somit die Pole des Beobachters fest. Damit der Beobachter schneller als die Strecke reagieren kann, sollten diese weiter in der linken komplexen Ebene liegen als die Pole der Strecke.

Regelung des Gleichstromantriebs mit Beobachter

Die Regelung mit Beobachter ist in der Simulation weniger spannend, da die Simulation ja das gleiche Modell der Strecke beinhaltet wie der Beobachter. Interessanter wäre die Regelung eines realen Systems mit Hilfe eines Systemmodells im Beobachter. Dennoch soll zur Illustration des Prinzips eine Regelung mit Beobachter in der Simulation realisiert werden.

Hierzu ist zunächst der Vektor h festzulegen. Die Eigenwerte der Systemmatrix A sind $\lambda_1 = -29,87$ und $\lambda_2 = -0,1279$. Für den Beobachter sollen die Eigenwerte $\lambda_1 = -32$ und $\lambda_2 = -0,2$ betragen. Das charakteristische Polynom hat die Gestalt $(s - \lambda_1) (s - \lambda_2) = s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) s + \lambda_1 \lambda_2 = 0$. Mit den gewünschten Werten erhält man:

$$s^2 + 32,2 s + 6,4 = 0 \quad (4.19)$$

Mit $h = [h_1; h_2]$ und $c^T = [0, 1]$ hat die Matrix des Beobachters die Gestalt $A_b = (A - h c^T) = [a_{11}, a_{12} - h_1; a_{21}, -h_2]$. Hierbei sind Die Lage der Pole ergibt sich aus $\det(sE - A_b) = 0 = (s - a_{11})(s + h_2) + (h_1 - a_{12}) a_{21}$. Mit den Werten $a_{11} = -30$, $a_{12} = -0,48$ und $a_{21} = 7,96$ erhält man hieraus:

$$s^2 + (h_2 + 30) s + 30 h_2 + 3,82 + 7,96 h_1 = 0 \quad (4.20)$$

Durch Koeffizientenvergleich mit (4.19) findet sich zunächst aus $(h_2+30) = 32,2$ der Wert $h_2 = 2,2$ und hieraus $h_1 = -7,967$. Die Lage der Pole lässt sich durch Einsetzen von h_1 und h_2 in $A_b = (A - h c^T)$ und anschließender Berechnung der Eigenwerte mit MATLAB verifizieren.

Übung 4.2: Überprüfen Sie die Lage der Pole des Beobachters mit MATLAB.

Übung 4.3: Realisieren Sie den Beobachter in einer Simulation (mit Hilfe Ihrer Tabellenkalkulation oder MATLAB) und analysieren Sie das Verhalten des Beobachters. Schätzen Sie die Störfestigkeit des Beobachters gegen verrauschte Messwerte ein.

Zur Realisierung des Beobachters dienen die Zustandsgleichungen (4.15) und (4.14) als Ausgangspunkt. Hierbei sei $A_b = (A - h c^T)$ die Systemmatrix des Beobachters.

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - h c^T) \hat{x}(t) + b u(t) + h y(t) = A_b \hat{x}(t) + b u(t) + h y(t) \quad (4.21)$$

$$\hat{y}(t) = c^T \hat{x}(t) \quad (4.22)$$

Mit $b = [b_1; 0]$, $h = [h_1; h_2]$ und $c^T = [0, 1]$ ergibt sich heraus komponentenweise:

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = a_{b11} \hat{x}_1(t) + a_{b12} \hat{x}_2(t) + b_1 u(t) + h_1 y(t) \quad (4.23)$$

$$\dot{\hat{x}}_2(t) = a_{b21} \hat{x}_1(t) + a_{b22} \hat{x}_2(t) + h_2 y(t) \quad (4.24)$$

$$\hat{y}(t) = \hat{x}_2(t) \quad (4.25)$$

Zur Realisierung wird das Differenzialgleichungssystem mit Hilfe der Näherung $\dot{\hat{x}}_i(t) = d\hat{x}_i(t)/dt \approx \hat{x}_i(t) - \hat{x}_i(t-\Delta t)/\Delta t = \hat{x}_i(k) - \hat{x}_i(k-1)/\Delta t$ diskretisiert und zu einem Differenzengleichungssystem umgeformt. Die wechselseitigen Beziehungen von $\hat{x}_1(k)$ und $\hat{x}_2(k)$ in den Gleichungen werden durch Einsetzen und Umformen gelöst, so dass zunächst die eine Komponente unabhängig vom aktuellen Wert der anderen Komponente berechnet werden kann.

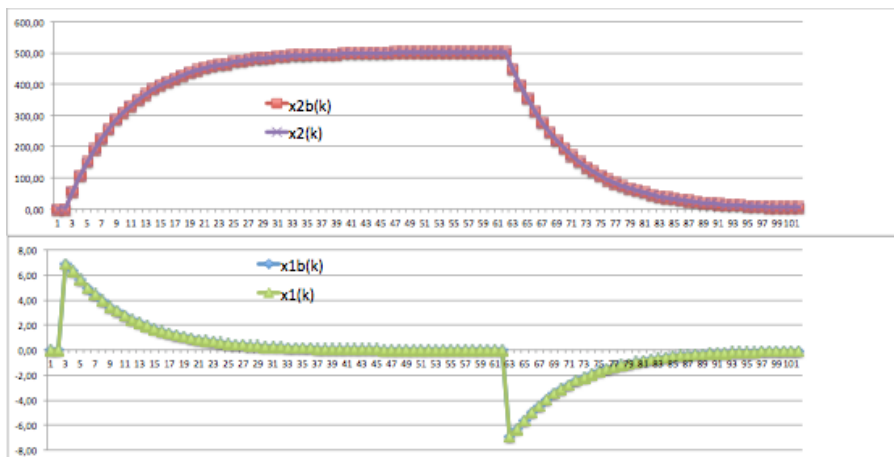


Bild 4.4 Schätzwerte des Beobachters in der Simulation

Die Abbildung oben zeigt einen Testlauf des Beobachters in der Simulation. Da die Regelstrecke mit dem exakt gleichen Systemmodell ebenfalls nur simuliert ist, überrascht es nicht, dass der Beobachter die Zustandswerte im Leerlauf exakt schätzen kann. Der Beobachter reagiert jedoch empfindlich auf Rauschen in den Messwerten, wie sich durch Zufallszahlen z.B. in der gemessenen Drehzahl $y(t)$ zeigen lässt. Die Schätzwerte für den Strom $x_1(t)$ schwanken dann recht stark.

4.3. Unbekannte Regelstrecke

Durch einen Beobachter wurden im letzten Abschnitt die Zustände eines Systems bei vorgegebenem Systemmodell geschätzt. In Umkehrung der Aufgabenstellung sollte es auch möglich sein, aus der Messung der Eingangs- und Ausgangssignale eines Systems die Systemparameter zu schätzen. Diese Methode kann bei einer unbekanntem Regelstrecke bei der Erstellung des Systemmodells nützlich sein. Folgende Abbildung zeigt die Aufgabenstellung.

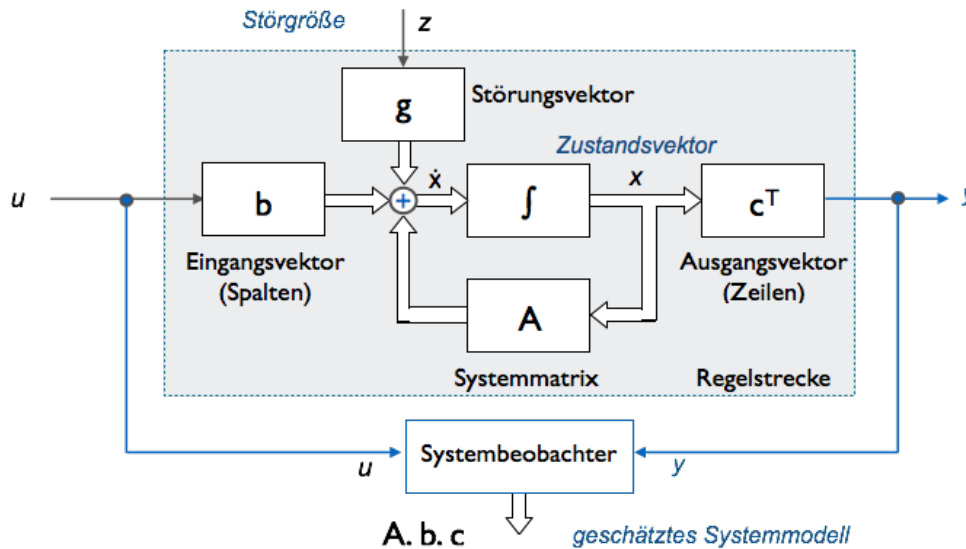


Bild 4.5 Schätzung der Systemparameter

Während der Beobachter Schätzwerte für den Zustandsvektor liefert, soll der Systembeobachter einen Schätzwert für die Übertragungsfunktion des Systems liefern, bzw. ein Systemmodell in Form der Systemmatrix, des Eingangsvektors und des Ausgangsvektors. Als Systemmodell werden die Koeffizienten a_i und b_j der Übertragungsfunktion im zeitdiskreten Fall verwendet.

$$G(z^{-1}) = \sum b_i z^{-i} / (1 - \sum a_j z^{-j}) \quad \text{mit } i=0, \dots, m; j=1, \dots, n; m \leq n \quad (4.26)$$

Anstelle der Variablen s der Laplace-Transformation ist die Variable z der Z-Transformation getreten. Zur Theorie und Praxis zeitdiskreter Systeme folgt in Teil 2 dieser Vorlesung (Digitale Regler) die Vertiefung der Methoden und Grundlagen. An dieser Stelle sollen nur die Möglichkeiten digitaler Regler aufgezeigt werden. Die Übertragungsfunktion korrespondiert im Zeitbereich mit der Differenzgleichung

$$y(k) = \sum b_i u(k-i) + \sum a_j y(k-j) \quad \text{mit } i=0, \dots, m; j=1, \dots, n \quad (4.27)$$

Beispiel: System 2. Ordnung

Für ein System 2. Ordnung mit den Koeffizienten a_0, a_1 und b_1, b_2 ergeben sich Übertragungsfunktion und Differenzgleichung zu:

$$G(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} / (1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}) \quad (4.28)$$

$$y(k) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) \quad (4.29)$$

Aus der diskreten Übertragungsfunktion lassen sich wie gewohnt die Zustandsgleichungen gewinnen. Hier gilt der aus Gleichung (3.28) bekannte Zusammenhang $G(s) = c^T (s E - A)^{-1} b$ sinn-

$$\Theta_{\text{est}} = (Z^T Z)^{-1} Z^T y \quad (4.33)$$

Hierbei bezeichnet Θ_{est} den Schätzwert der Systemkoeffizienten. Um diesen Schätzwert zu berechnen, ist das System mit einem geeigneten Eingangssignalen zu stimulieren. Als Eingangssignale bieten sich ein Impuls $u(k) = \delta(k)$ an, bzw. die Sprungfunktion $u(k) = 1(k)$. Am Ausgang des Systems erhält man dann die Impulsantwort bzw. Sprungantwort. Speziell bei der Impulsantwort vereinfacht sich die Struktur der Matrix Z erheblich.

Rekursive Berechnung der Systemparameter

Die Berechnung der Systemkoeffizienten nach Gleichung (4.33) ist numerisch mit einigen Nachteilen verbunden: es erfordert die Berechnung einer inversen Matrix, was bei numerisch schlecht konditionierten Vorgaben problematisch sein kann. Eine numerische etwas elegantere Methode ist der Einsatz einer rekursiven Schätzung. Ein solches Verfahren ist das sogenannte Kalman-Filter. Das Kalman-Filter wird in der Regelungstechnik zur Schätzung von Zustandsgrößen eingesetzt, d.h. als rekursiver Beobachter.

Wenn man die Systemkoeffizienten in die Form der Zustandsgleichungen bringt, lässt sich der Algorithmus zur Schätzung der Systemparameter einsetzen. Zu diesem Zweck nimmt der Vektor der Systemparameter den Platz des Zustandsvektors ein:

$$\Theta(k+1) = E \Theta(k) \quad (4.34)$$

$$y(k) = f^T(k) \Theta(k) + e(k) \quad (4.35)$$

Hierbei enthält der Vektor $f^T(k)$ die Stützstellen des Ausgangssignals und Eingangssignals zum Zeitpunkt k : $f^T(k) = (y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n), u(k), u(k-1), \dots, u(k-m))$. Das Kalman-Filter behält mit diesen Vorgaben die Struktur eines Beobachters, wie folgende Abbildung zeigt.

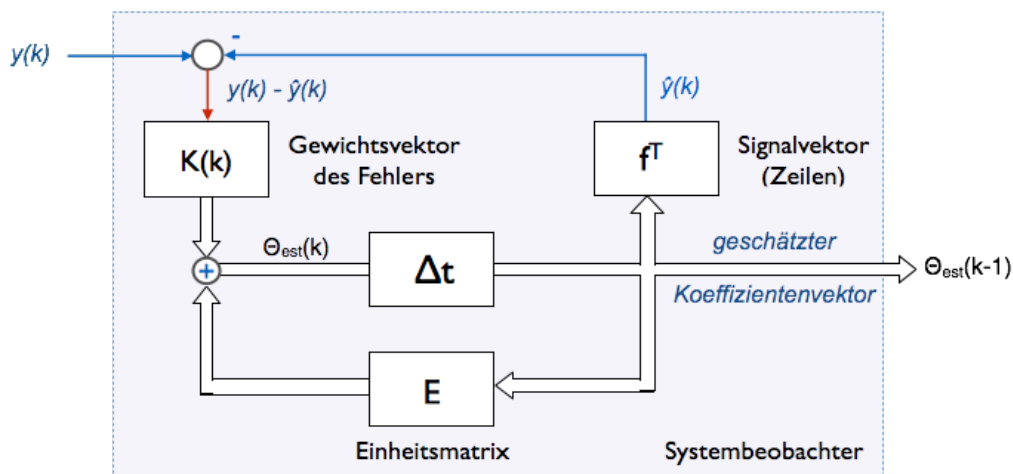


Bild 4.6 Kalman-Filter zur Schätzung der Systemkoeffizienten

Für das rekursive Filter ergibt sich insgesamt folgender Ablauf:

$$\Theta_{\text{est}}(k) = \Theta_{\text{est}}(k-1) + K(k) (y(k) - f^T(k) \Theta_{\text{est}}(k-1)) \quad (4.36)$$

$$K(k) = P(k-1) f(k) (f^T(k) P(k-1) f(k) + 1)^{-1} \quad (4.37)$$

$$P(k) = P(k-1) - K(k) f^T(k) P(k-1) \quad (4.38)$$

Gleichung (3.36) geht aus dem Blockschaltbild hervor: den aktuellen Schätzwert $\Theta_{\text{est}}(k)$ erhält man aus dem jeweils vorausgegangenem Schätzwert $\Theta_{\text{est}}(k-1)$ plus einem Korrekturterm. Das Verfahren arbeitet also rekursiv. Der Gewichtsvektor $K(k)$ in Gleichung (3.36) wird verwendet, um den skalaren Korrekturterm $y(k) - f^T(k) \Theta_{\text{est}}(k-1)$ zu bewerten, der die Abweichung des Schätzwertes $\hat{y}(k) = f^T(k) \Theta_{\text{est}}(k-1)$ vom aktuellen Ausgangssignal der Strecke $y(k)$ repräsentiert.

Die Gleichungen (4.37) und (4.38) gehen nicht aus dem Blockschaltbild hervor. Gleichung (4.37) definiert den Gewichtsvektor $K(k)$ auf rekursive Weise. Hierbei ist $P(k)$ eine Fehlerkovarianzmatrix für den Koeffizientenvektor $\Theta_{\text{est}}(k)$. Die Hauptdiagonale von $P(k)$ enthält die Fehlervarianzen der einzelnen Koeffizienten. Der in Gleichung (3.47) zu invertierende Ausdruck ist eine skalare Größe, so dass bei diesem rekursiven Algorithmus die Lösung eines linearen Gleichungssystem nicht erforderlich ist.

Die Fehlerkovarianzmatrix $P(k)$ wird in Gleichung (4.38) ebenfalls rekursiv berechnet. Als rekursiver Algorithmus benötigt das Verfahren nach den Gleichungen (4.36), (4.37) und (4.38) Startwerte. Der Koeffizientenvektor $\Theta_{\text{est}}(0)$ kann hierfür zu Null gesetzt werden. Zu Beginn des Verfahrens muss mit einer größeren Ungenauigkeit der Schätzung gerechnet werden. Ein geeigneter Startwert für die Fehlerkovarianzmatrix ist daher eine von Null verschiedene, willkürliche Vorgabe. Beispielsweise lässt sich die Hauptdiagonale von $P(k)$ mit einem großen Wert wie z.B. 10^6 besetzen.

Schätzung der Systemparameter für den Gleichstromantrieb

Der rekursive Algorithmus zur Schätzung der Systemkoeffizienten soll aus dem Eingangssignal $u(k)$ und dem Ausgangssignal $y(k)$ die Systemparameter der Strecke schätzen. Hierzu ist eine Vorgabe über die Ordnung des Systems erforderlich. Da im zeitkontinuierlichen Fall ein System 2. Ordnung genügt, sei für den zeitdiskreten Fall ebenfalls ein System 2. Ordnung angenommen.

Die Übertragungsfunktion und die Differenzgleichung des Systems sind somit wie folgt:

$$G(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} / (1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}) \quad (4.39)$$

$$y(k) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) \quad (4.40)$$

Gesucht sind nun die Systemkoeffizienten b_i und a_j . Diese sollen aus einer Messreihe an der Regelstrecke mit dem Eingangssignal $u(k)$ und der Systemantwort $y(k)$ ermittelt werden. Den Koeffizientenvektor für das System 2. Ordnung errechnet man zu:

$$\Theta^T = (a_1, a_2, b_0, b_1) \quad (4.41)$$

Der Signalvektor zum Zeitpunkt k enthält die Messwerte:

$$f^T(k) = (y(k-1), y(k-2), u(k), u(k-1)) \quad (4.42)$$

Für den Gewichtsvektor $K(k)$ erhält man die Form $K^T(k) = [k_1(k), k_2(k)]$, wobei die Koeffizienten rekursiv ermittelt werden. Als Startwert genügt $K^T(k) = [0, 0]$. Die Fehlerkovarianzmatrix $P(k)$ hat die Form $P(k) = [p_1(k), 0; 0, p_2(k)]$. Als Startwerte werden $p_1 = p_2 = 10^6$ vorgegeben. Der Algorithmus kann nun nach den Gleichungen (4.36), (4.37) und (4.38) implementiert werden.

Übung 4.6: Implementieren Sie den rekursiven Algorithmus in MATLAB oder in einer Ihnen geläufigen Programmiersprache. Verwenden Sie das simulierte Eingangssignal $u(k)$ und Ausgangssignal $y(k)$ der Regelstrecke. Schätzen Sie die Filterkoeffizienten. Testen Sie das Modell durch eine Simulation der Differenzgleichung (4.40). Analysieren Sie die Qualität des Systemmodells.

Übung 4.7: Errechnen Sie aus den Systemkoeffizienten die Übertragungsfunktion des Systems, sowie die zeitdiskreten Zustandsgleichungen.

Folgende Abbildung zeigt einen Test der mit Hilfe eines Kalman-Filter geschätzten Systemkoeffizienten nach Gleichung 4.40. Als Vorgaben dienten $u(k)$ als Sprungfunktion und die Systemantwort $y(k)$ des Gleichstromantriebs aus Kapitel 1.

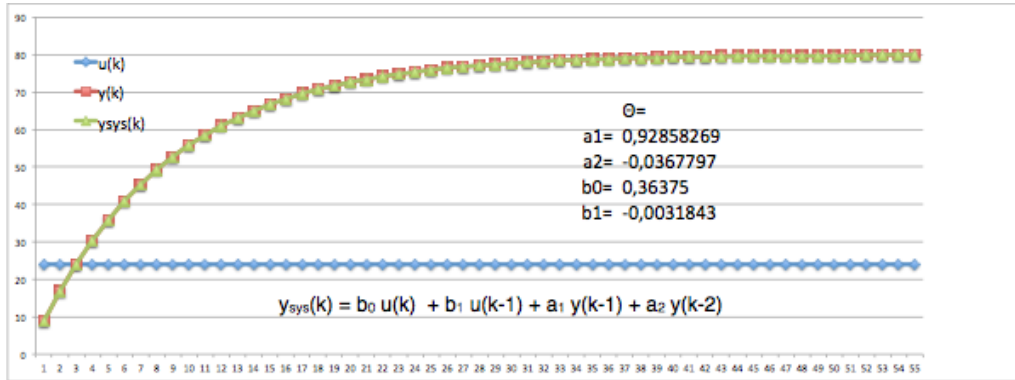


Bild 4.7 Testlauf des geschätzten, zeitdiskreten Systemmodells

Man erkennt, dass die geschätzten Parameter die Regelstrecke sehr genau abbilden. Die Koeffizienten wurden mit Hilfe eines Java-Programms ermittelt (siehe Anhang F). Folgende Abbildung zeigt den Fortschritt der rekursiven Ermittlung des Koeffizientenvektors $\Theta^T = (a_1, a_2, b_0, b_1)$. Man erkennt, dass bereits nach 6 Stützstellen ein Ergebnis vorliegt.

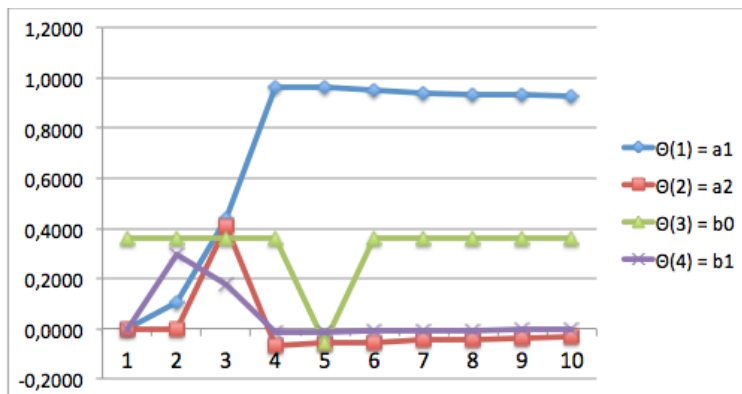


Bild 4.8 Einschwingverhalten der Schätzwerte

Ebenfalls gut zu erkennen ist, dass für die vorgegebene Regelstrecke die Koeffizienten a_2 und b_1 keine große Rolle spielen. Das Regelstrecke könnte durch ein System 1. Ordnung hinreichend gut beschrieben werden. Bei Kenntnis der Regelstrecke (Gleichstromantrieb) ist das nicht weiter verwunderlich: Das System besitzt einen dominanten Pol (siehe Kapitel 1).

4.4. Instabile Regelstrecke

Betrachtet wird ein System mit folgender Übertragungsfunktion:

$$G(s) = 1 / (s^2 - 1) \tag{4.43}$$

Das System besitzt eine Polstelle bei $p_1 = 1$, und eine Polstelle bei $p_2 = -1$, wie man am Nennerpolynom unmittelbar erkennen kann ($s^2 - 1 = (s-1)(s+1)$). Das System soll durch Zustandsrückführung so eingestellt werden, dass es stabil bleibt.

Die Zustandsgleichungen ermittelt man aus der Differenzialgleichung des Systems:

$$\ddot{y}(t) - y(t) = u(t) \quad (4.44)$$

Setzt man $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \dot{y}(t)$ und $x_3(t) = \ddot{y}(t)$, so ergibt sich:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (4.45)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t) = \ddot{y}(t) = y(t) + u(t) = x_1(t) + u(t) \quad (4.46)$$

Die letzteren beiden Gleichungen sind die Zustandsgleichungen des Systems mit der Systemmatrix $A = [0, 1; 1, 0]$ und dem Eingangsvektor $b = [0; 1]$. Die Zustandsgleichungen liegen in der Regelungsnormalform vor. Die Ermittlung der Reglerparameter soll durch Polvorgabe erfolgen. Gewünscht werden die Pole $p'_1 = -1$ und $p'_2 = p_2 = -1$. Das zugehörige Nennerpolynom zu diesen Polen lautet

$$(s + 1)(s + 1) = s^2 + 2s + 1 \quad (4.47)$$

Die Übertragungsfunktion des per Zustandsrückführung geregelten Systems besitzt folgendes Nennerpolynom (siehe Abschnitt 3, Gleichung (3.46)):

$$N(s) = s^2 + (a_1 + k_2)s + (a_0 + k_1) = 0 \quad (4.48)$$

Durch Koeffizientenvergleich mit dem Nennerpolynom aus (4.43) ermittelt man mit $a_0 = -1$ und $a_1 = 0$ die Parameter $k_1 = -2$ und $k_2 = -2$. Die Systemmatrix des geregelten Systems $A' = (A - b k^T) = [0, 1; 1 - k_1, -k_2] = [0, 1; -1, -2]$. Diese Matrix besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -1$.

Übung 4.8: Wie lautet die Differenzialgleichung des stabilisierten Systems? Zeichne Sie ein Signalflussdiagramm für die Zustandsregelung.

5. Seminararbeit

Die Seminararbeit gibt Ihnen Gelegenheit, sich individuell und praktisch mit der Regelungstechnik zu beschäftigen. Sie erhalten eine Aufgabe, die Sie alleine bzw. in einer Zweiergruppe bearbeiten. Die Aufgabe wird zum Teil innerhalb der Vorlesungszeit gelöst, wo Ihnen der Dozent für Fragen zur Verfügung steht, zum anderen Teil in Heimarbeit bzw. in Vorlesungslücken.

Die Ergebnisse der Seminararbeit werden formlos in Art eines Laborberichtes dokumentiert und zum Ende des Semesters an den Dozenten gegeben. Die Bewertung der Seminararbeit erfolgt durch ein Testat. Das Testat für den erfolgreichen Abschluss der Seminararbeit ist Teil der Prüfungsleistung. In Absprache mit Ihrem Dozenten kann die Seminararbeit auch benotet werden und somit zusammen mit der Klausur in die Gesamtnote einfließen.

Ziel der Seminararbeit ist die praktische Auseinandersetzung mit einem Problem der Regelungstechnik. Die Seminararbeit sollen Sie in die Lage versetzen, das in der Vorlesung erworbene Wissen in der Praxis anzuwenden.

Thema: Freies Thema. Lösen Sie eine theoretische oder praktische Aufgabe aus der Regelungstechnik. Sprechen Sie ihr Thema mit dem Dozenten ab. Es besteht die Möglichkeit, ein Thema zu zweit zu bearbeiten. Dokumentieren Sie Ihre Aufgabenstellung und die Ergebnisse.

Aufgabe: Wenden Sie folgende Methoden der Regelungstechnik auf Ihr Thema an:

1. **Physikalisches Modell erstellen:** Beschreiben Sie das Verhalten Ihres Systems auf Basis der physikalischen Zusammenhänge mit Hilfe von Differenzialgleichungen.
2. **System definieren:** Definieren Sie Ihr System als Regelstrecke. Die Eingangsgröße stellt hierbei die Stellgröße dar, die Ausgangsgröße die Regelgröße. Nicht beeinflussbare Einflüsse werden als Störgrößen berücksichtigt.
3. **System beschreiben und simulieren:** Beschreiben Sie ihr System (Regelstrecke) mit Hilfe des physikalischen Modells passend zu Ihrer Systemdefinition. Verwenden Sie zur Systembeschreibung die Übertragungsfunktion bzw. ein Zustandsmodell. Simulieren Sie Ihr System und testen Sie Ihr Modell auf Plausibilität.
4. **Regler entwerfen und testen:** Entwerfen Sie einen Regler für Ihr System. Parametrisieren Sie den Regler in geeigneter Weise. Testen Sie den Regler mit Hilfe einer Simulation. Der Regler kann als traditioneller Regler bzw. als Zustandsregler ausgeführt werden. Analysieren Sie das Verhalten des Regelkreises (Führungsverhalten, Störverhalten, Einfluss auf die Stellgrößen, ...).

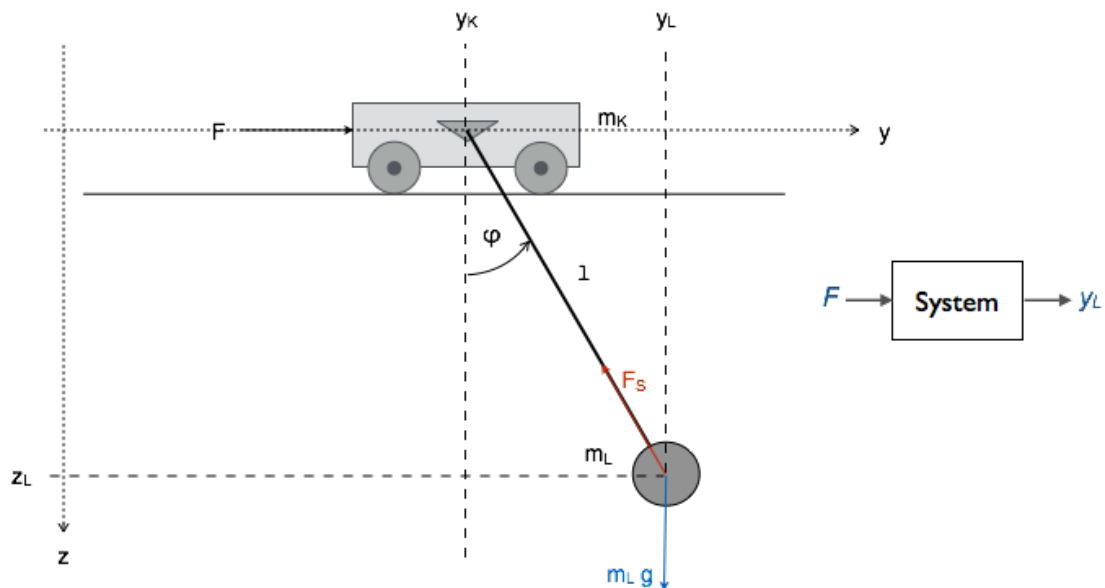
Praktische Übung (Option): Falls es Ihnen möglich und interessant erscheint, implementieren Sie Ihren Regler für eine gegebene Regelstrecke. Verwenden Sie als Basis Ihre SPS (aus der Veranstaltung Industrielle Bussysteme), bzw. ein geeignetes Mikrocomputersystem.

Hinweis: Wenn Ihre Studienarbeit ein regelungstechnisches Thema einschliesst, können Sie auch dieses als Seminararbeit verwenden und ausbauen.

6. Übungen

6.1. Verladebrücke

Auf einer Verladebrücke soll mit Hilfe der Laufkatze mit der Masse m_K die Last m_L an einer vorgegebenen Zielposition y_L abgesetzt werden. Die Laufkatze wird mit Hilfe der Kraft F bewegt (Eingangsgröße). Die Zielposition y_L stellt die Ausgangsgröße dar. Es seien kleine Winkel ϕ vorausgesetzt.



Frage 6.1.1: Erstellen Sie die Differenzialgleichung. Hinweis: Wählen Sie zunächst als den Winkel ϕ als Ausgangsgröße. Die Auslenkung $y_L(t)$ erhalten Sie dann aus $y_K(t)$ und $\phi(t)$.

Lösung: Es gelten die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$m_K \ddot{y}_K(t) - F_S \sin\phi(t) = F(t) \quad (1)$$

$$m_L \ddot{y}_L(t) + F_S \sin\phi(t) = 0 \quad (2)$$

$$m_L \ddot{z}_L(t) + F_S \cos\phi = m_L g \quad (3)$$

Aus der Geometrie ergibt sich:

$$y_L = y_K + l \sin\phi \quad (4)$$

$$z_L = l \cos\phi \quad (5)$$

Mit Hilfe von (4) und (5) lassen sich y_L und z_L in (2) und (3) eliminieren. Zweimaliges Ableiten von (4) und (5) ergibt:

$$\dot{y}_L = \dot{y}_K + l \cos\phi \dot{\phi}$$

$$\ddot{y}_L = \ddot{y}_K - l \sin\phi (\dot{\phi})^2 + l \cos\phi \ddot{\phi} \quad (4')$$

$$\dot{z}_L = -l \sin\phi \dot{\phi}$$

$$\ddot{z}_L = -l \cos\phi (\dot{\phi})^2 - l \sin\phi \ddot{\phi} \quad (5')$$

Einsetzen von (4') und (5') in (2) und (3) ergibt:

$$m_L (\ddot{y}_K - l \sin \phi (\dot{\phi})^2 + l \cos \phi \phi'') + F_S \sin \phi = 0 \quad (2')$$

$$m_L (-l \cos \phi (\dot{\phi})^2 - l \sin \phi \phi'') + F_S \cos \phi = m_L g \quad (3')$$

Nach Multiplikation von (2') mit $\cos \phi$, Multiplikation von (3') mit $\sin \phi$ und anschließender Subtraktion (2') - (3') verbleiben:

$$\ddot{y}_K \cos \phi + l \phi'' = -g \sin \phi \quad (6)$$

Einsetzen von $F_S \sin \phi$ aus (2') in (1) ergibt:

$$m_K \ddot{y}_K + m_L \ddot{y}_K - m_L l \sin \phi (\dot{\phi})^2 + m_L l \cos \phi \phi'' = F(t) \quad (7)$$

Da kleine Winkel ϕ vorausgesetzt waren, werden folgende Ausdrücke vereinfacht:

$$\cos \phi \approx 1; \quad \sin \phi \approx \phi; \quad \phi (\dot{\phi})^2 \approx 0;$$

Es verbleiben folgende Systemgleichungen:

$$\ddot{y}_K + l \phi'' = -g \phi \quad (6.1.1)$$

$$(m_K + m_L) \ddot{y}_K + m_L l \phi'' = F(t) \quad (6.1.2)$$

Die Ausgangsgröße $y_L(t)$ folgt aus (4), im linearisierten Fall:

$$y_L = y_K + l \phi \quad (6.1.3)$$

Frage 6.1.2: Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion.

Lösung: Durch Transformation in den Bildbereich erhält man

$$s^2 Y_K(s) + s^2 l \Phi(s) = -g \Phi(s) \quad (6.1.1')$$

$$s^2 (m_K + m_L) Y_K(s) + s^2 m_L l \Phi(s) = F(s) \quad (6.1.2')$$

$$Y_L(s) = Y_K(s) + l \Phi(s) \quad (6.1.3')$$

Umformen von (3.22.1') nach Y_K und einsetzen in (6.1.2') ergibt:

$$-g (m_L + m_K) \Phi(s) - m_K l s^2 \Phi(s) = F(s)$$

Hieraus folgt für die Ausgangsgröße $\Phi(s)$:

$$G_1(s) = \Phi(s)/F(s) = -1 / (g (m_L + m_K) + s^2 m_K l)$$

Umformen von (3.22.1') nach Y_K und einsetzen in (6.1.3') ergibt:

$$G_2(s) = Y_L(s)/\Phi(s) = g/s^2$$

Die gesamte Übertragungsfunktion ergibt sich auf der Verkettung von G_1 und G_2 :

$$G(s) = G_1(s) G_2(s).$$

Frage 6.1.3: Erstellen Sie die Zustandsgleichungen des Systems.

Lösung: Ausgangspunkt sind die Systemgleichungen (6.1.1) und (6.1.2).

$$\ddot{y}_K + l \phi'' = -g \phi \quad (6.1.1)$$

$$(m_K + m_L) \ddot{y}_K + m_L l \phi'' = \ddot{y}_K \quad (6.1.2)$$

Ein Nachteil dieser Darstellung sind die gemischten zweiten Ableitungen in beiden Gleichungen. Zur leichteren Verarbeitung werden die Gleichungen daher etwas verändert. Multiplikation mit $1/m_L$ von (6.1.2) ergibt:

$$(m_K/m_L + 1) \dot{y}_K + l \phi'' = F(t) / m_L \tag{6.1.2}$$

Gleichung (6.1.1) von Gleichung (6.1.2) subtrahiert ergibt:

$$\begin{aligned} (m_K/m_L) \ddot{y}_K &= g \phi + F(t) / m_L && | \cdot m_L/m_K \\ \ddot{y}_K &= m_L g/m_K \phi + F(t) / m_K \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

Diese Gleichung (6.1.3) von (6.1.1) subtrahiert ergibt:

$$\begin{aligned} l \phi'' &= -m_L g/m_K \phi - g \phi - F(t) / m_K && | \cdot 1/l \\ \phi'' &= -(g/l)(1 + m_L/m_K) \phi - F(t) / l m_K \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

Für das mit (6.1.3) und (6.1.4) vorliegende Differenzialgleichungssystem 2. Ordnung werden folgende Hilfsgrößen gewählt:

$$x_1(t) = y_K(t); \quad x_2(t) = \dot{y}_K(t); \quad x_3(t) = \phi(t); \quad x_4(t) = \phi'(t)$$

Man erhält folgendes DGL-System erster Ordnung:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{1}$$

$$\dot{x}_2(t) = m_L g/m_K x_3(t) + F(t) / m_K \tag{2}$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t) \tag{3}$$

$$\dot{x}_4(t) = -(g/l)(1 + m_L/m_K) x_3(t) - F(t) / l m_K \tag{4}$$

Die Ausgangsgröße $y_L(t)$ erhält man aus:

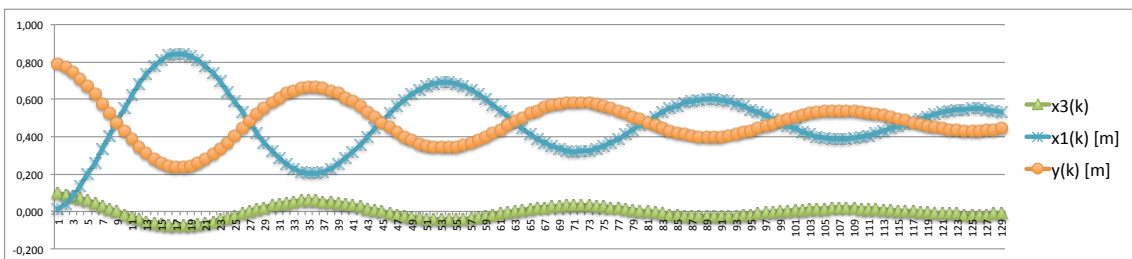
$$y_L(t) = y_K(t) + l \phi(t) = x_1(t) + l x_3(t) \tag{5}$$

Frage 6.1.4: Simulieren Sie das System. Testen Sie hierzu plausible Werte an für m_L , m_K und die Länge l . Testen Sie zunächst die Eigenbewegung des Systems (ohne äußere Anregung). Testen Sie dann verschiedene Verläufe der Eingangsgröße F für eine optimale Positionierung im Sinne kurzer Laufzeiten bzw. Vermeidung von Pendelbewegungen.

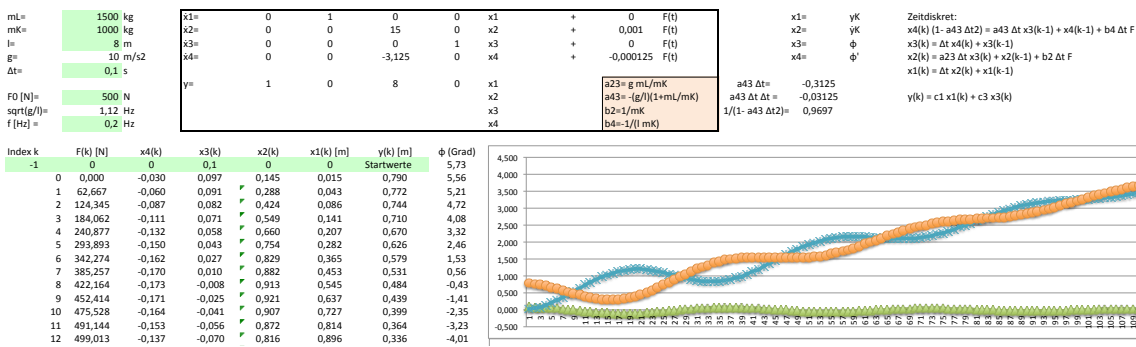
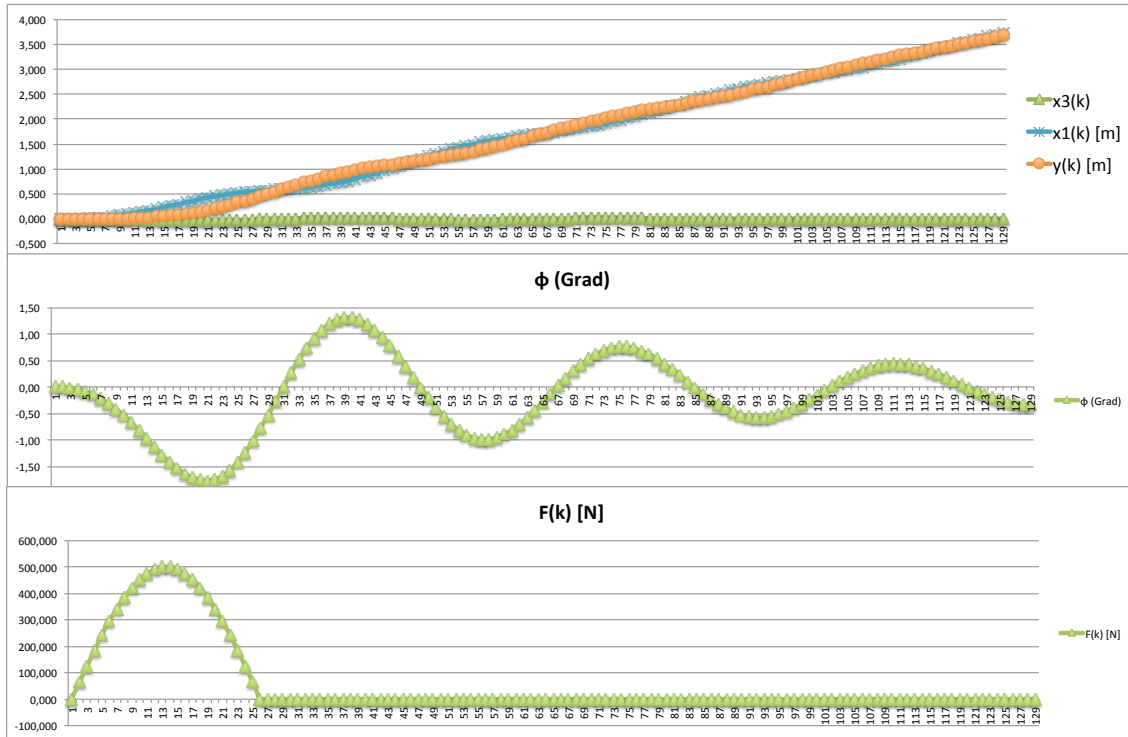
Beispiel: Mit $m_K = 1000$ kg, $m_L = 1500$ kg und $l = 8$ m erhält man als Zustandsmodell:

$$A = [0, 1, 0, 0; 0, 0, 15, 0; 0, 0, 0, 1; 0, 0, -3.125, 0]; \quad b = [0; 0.001; 0; -0.000125], \quad c = [1, 0, 8, 0];$$

Simulationslauf: Eigenschwingung mit Initialwert $\phi_0 = 0,1$, $\Delta t = 0,1$ s:



Simulationslauf: Anregung mit $F = F_0 \sin(2\pi f k \Delta t)$, $f = 0,2$ Hz:



Frage 6.1.5: Ist das System beobachtbar? Begründen Sie Ihre Aussage. Welche Konsequenzen ergeben sich hieraus?

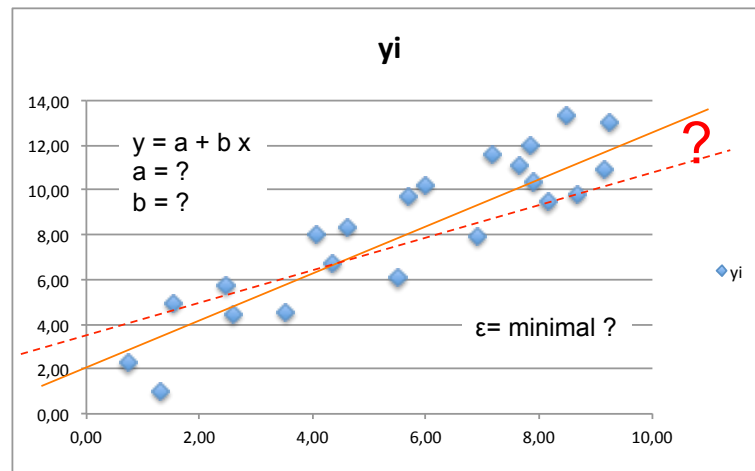
Frage 6.1.6: Ist das System steuerbar? Begründen Sie Ihre Aussage. Welche Konsequenzen ergeben sich hieraus?

Frage 6.1.7: Erstellen Sie ein Blockschaltbild zu den Zustandsgleichungen. Hinweis: Verwenden Sie hierzu Blöcke zur Integration (Übertragungsfunktion 1/s), sowie Blöcke zur Multiplikation mit den Konstanten (Proportionalglieder). Sie erhalten ein Diagramm mit dem Signalfuss.

Frage 6.1.8: Bisher wurde die Verladebrücke als Regelstrecke betrachtet. Wie könnte eine Regelung hierfür aussehen?

6.2. Linear Regression

Gegeben ist eine Reihe von Messwerten $\{y_i\}$, und $\{x_i\}$, zwischen denen man einen linearen Zusammenhang $y = a + b x$ vermutet, wie in folgender Abbildung gezeigt.



Ziel ist es, die Koeffizienten a und b so zu ermitteln, dass sie die bestmögliche Annäherung an diesen Zusammenhang ergeben. Wenn die Messwerte den linearen Zusammenhang wiedergeben, gilt also

$$y_i = a_i + b x_i + \varepsilon_i \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, N \quad (6.1.1)$$

Hierbei bezeichnet ε_i den Messfehler. Bestmöglich wird nun so definiert, dass die Summe der Fehlerquadrate minimal sein soll. Als Optimierungskriterium gilt somit:

$$\delta = \sum \varepsilon_i^2 = \text{minimal} \quad (6.1.2)$$

Wenn man den Messfehler gemäß Gleichung (6.1.1) ausdrückt, lautet diese Forderung:

$$\delta = \sum \varepsilon_i^2 = \sum (y_i - a - b x_i)^2 = \text{minimal}$$

Diese Bedingung ist abhängig von der Wahl der Koeffizienten a und b . Im Minimum sind die partiellen Ableitungen $\partial\delta/\partial a = 0$ und $\partial\delta/\partial b = 0$. Durch Ableiten erhält man die beiden Gleichungen

$$\partial\delta/\partial a = 0 = -2 \sum (y_i - a - b x_i) \quad (6.1.3)$$

$$\partial\delta/\partial b = 0 = -2 \sum (y_i - a - b x_i) x_i \quad (6.1.4)$$

Durch Umformung ergibt sich hieraus ein lineares Gleichungssystem:

$$N a + (\sum x_i) b = \sum y_i \quad (6.1.5)$$

$$(\sum x_i) a + (\sum x_i^2) b = \sum x_i y_i \quad (6.1.6)$$

Dieses Gleichungssystem hat in vektorieller Schreibweise die Form

$$A * z = w \quad (6.1.7)$$

wobei $z = [a; b]$ die gesuchten Koeffizienten enthält und $w = [\sum y_i; \sum x_i y_i]$.

Frage 6.2.1: Lösen Sie das Gleichungssystem analytisch für $A=[a_{11}, a_{12}; a_{21}, a_{22}]$ und $w=[w_1; w_2]$.

Frage 6.2.2: Erzeugen Sie in Ihrer Tabellenkalkulation bzw. in MATLAB einen Satz mit N Werten $\{y_i\}$, und $\{x_i\}$ mit Hilfe der Beziehung $y_i = a_i + b x_i + \varepsilon_i$ unter Verwendung von Zufallszahlen. Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b mit minimalen Fehlerquadraten.

Frage 6.2.3: Lösen Sie das Gleichungssystem numerisch mit Hilfe von MATLAB z.B. eine gegebene Matrix A und einen gegebenen Vektor w, z.B. für $A=[21, 94; 94, 586]$; $w=[135; 771]$.

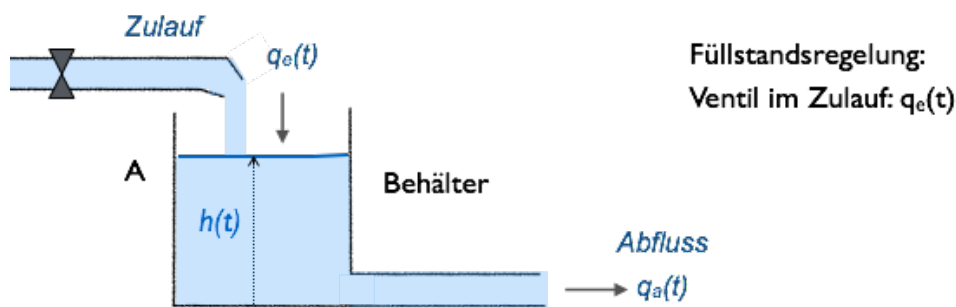
Bemerkung: Verwenden Sie Funktionen aus der linearen Algebra (linear equations), z.B.

`>> z=linsolve(A,w); Ergebnis: z = 1.9124; 1.0089`

Frage 6.2.4: Welchen Nutzen in der Regelungstechnik könnte man mit der Methode der minimalen Fehlerquadrate erzielen?

6.3. Führungsverhalten und Störverhalten

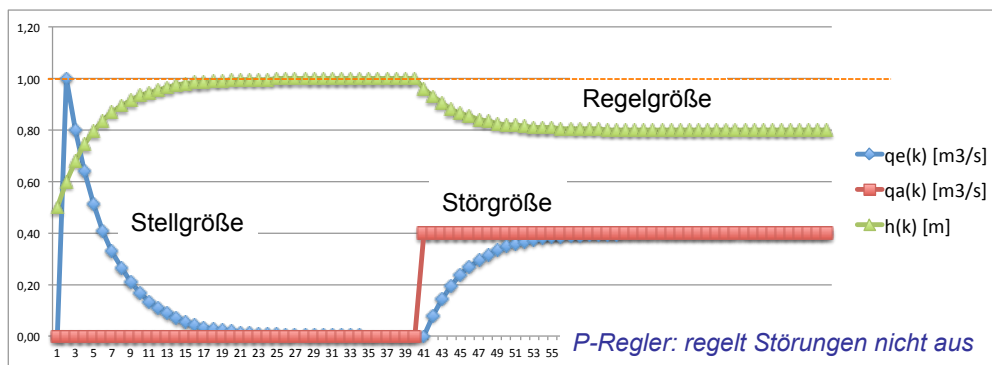
Der Füllstand $h(t)$ in einem Behälter soll durch ein Ventil im Zulauf $q_e(t)$ geregelt werden. Der Abfluss $q_a(t)$ soll hierbei als Störgröße betrachtet werden. Der Füllstand berechnet sich aus der Differenz von Abfluss und Zulauf zu $\dot{h}(t) = k (q_e(t) - q_a(t))$ mit der Konstanten $k = 1/A = 1 \text{ m}^{-2}$.



Frage 6.3.1: Wie sieht das System als Regelstrecke im Blockdiagramm aus? Welches sind die Regelgröße, die Stellgröße und die Störgröße?

Frage 6.3.2: Wie lautet die Übertragungsfunktion des Behälters als Regelstrecke?

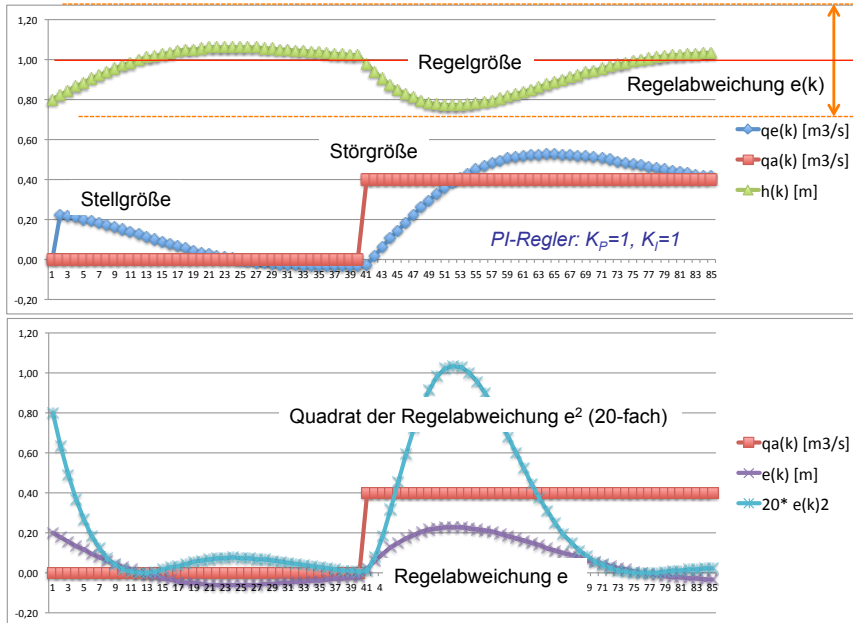
Frage 6.3.3: Regeln Sie die Strecke mit Hilfe eines P-Reglers. Untersuchen Sie das Führungsverhalten und das Störverhalten der Regelung in einer Simulation. Wie lautet die gesamte Übertragungsfunktion? Beispiel:



Frage 6.3.4: Regeln Sie die Strecke mit Hilfe eines PI-Reglers. Wie lautet die gesamte Übertragungsfunktion? Untersuchen Sie das Führungsverhalten und das Störverhalten der Regelung. Welcher der beiden Reglertypen scheint Ihnen für diesen Zweck am besten geeignet zu sein? Begründen Sie Ihre Aussage.

6.4. Optimale Regler

Bei der Auslegung der Reglerparameter soll ein Optimierungskriterium verwendet werden. Im PI-Regler aus Aufgabe 6.3 ergibt sich beispielsweise in Abhängigkeit der gewählten Reglerparameter das in der folgenden Abbildung gezeigte Verhalten.



Als Optimierungskriterium soll nun die Regelabweichung $e(t)$ verwendet werden. Um große Abweichungen nach oben bzw. nach unten stärker zu bewerten, sollen die Fehlerquadrate $e^2(t)$ verwendet werden. Optimierungsziel ist eine minimale Summe der Fehlerquadrate:

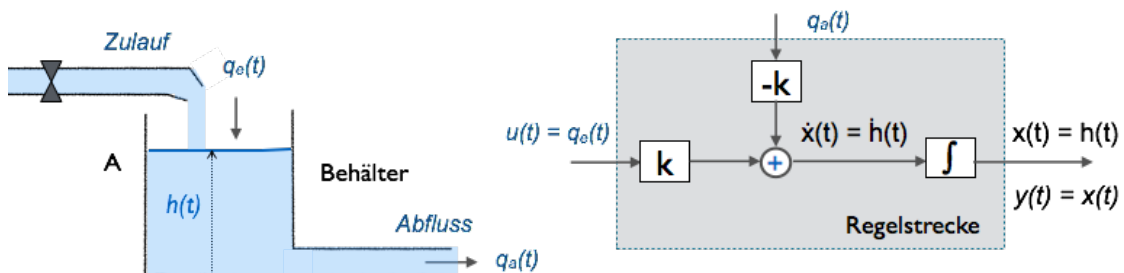
$$\delta = \int e^2(t) dt = \text{minimal}, \quad t = 0 \text{ bis } T \quad (6.4.1)$$

Frage 6.3.1: Regeln Sie die Strecke mit Hilfe eines P-Reglers. Ermitteln Sie durch Probieren die Abhängigkeit der Regelabweichung bzw. der quadratischen Regelabweichung von der Reglerkonstanten. Welche Einstellungen von K_P sind günstig?

Frage 6.3.2: Regeln Sie die Strecke mit Hilfe eines PI-Reglers. Ermitteln Sie durch Probieren die Abhängigkeit der Regelabweichung bzw. der quadratischen Regelabweichung von den Reglerkonstanten. Welche Kombinationen von K_P und K_I sind günstig?

6.5. Regelung durch Zustandsrückführung

Folgende Abbildung zeigt nochmals den Behälter aus Aufgabe 6.3 zusammen mit der Systemgleichung der Strecke als Zustandsmodell.

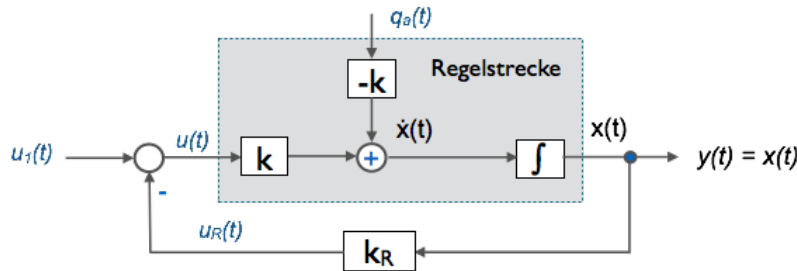


Frage 6.5.1: Wie lautet das Zustandsmodell (a, b, c, d) mit den Werten aus Aufgabe 6.3? Ist das System steuerbar? Ist das System beobachtbar?

Frage 6.5.2: Ermitteln Sie aus dem Zustandsmodell die Übertragungsfunktion.

Frage 6.5.3: Ergänzen Sie das Diagramm um einen Regler mit Zustandsrückführung.

Lösung:



Frage 6.5.4: Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion der geregelten Strecke. Wie hat sich die Übertragungsfunktion gegenüber der unregulierten Strecke geändert? Wie äußern sich diese Unterschiede im Zeitverhalten? Welche Unterschiede bestehen zum P-Regler?

Frage 6.5.5: Simulieren Sie die geregelte Strecke. Untersuchen Sie das Führungsverhalten. Welchen Einfluss hat die Reglerkonstante k_R ?

Frage 6.5.6: Welchen Einfluss hat die Störgröße $q_a(t)$ auf die bleibenden Regelgröße? Kann die Zustandsrückführung bzw. ein ein P-Regler eine sprungförmige Störung ausregeln?

Frage 6.5.7: Nach dem Verfahren aus Abschnitt 4.1 des Manuskripts und Anhang E lässt sich abhängig von den Gewichtungsmatrizen Q und R ein Minimum der Gütefunktion J für den Regelkreis mit den Reglerparametern k^T finden. Testen Sie diese Auslegung des Reglers für das skalare Zustandsmodell (a, b) der Strecke. Hinweis: der MATLAB Befehl lautet $k = \text{lqr}(a, b, q, r)$. Die Gewichtungsfaktoren q und r werden willkürlich vorgegeben, z.B. $q = r = 1$. Bewerten Sie diese Reglerauslegung mit Hilfe Ihrer Simulation.

Frage 6.5.8: Berechnen Sie die Polstellen der Übertragungsfunktion des Regelkreises.

6.6. Tempomat

Die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs soll unabhängig vom Gelände auf einen vorgegebenen Wert geregelt werden. Folgende Abbildung zeigt die Regelstrecke.

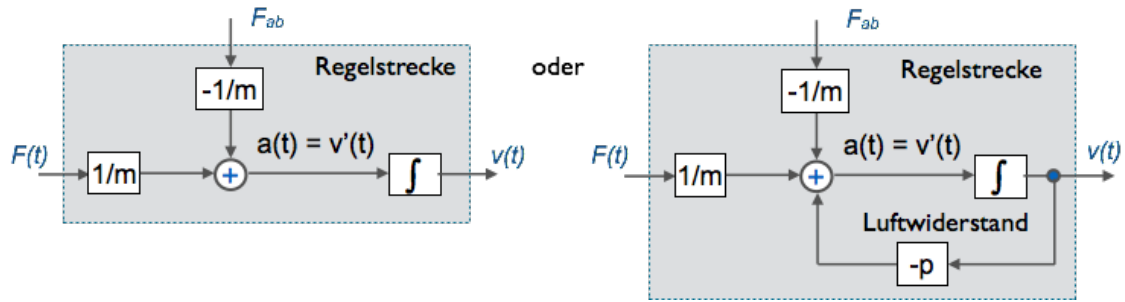


Das Fahrzeug mit der Masse m bewegt sich durch die Motorkraft F vorwärts. Der Einfluss des Geländes wird durch die Störgröße F_{ab} berücksichtigt (Hangabtriebskraft).

Frage 6.6.1: Erstellen Sie ein Modell der Regelstrecke mit der Geschwindigkeit v als Regelgröße.

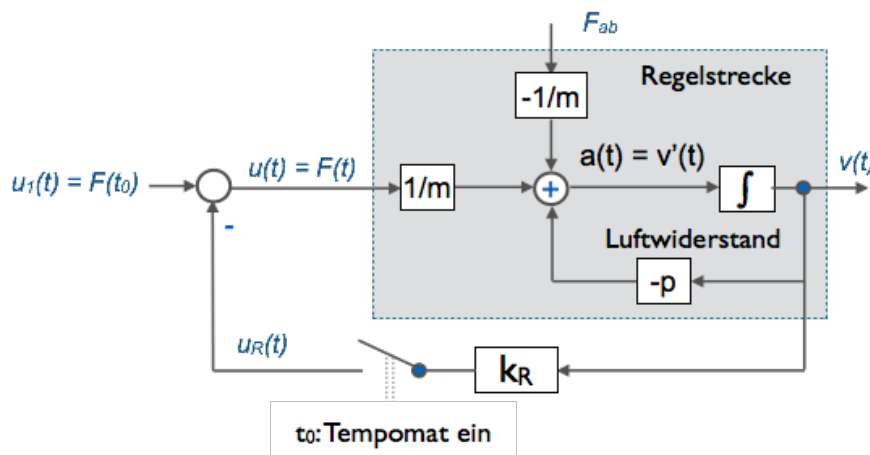
Frage 6.6.2: Der Sollwert soll durch den aktuellen Stellwinkel des Gaspedals bei Einschalten des Tempomats vorgegeben werden. Skizzieren Sie den Regelkreis.

Lösung zu 6.6.1:



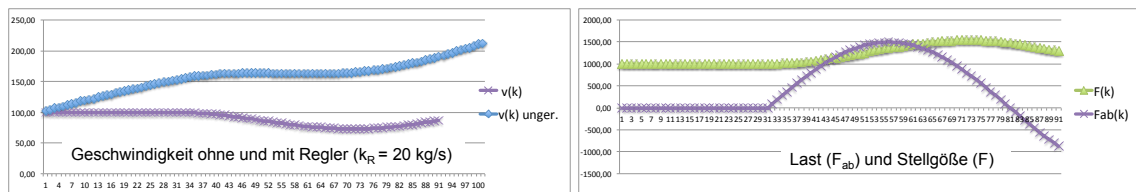
Frage 6.6.3: Wählen Sie einen Regler. Ermitteln Sie geeignete Reglereinstellungen durch Simulation.

Beispiel:

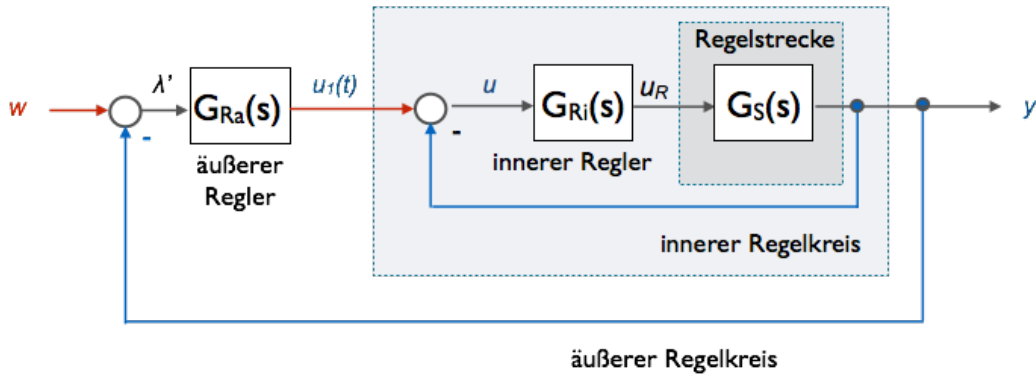


Frage 6.6.4: Wie schätzen Sie die Eigenschaften Ihres Reglers ein? Ist ein P-Regler bzw. eine einfache Rückführung des Zustands (P-Regler Variante) ausreichend?

Beispiel:



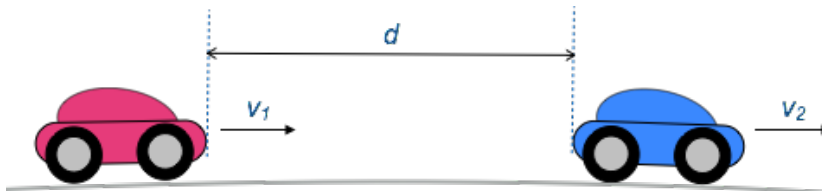
Frage 6.6.5: Kaskadenregelung. In folgender Abbildung wurde der innere Regelkreis um einen äußeren Regelkreis ergänzt. Wie lautet die Übertragungsfunktion dieser Kaskade?



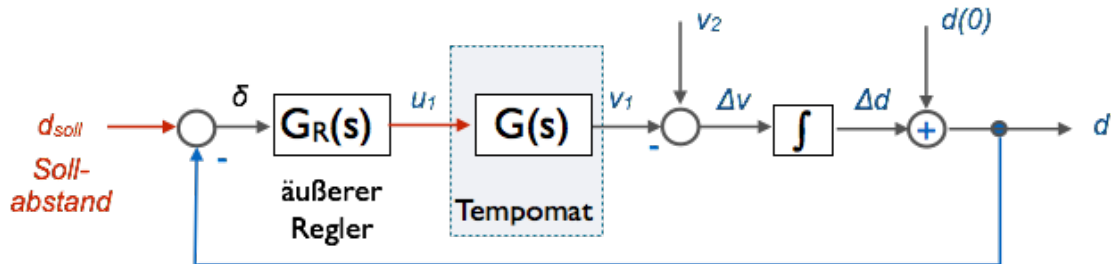
Frage 6.6.6: Kaskadenregelung. Der innere Regler sei als P-Regler ausgeführt, der äußere Regler als I-Regler. Wie lautet die Übertragungsfunktion insgesamt? Vergleichen Sie diese Kaskade mit einem PI-Regler in der inneren Schleife ohne äußeren Regelkreis. Welche Unterschiede ergeben sich im Regelverhalten?

6.7. Abstandsregelung für Fahrzeuge

Der Tempomat aus Aufgabe 6.6 soll durch einen äußeren Regelkreis um eine Abstandsregelung erweitert werden. Ziel ist die Einhaltung eines vorgegebenen Abstandes d_{soll} zum vorausfahrenden Fahrzeug in der Kolonne. Hierzu wird im eigenen Fahrzeug 1 der Abstand d zum vorausfahrenden Fahrzeug gemessen, sowie dessen Geschwindigkeit v_2 (bzw. die Geschwindigkeitsdifferenz Δv). Der Abstand soll auf einen Sollwert d_{soll} geführt und gehalten werden. Die durch das Gelände bedingte Hangabtriebskraft wird als Störgröße innerhalb der Geschwindigkeitsregelung (Tempomat) berücksichtigt.



Folgende Abbildung zeigt die Struktur der Regelung.



Frage 6.7.1: Erläutern Sie das Funktionsprinzip der Regelung.

Frage 6.7.2: Reglerentwurf. Entwerfen Sie den Regler für den Abstandsassistenten (Einhaltung des Abstandes zum nächsten Fahrzeug in der Kolonne). Hinweis: Verwenden Sie für den inneren Regelkreis (Tempomat) Ihren Geschwindigkeitsregler aus Aufgabe 6.6.

Frage 6.7.3: Simulation. Simulieren Sie Ihre Regelung und stellen Sie die Regler geeignet ein.

Frage 6.7.4: Diskussion: Besitzt die Kaskadenregelung Vorteile gegenüber einem einzigen Regelkreis? Begründen Sie Ihre Aussagen.

6.8. Linear-quadratisch optimale Regler (LQ-Regler)

Der Regler für den Tempomat aus Aufgabe 6.6 soll als linear-quadratisch optimaler Regler eingestellt werden. Das System ist durch die Zustandsgleichungen beschrieben:

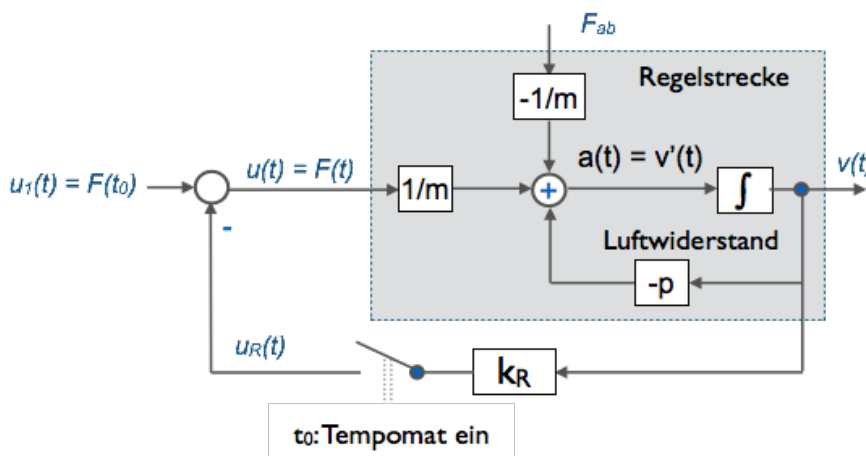
$$\dot{x}(t) = a x(t) + b u(t) \tag{6.8.1}$$

$$y(t) = c x(t) \tag{6.8.2}$$

Zur Auslegung der Reglerkonstante wird folgende Kostenfunktion angenommen:

$$J = \int q x^2(t) dt + \int r u^2(t) dt \quad \text{wobei } t = 0 \text{ bis } \infty \tag{6.8.3}$$

Hierbei sind q und r Gewichtungsfaktoren für die Zustandsgröße x(t) bzw für die Stellgröße u(t). Die Kostenfunktion enthält die Quadrate von x(t) und u(t). Gesucht ist das Minimum der Kostenfunktion in Abhängigkeit der Reglerkonstante k_R.



Frage 6.8.1: Wie lautet das Zustandsmodell der Regelstrecke?

Frage 6.8.2: Es sei angenommen, dass u₁(t) = 0 und somit u(t) = u_R(t) = -k_R x(t). Wie lautet hiermit die Zustandsgleichung (6.8.1)? Wie lautet die Lösung x(t) dieser Zustandsgleichung?

Lösung: Zustandsgleichung: $\dot{x}(t) = (a - b k_R) x(t)$; Lösungsansatz: $x(t) = x_0 e^{(a - b k_R) t}$

Frage 6.8.3: Setzen Sie den Lösungsansatz in die Kostenfunktion (6.8.1) ein und ermitteln Sie das Minimum von J in Abhängigkeit von k_R. Testen Sie den Reglerentwurf in Ihrer Simulation aus Aufgabe 6.6. Was ist durch diesen Ansatz wirklich optimiert worden? Stellen Sie die Annahmen von 6.8.2 in Ihrer Simulation nach.

Lösung: $J = \int q x^2(t) dt + \int r u^2(t) dt = \int (q + r k_R^2) x^2(t) dt$

Einsetzen von x(t) ergibt

$$J = \int (q + r k_R^2) x_0^2 e^{2(a - b k_R) t} dt = (q + r k_R^2) x_0^2 \int e^{2(a - b k_R) t} dt$$

$$J = \frac{(q + r k_R^2) x_0^2}{2 (a - b k_R)} e^{2(a - b k_R) t} \Big|_0^\infty$$

Für (a - b k_R) < 0 ergibt sich also

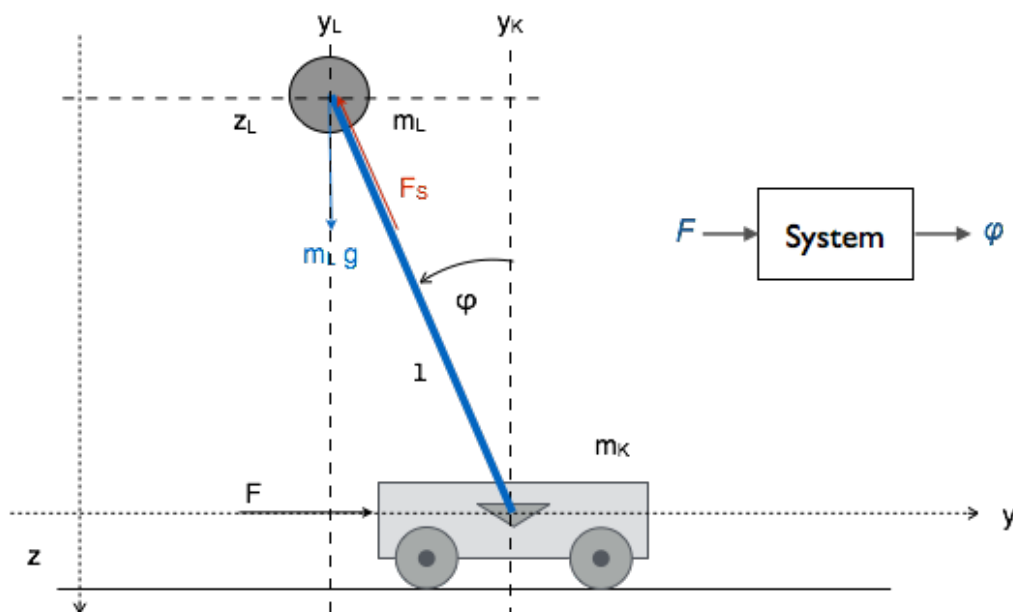
$$J = - (q + r k_R^2) x_0^2 / 2(a - b k_R)$$

Gesucht ist nun das Minimum von $J(k_R)$. Im Minimum gilt $\partial J/\partial k_R = 0$. Die Ableitung nach k_R ergibt eine quadratische Gleichung für das gesuchte Minimum k_R . MATLAB stellt hierfür eine spezielle Funktion bereit: $k = \text{lqr}(a, b, q, r)$.

Frage 6.8.4: Wie wäre die Kostenfunktion zu beschreiben für einen Zustandsmatrix A , einen Eingangsvektor b und einen Ausgangsvektor c^T ? Hinweis: Verwenden Sie Matrizenrechnung.

6.9. Inverses Pendel

Eine auf einem Fahrzeug an einer Stange befestigte Masse soll durch geeignete Bewegung des Fahrzeugs in der Balance gehalten werden. Die Stange ist so gelagert, dass Pendel und Fahrzeug sich nur in der Ebene (y, z) bewegen können. Als Eingangsgröße wird die Kraft F definiert. Ausgangsgröße ist der Winkel ϕ , der auf den Wert $\phi = 0$ stabilisiert werden soll. Folgenden Abbildung zeigt die Anordnung.



Frage 6.9.1: Erstellen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems im gegebenen Koordinatensystem in linearisierter Form.

Lösung: Es gelten die folgenden Bewegungsgleichungen (siehe Aufgabe 6.1):

$$m_K \ddot{y}_K(t) - F_S \sin\phi(t) = F(t) \quad (1)$$

$$m_L \ddot{y}_L(t) + F_S \sin\phi(t) = 0 \quad (2)$$

$$m_L \ddot{z}_L(t) + F_S \cos\phi = m_L g \quad (3)$$

In den gewählten Koordinaten entsprechen die Bewegungsgleichungen denen aus Aufgabe 6.1. Aus der Geometrie ergibt sich jedoch nun:

$$y_L = y_K - l \sin\phi \quad (4)$$

$$z_L = -l \cos\phi \quad (5)$$

Mit Hilfe von (4) und (5) lassen sich y_L und z_L in (2) und (3) eliminieren. Zweimaliges Ableiten von (4) und (5) ergibt:

$$\dot{y}_L = \dot{y}_K - l \cos\phi \dot{\phi}'$$

$$\ddot{y}_L = \ddot{y}_K + l \sin\phi (\phi')^2 - l \cos\phi \phi'' \quad (4')$$

$$z'_L = l \sin\phi \phi'$$

$$z''_L = l \cos\phi (\phi')^2 + l \sin\phi \phi'' \quad (5')$$

Einsetzen von (4') und (5') in (2) und (3) ergibt:

$$m_L (\ddot{y}_K + l \sin\phi (\phi')^2 - l \cos\phi \phi'') + F_S \sin\phi = 0 \quad (2')$$

$$m_L (l \cos\phi (\phi')^2 + l \sin\phi \phi'') + F_S \cos\phi = m_L g \quad (3')$$

Nach Multiplikation von (2') mit $\cos\phi$, Multiplikation von (3') mit $\sin\phi$ und anschließender Subtraktion (2') - (3') verbleiben:

$$\ddot{y}_K \cos\phi - l \phi'' = -g \sin\phi \quad (6)$$

Einsetzen von $F_S \sin\phi$ aus (2') in (1) ergibt:

$$m_K \ddot{y}_K + m_L \ddot{y}_K + m_L l \sin\phi (\phi')^2 - m_L l \cos\phi \phi'' = F(t) \quad (7)$$

Da kleine Winkel ϕ vorausgesetzt waren, werden folgende Ausdrücke vereinfacht:

$$\cos\phi \approx 1; \quad \sin\phi \approx \phi; \quad \phi (\phi')^2 \approx 0;$$

Es verbleiben folgende Systemgleichungen aus (6) und (7):

$$\ddot{y}_K - l \phi'' = -g \phi \quad (6.9.1)$$

$$(m_K + m_L) \ddot{y}_K - m_L l \phi'' = F(t) \quad (6.9.2)$$

Frage 6.9.2: Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion.

Lösung: Durch Transformation in den Bildbereich erhält man

$$s^2 Y_K(s) - s^2 l \Phi(s) = -g \Phi(s) \quad (6.9.1')$$

$$s^2 (m_K + m_L) Y_K(s) - s^2 m_L l \Phi(s) = F(s) \quad (6.9.2')$$

Umformen von (6.9.1') nach Y_K und einsetzen in (6.9.2') ergibt:

$$m_K l s^2 \Phi(s) - g (m_L + m_K) \Phi(s) = F(s)$$

Hieraus folgt für die Ausgangsgröße $\Phi(s)$:

$$G(s) = \Phi(s)/F(s) = 1 / (s^2 m_K l - g (m_L + m_K))$$

Frage 6.9.3: Erstellen Sie die Zustandsgleichungen des Systems.

Lösung: Ausgangspunkt sind die Systemgleichungen (6.9.1) und (6.9.2).

$$\ddot{y}_K - l \phi'' = -g \phi \quad (6.9.1)$$

$$(m_K + m_L) \ddot{y}_K - m_L l \phi'' = \ddot{y}_K \quad (6.9.2)$$

Ein Nachteil dieser Darstellung sind die gemischten zweiten Ableitungen in beiden Gleichungen. Zur leichteren Verarbeitung werden die Gleichungen daher etwas verändert. Multiplikation mit $1/m_L$ von (6.9.2) ergibt:

$$(m_K/m_L + 1) \ddot{y}_K - l \phi'' = F(t) / m_L \quad (6.9.2)$$

Gleichung (6.9.1) von Gleichung (6.9.2) subtrahiert ergibt:

$$\begin{aligned}
 (m_K/m_L) \ddot{\gamma}_K &= g \phi + F(t) / m_L & | \quad m_L/m_K \\
 \ddot{\gamma}_K &= m_L g / m_K \phi + F(t) / m_K & (6.9.3)
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung (6.9.3) von (6.9.1) subtrahiert ergibt:

$$\begin{aligned}
 -l \phi'' &= -m_L g / m_K \phi - g \phi - F(t) / m_K & | \quad -1/l \\
 \phi'' &= (g/l)(1 + m_L/m_K) \phi + F(t) / l m_K & (6.9.4)
 \end{aligned}$$

Für das mit (6.9.3) und (6.9.4) vorliegende Differenzialgleichungssystem 2. Ordnung werden folgende Hilfsgrößen gewählt:

$$x_1(t) = \gamma_K(t); \quad x_2(t) = \dot{\gamma}_K(t); \quad x_3(t) = \phi(t); \quad x_4(t) = \phi'(t)$$

Man erhält folgendes DGL-System erster Ordnung:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (1)$$

$$\dot{x}_2(t) = m_L g / m_K x_3(t) + F(t) / m_K \quad (2)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t) \quad (3)$$

$$\dot{x}_4(t) = (g/l)(1 + m_L/m_K) x_3(t) + F(t) / l m_K \quad (4)$$

Die Ausgangsgröße $y(t)$ erhält man aus:

$$y(t) = \phi(t) = x_3(t) \quad (5)$$

Frage 6.9.4: Simulieren Sie das System. Testen Sie hier plausible Werte an für m_L , m_K und die Länge l . Untersuchen Sie das System auf Stabilität. Verwenden Sie hierzu die Lage der Pole aus der Übertragungsfunktion.

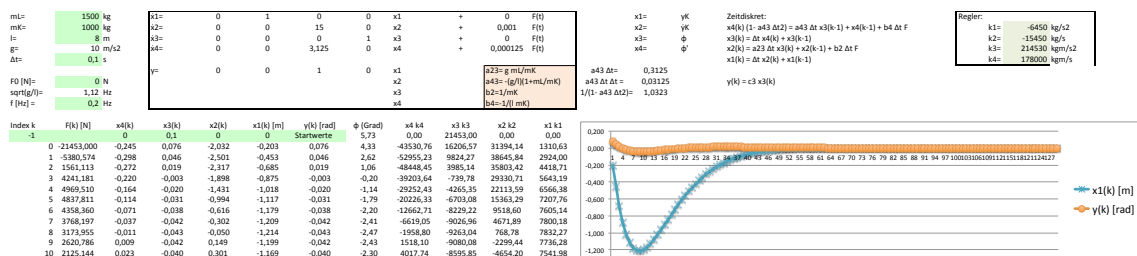
Beispiel: Mit $m_K = 1000$ kg, $m_L = 1500$ kg und $l = 8$ m erhält man als Zustandsmodell:

$$A = [0, 1, 0, 0; 0, 0, 15, 0; 0, 0, 0, 1; 0, 0, 3.125, 0]; \quad b = [0; 0.001; 0; 0.000125]; \quad c = [0, 0, 1, 0];$$

Simulationslauf: Eigenschwingung mit Initialwert $\phi_0 = 0,1$, $\Delta t = 0,1$ s: Das System ist instabil, das Pendel kippt um. Mit MATLAB ermittelt man aus dem Zustandsmodell (siehe Anhang): $sys = ss(A,b,c,d)$; $G=tf(sys)$ mit Ergebnis $G = 0.000125 / (s^2 - 3.125)$. Weiter durch $poles = pole(G)$ erhält man die beiden Pole $p_1 = 1.7678$ und $p_2 = -1.7678$.

Frage 6.9.5: Verwenden Sie einen Zustandsregler zur Stabilisierung des Systems. Testen Sie Ihre Reglerauslegung, indem Sie das gesamte System simulieren.

Beispiel:



Frage 6.9.6: In der Praxis wird zur Verschiebung des Fahrzeugs ein Motorantrieb verwendet, der die Kraft $F(t)$ z.B. mit Hilfe einer Spindel aus seinem Drehmoment erzeugt. Das System ist als Regelstrecke also zu ergänzen um den Motor (bzw. durch dessen Übertragungsfunktion). Die Regelung erfolgt durch einen digitalen Regler (Mikrocontroller) durch Messung des Drehwinkels ϕ . Verwenden Sie für den Motor eine Übertragungsfunktion der Form $G_M(s) = K_M / (1 + T_M s)$.

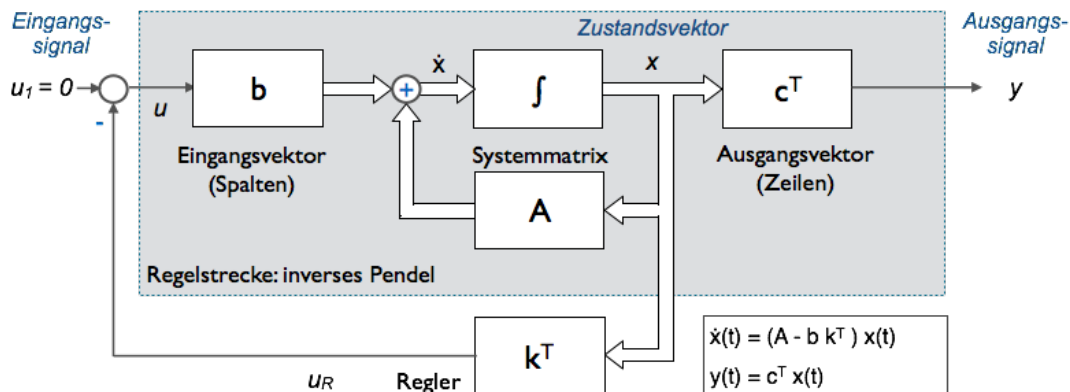
Wie lautet die Übertragungsfunktion der Strecke insgesamt? Skizzieren Sie den Signalfluss der gesamten Strecke mit Hilfe der Zustandsgleichungen und der Motorgleichung. Hinweis: Verwenden Sie hierzu Konstanten und Integrierer, wie in der Aufgabe 6.6 (Tempomat).

Frage 6.9.7: Untersuchen Sie das Gesamtsystem aus Aufgabe 6.9.6 auf Stabilität. Parametrisieren Sie hierzu die Regelstrecke inklusive Motor in geeigneter Weise.

Frage 6.9.8: Ergänzen Sie den Signalfluss aus Aufgabe 6.9.6 um den Zustandsregler. Stabilisieren Sie das System für die in Aufgabe 6.9.7 gewählten Parameter.

6.10. Beobachter für das inverse Pendel

In Aufgabe 6.10 wurde vorausgesetzt, dass alle Zustandsgrößen durch Messung zugänglich sind. Diese Voraussetzung ergibt sich dadurch, dass alle Zustandsgrößen $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ und $x_4(t)$ mit den Reglerkonstanten k_1 , k_2 , k_3 und k_4 multipliziert und dem Eingang zugeführt wurden. Folgende Abbildung zeigt die Anordnung.



Wie geht man vor, wenn nun aber nicht alle Zustandsgrößen gemessen werden können, bzw. der Aufwand hierfür zu hoch erscheint (Messung der Wagenposition, der Wagengeschwindigkeit, des Drehwinkels, sowie der Winkelgeschwindigkeit)? In diesem Fall kann man versuchen, Zustandsgrößen aus den gemessenen Eingangssignal und Ausgangssignal abzuleiten. Voraussetzung hierfür ist, dass das System beobachtbar ist, d.h. dass eine solche Ableitung der Zustandsgrößen aus dem Ausgangssignal bei gegebenem Eingangssignal möglich ist.

Frage 6.10.1: Skizzieren Sie den Signalfluss der Regelstrecke (ohne Motor, siehe Aufgabe 6.9.6).

Frage 6.10.2: Skizzieren Sie die allgemeine Struktur eines Beobachters für die Regelstrecke. Welche Größen liefert der Beobachter an den Regler? Welche Eingangsgrößen hat der Beobachter?

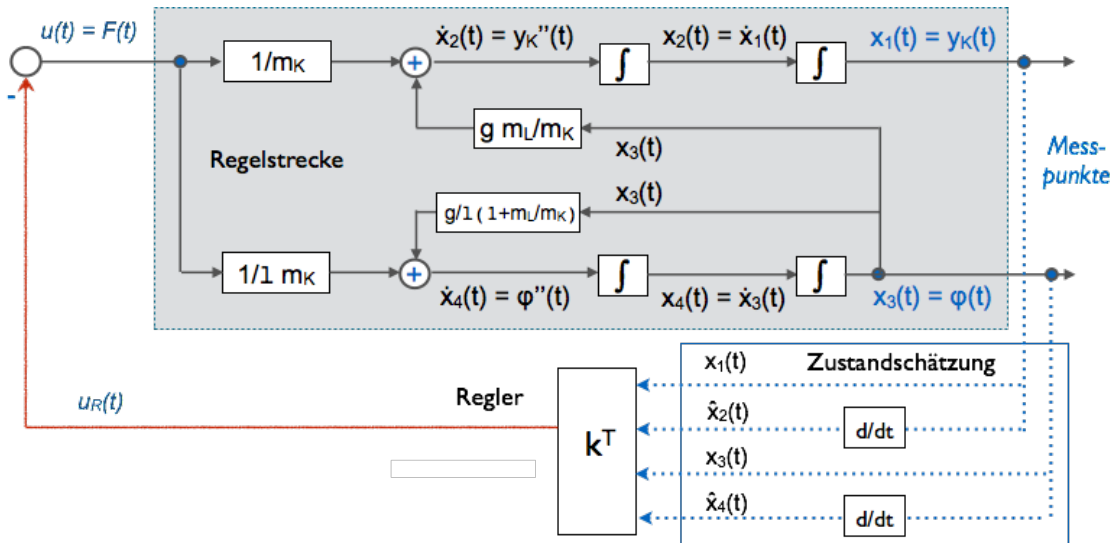
Frage 6.10.3: Parametrisieren Sie die Regelstrecke in geeigneter Weise. Prüfen Sie, ob das System beobachtbar ist. Ändern Sie das System ggf. mit Hilfe des Ausgangsvektors c , so dass es beobachtbar wird. Welche Zustände verwenden Sie im Ausgangsvektor?

Frage 6.10.4: Skizzieren Sie die genauere Struktur des Beobachters als Signalflusses.

Frage 6.10.5: Wie praktikabel halten Sie Ihre in Aufgabe 6.10.2 verwendete Ausgangsgröße zur Messung für eine Regelung? Worin besteht der größte Aufwand für eine Regelung durch einen Beobachter gemäß Aufgabe 6.10.4?

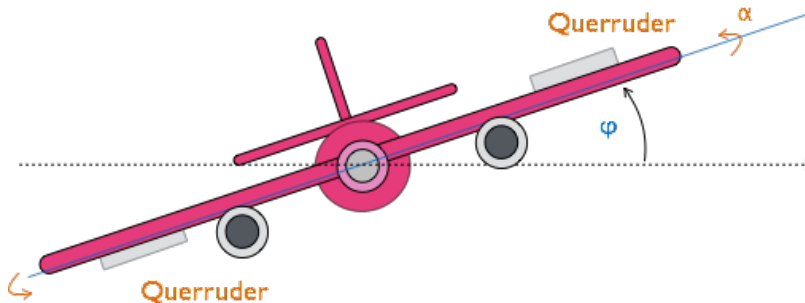
Frage 6.10.6: Skizzieren Sie eine vereinfachte Form der Zustandsschätzung, die für das gegebene Beispiel praktikabel ist. Weisen Sie die Funktionsfähigkeit Ihrer Lösung durch eine Simulation nach.

Beispiel:



6.11. Rollbewegung eines Flugzeugs

Die Rollbewegung bezeichnet die Neigung um die Querachse des Flugzeugs, d.h. die Bewegung um den Rollwinkel ϕ der Tragflächen zur Horizontalen, wie in folgender Abbildung gezeigt. Das Rollen wird kompensiert mit Hilfe der Querruder des Flugzeugs, die um die Winkel α bzw. $-\alpha$ zur den Tragflächen (in Flugrichtung) aufgestellt werden. Durch den Luftwiderstand ergibt sich ein Drehmoment entgegen der Rollbewegung.



Die Flugrichtung sei hierbei als x -Achse bezeichnet. Das Trägheitsmoment der Maschine in Flugrichtung sein J_x . Der Drehimpuls der Rollbewegung ist somit $L = J_x \omega$, wobei $\omega = d\phi/dt = \phi'$. Das durch die Stellung der Querruder um den Winkel α erzeugte Drehmoment beträgt (für kleine Winkel) $M = k \alpha$, wobei k eine maschinenspezifische Konstante ist. Dieses Drehmoment bewirkt eine Drehimpulsänderung, die der Rollbewegung entgegen wirken kann.

Frage 6.12.1: Erstellen Sie das physikalische Modell der Maschine bzgl. der Rollbewegung.

Frage 6.12.2: Definieren Sie das System als Regelstrecke mit der Stellgröße $\alpha(t)$ und der Ausgangsgröße (Regelgröße) $\phi(t)$. Beschreiben Sie das System als Zustandsmodell.

Lösung: Zustandsgrößen: $x_1(t) = \phi(t)$, $x_2(t) = \omega(t) = \phi'(t)$, Eingangsgröße $u(t) = \alpha(t)$, Ausgangsgröße $y(t) = \phi(t)$. Hieraus erhält man unter Berücksichtigung der Bewegungsgleichung für die Drehimpulsänderung $L' = J_x \omega'(t) = k \alpha(t)$:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = k/J_x u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

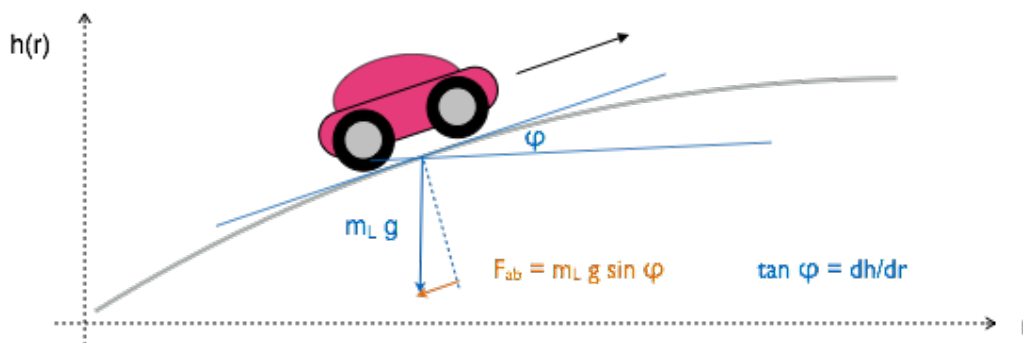
Hieraus folgt das Zustandsmodell $A=[0, 1; 0, 0]$, $b=[0; k/J_x]$, $c=[1, 0]$.

Frage 6.12.3: Simulieren Sie die Regelstrecke aus der letzten Frage. Ist das System steuerbar? Ist das System beobachtbar? Skizzieren Sie den Signalfluss der Strecke.

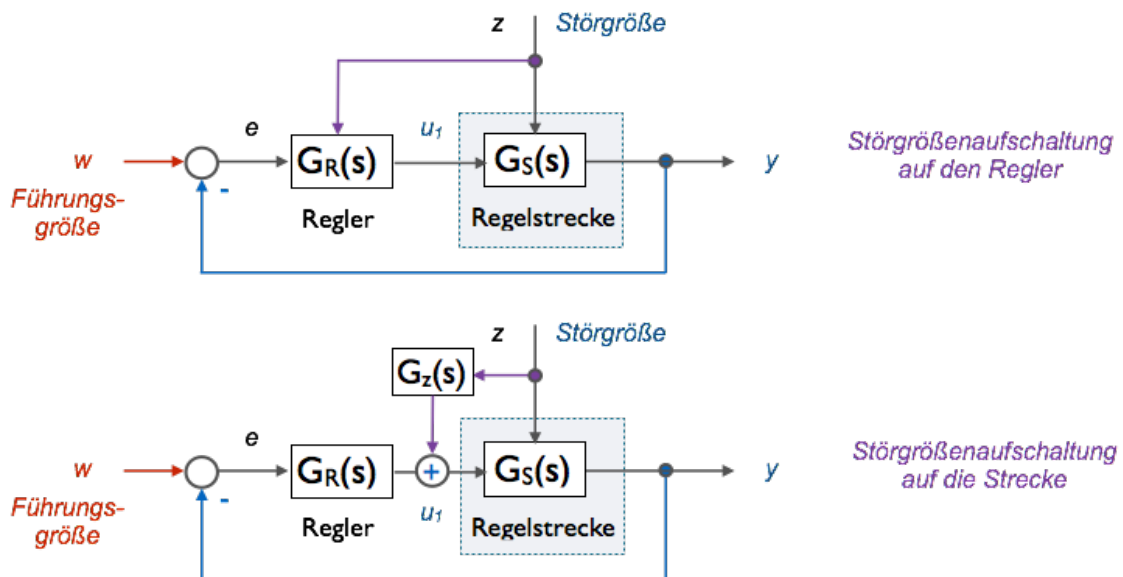
Frage 6.12.4: Entwerfen Sie einen Regler zur automatischen Stabilisierung der Rollbewegung (d.h. $\phi = 0$). Testen Sie Ihren Reglerentwurf mit Hilfe einer Simulation.

6.12. Störgrößenaufschaltung

Ist eine Störgröße messbar, kann sie unmittelbar als weiteres Eingangssignal in die Regelung einbezogen werden. Im Beispiel Tempomat lässt sich beispielsweise die Hangantriebskraft F_{ab} messen, sofern das Fahrzeug ein Navigationssystem besitzt. In diesem Fall ist das Höhenprofil in Fahrtrichtung bekannt. Hieraus folgt die Hangabtriebskraft F_{ab} , wie in folgender Abbildung gezeigt.



Für die Berücksichtigung der Störgröße gibt es die in folgender Abbildung gezeigten Ansätze.



Frage 6.13.1: Gehen Sie in Ihrer Implementierung des Tempomaten davon aus, dass ein Messwert der Hangabtriebskraft vorliegt. Berücksichtigen Sie diesen Messwert in Ihrem Regler in geeigneter Weise.

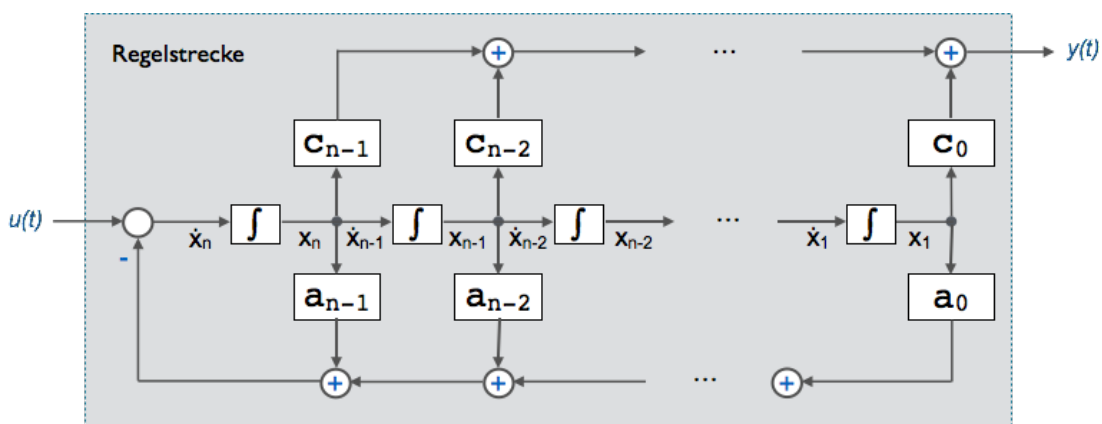
Frage 6.13.2: Gehen Sie in Ihrer Implementierung des Tempomaten davon aus, dass ein Messwert der Hangabtriebskraft vorliegt. Schalten Sie diesen Messwert in geeigneter Weise auf die Strecke auf.

Frage 6.13.3: Vergleichen Sie die Ergebnisse der Regelung ohne Berücksichtigung der Störgröße mit den Ergebnissen der Störgrößenaufschaltung aus den letzten beiden Aufgaben. Welche Unterschiede ergeben sich?

Frage 6.13.4: Welche Unterschiede gibt es in den beiden Ansätzen, die Störgröße auf den Regler bzw. auf die Strecke aufzuschalten. Sind diese Unterschiede eher konzeptionell, oder implementierungstechnisch?

6.13. Signalflüsse für Normalformen

Folgende Abbildung zeigt den Signalfluss eines Zustandsmodells.



Frage 6.13.1: Rekonstruieren Sie die Zustandsgleichungen aus diesem Modell.

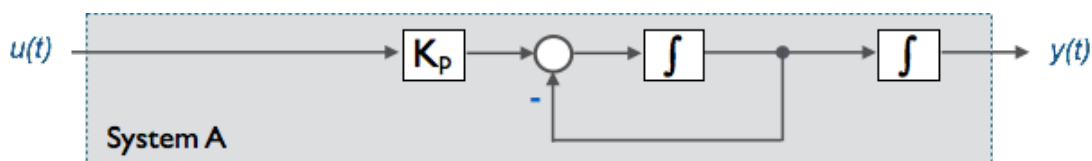
Frage 6.13.2: Welcher der Normalformen entspricht der Signalfluss aus der Abbildung?

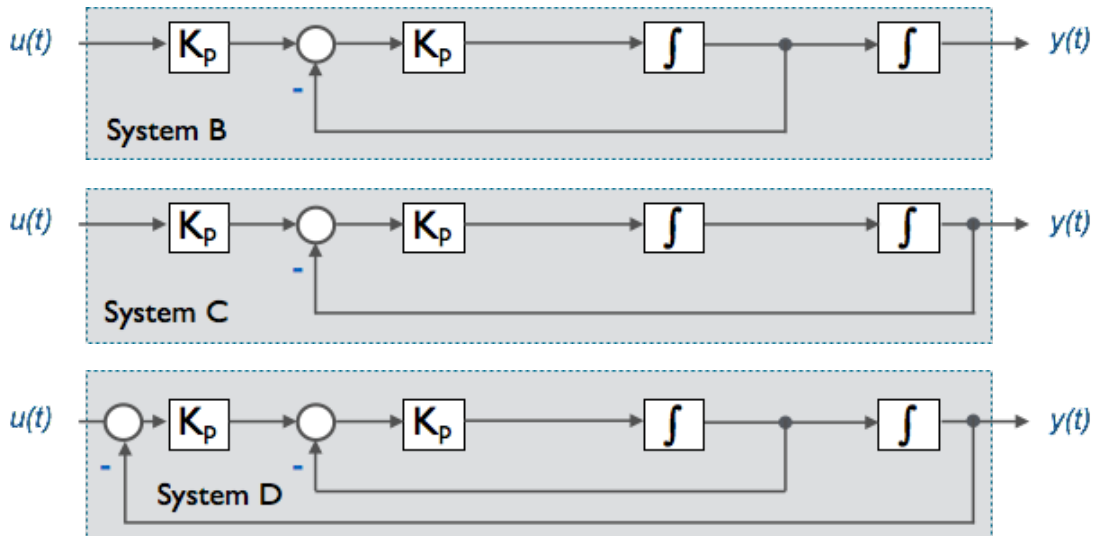
Frage 6.13.3: Skizzieren Sie den Signalfluss der Zustandsgleichungen in Diagonalform (Modalform). Welche spezielle Eigenschaft besitzt diese Darstellung?

Frage 6.13.4: Was bedeuten die Begriffe Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit? Wie lassen sich diese Eigenschaften an der Diagonalform unmittelbar ablesen?

6.14. Stabile und instabile Systeme

Folgende Abbildung zeigt Signalflüsse für Systeme, die aus P-Gliedern (mit proportionalem Verhalten) und I-Gliedern (Integrierern) aufgebaut sind. Ein P-Glied besitzt den Proportionalitätsfaktor K_P und somit die Übertragungsfunktion $G_P = K_P$. Jedes I-Glied besitzt die Übertragungsfunktion $G_I(s) = 1/s$.



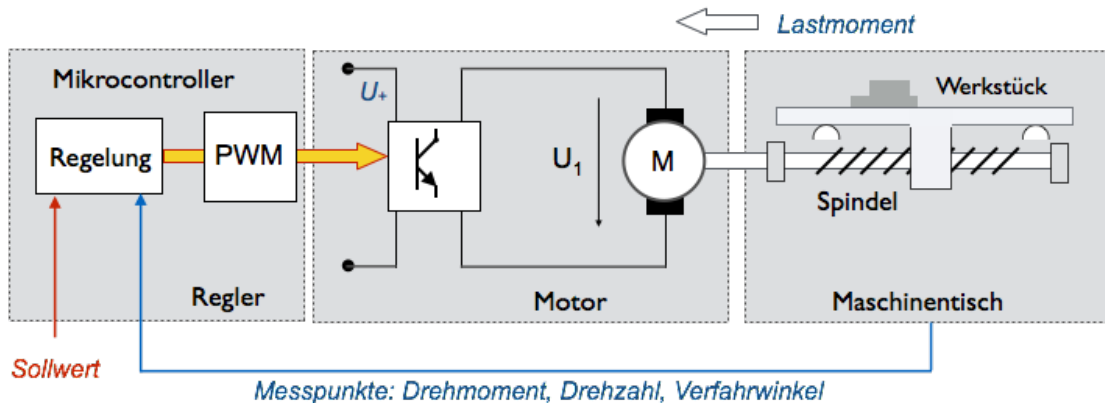


Frage 6.14.1: Berechnen Sie die Übertragungsfunktionen der gezeigten Systeme.

Frage 6.14.2: Es sei $K_P = 1$. Welche Systeme sind instabil?

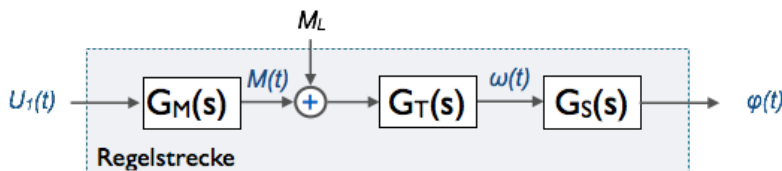
6.15. Lageregelung

Folgende Abbildung zeigt eine Maschine zur Bearbeitung eines Werkstücks. Die Lage des Werkstücks soll mit Hilfe einer Spindel durch den Verfahrwinkel eingestellt und geregelt werden.



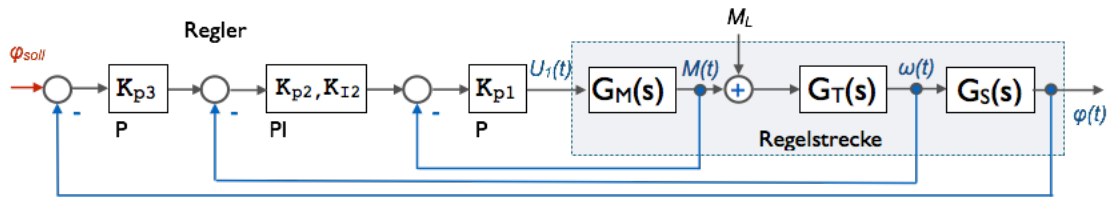
Frage 6.15.1: Skizzieren Sie den Aufbau der Strecke (Motor mit Drehmoment M , Maschinentisch und Spindel mit Drehzahl ω und Verfahrwinkel ϕ).

Lösung:



Frage 6.15.2: Ergänzen Sie den Aufbau der Strecke mit der Regelung. Beschreiben Sie die Wirkung der Regelung. Hinweise: Verwenden Sie folgende Messpunkte: (1) Drehmoment M , (2) Drehzahl ω , (3) Verfahrwinkel ϕ . Verwenden Sie einen P-Regler zur Regelung des Drehmoments, einen PI-Regler für die Winkelgeschwindigkeit, sowie einen P-Regler für den Verfahrwinkel.

Lösung:

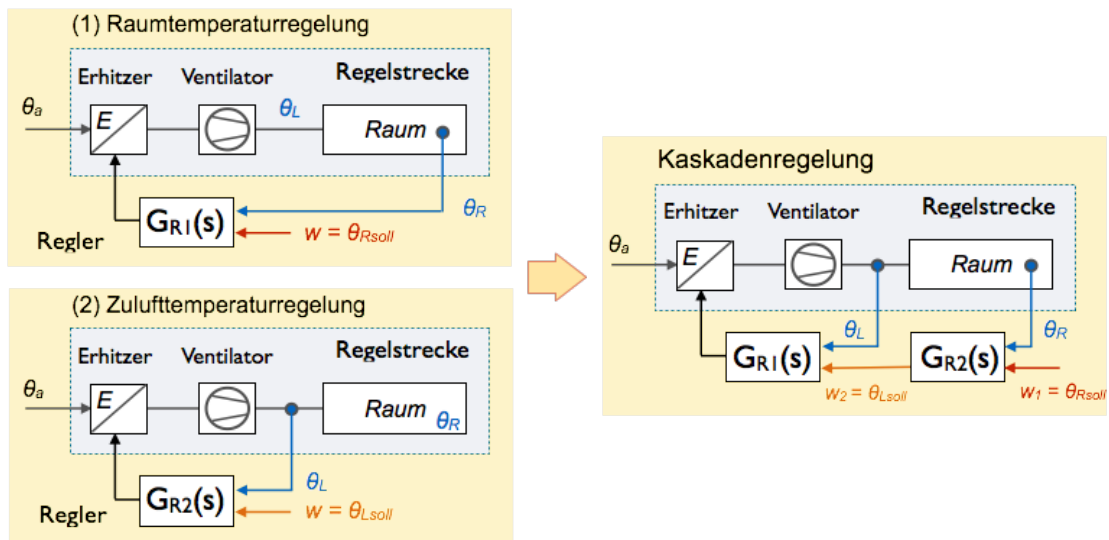


Frage 6.15.3: Für die Regelstrecke seien folgende Parameter angenommen: Motor $G_M(s) = 1 / (1 + 0,01 s)$, Maschinentisch $G_T(s) = 0,5 / (1 + 0,005 s)$, Spindel mit $G_S(s) = 0,2 / s$. Simulieren Sie die Strecke.

Frage 6.15.4: Entwerfen Sie den Regler. Simulieren Sie das System.

6.16. Kaskadenregelung: Luftheizungsanlage

Zur Heizung eines Raumes wird eine Luftheizungsanlage eingesetzt. Die Regelung soll in einer zweistufigen Kaskade aufgebaut werden: (1) Die Regelung der Raumtemperatur θ_R . Hierzu wird als Messpunkt ein Temperaturfühler im Raum eingesetzt. (2) Die Regelung der Zulufttemperatur θ_L . Hierzu wird als Messpunkt ein Temperaturfühler im Luftstrom der Zuluft eingesetzt. Folgende Abbildung zeigt den Aufbau des Regelkreises. Stellgröße ist der Ventilhub y des Mischers für den Lufterhitzer E , der die Wassertemperatur des Erhitzers einstellt und somit auf die Temperatur θ_L der Zuluft einwirkt. Störgröße für den Erhitzer und für den Raum ist die Aussentemperatur θ_a der Luft.



Frage 6.16.1: Skizzieren Sie die Struktur des Regelkreises. Verwenden Sie hierzu geeignete Übertragungsfunktionen für den Erhitzer sowie für den Raum.

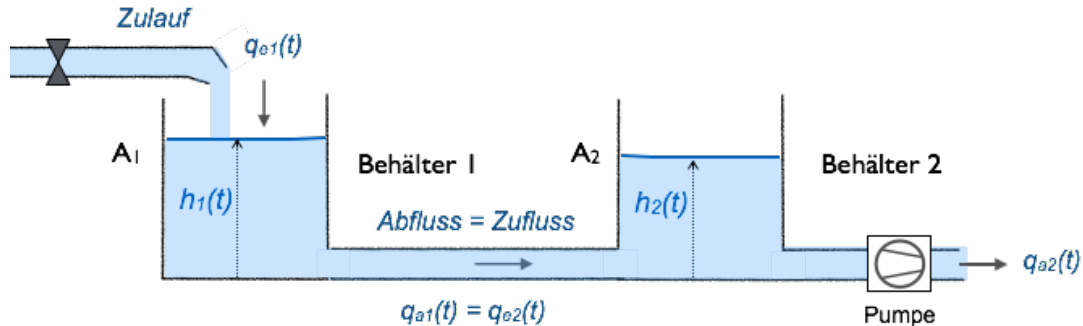
Frage 6.16.2: Simulieren Sie die Regelstrecke. Parametrisieren Sie hierzu die Übertragungsfunktionen in geeigneter Weise.

Frage 6.16.3: Entwerfen Sie die Regler für die Kaskadenregelung. Testen Sie die Funktionsfähigkeit der Regelung in einer Simulation.

Frage 6.16.4: Totzeiten. Die Rohrleitungen im Erhitzer sowie zur Zufuhr der Luft in den Raum sind mit Verzögerungen (sogenannten Totzeiten) verbunden. Welchen Einfluss haben diese Verzögerungen auf die Regelung? Ergänzen Sie Ihre Simulation um die Totzeiten.

6.17. Mehrgrößenregelung (Zwei-Behälter-System)

Folgende Abbildung zeigt zwei miteinander verbundene Gefäße. Der Abfluss des ersten Behälters funktioniert als Zulauf des zweiten Behälters. Die Behälter haben den Flächen A_1 und A_2 .



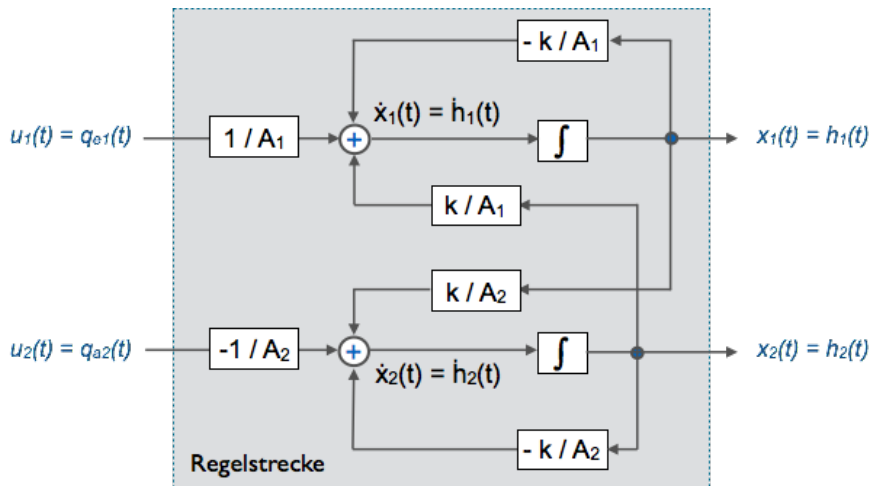
Frage 6.17.1: Erstellen Sie ein physikalisches Modell der Anordnung. Hinweis: Nehmen Sie an, dass die zwischen den Behältern fließende Menge proportional zur Druckdifferenz ist und somit proportional zur Differenz der Füllstände, d.h. $q_{a1}(t) = q_{e2}(t) = k (h_1(t) - h_2(t))$.

Frage 6.17.2: Definieren Sie die Regelstrecke als System wie folgt (Skizze): Regelgrößen seien die beiden Füllstände $h_1(t)$ und $h_2(t)$. Stellgrößen seien der Zulauf $q_{e1}(t)$ sowie der Ablauf $q_{a2}(t)$.

Frage 6.17.3: Beschreiben Sie das System mit Hilfe der Zustandsgleichungen.

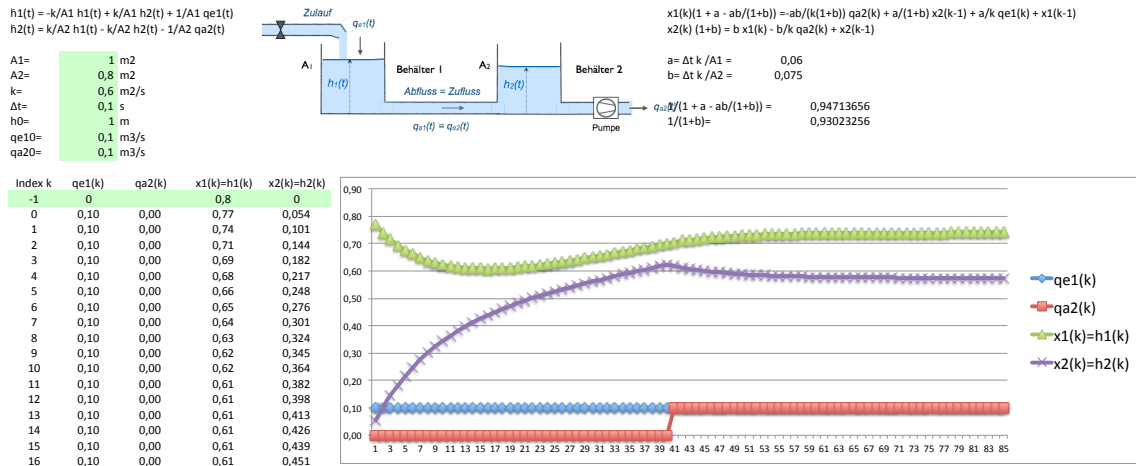
Frage 6.17.4: Skizzieren Sie den Signalfluss des Systems.

Lösung:



Frage 6.17.5: Parametrisieren Sie das System in geeigneter Weise. Simulieren Sie das System.

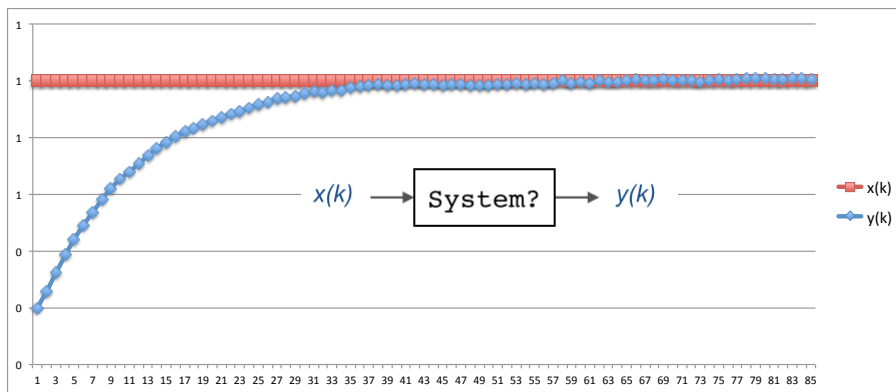
Beispiel:



Frage 6.17.6: Skizzieren Sie einen Regler mit Hilfe der Zustandsrückführung. Worin bestehen die Unterschiede zu einem Eingrößensystem (d.h. skalare Stellgröße und skalare Regelgröße)?

6.18. Schätzung der Systemparameter

Von einem System ist die Sprungantwort gemessen worden, wie in folgender Abbildung gezeigt.



Aus den Messwerten soll nun ein zeitdiskretes Systemmodell geschätzt werden. Für das Modell werden folgende Varianten untersucht:

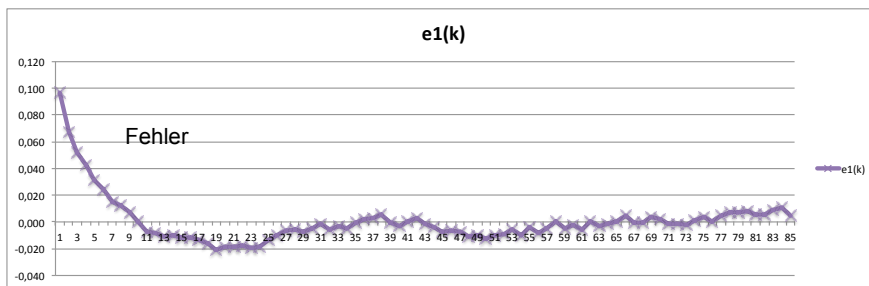
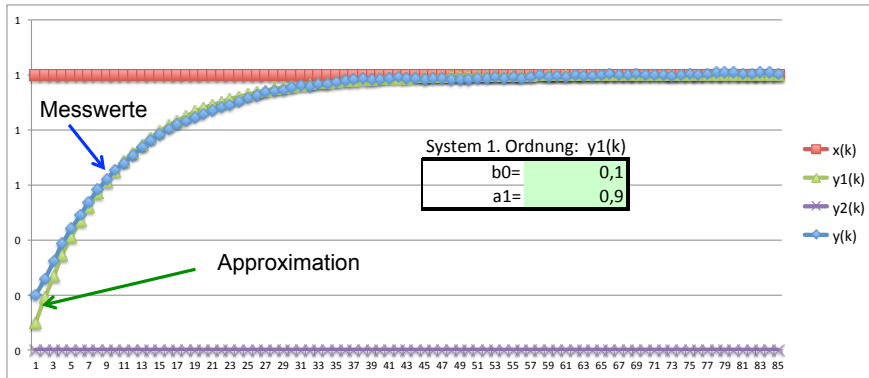
System 1. Ordnung: $y(k) = a_1 y(k-1) + b_0 x(k)$ (6.18.1)

System 2. Ordnung: $y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_0 x(k) + b_1 x(k-1)$ (6.18.2)

Die Systemparameter (a_1, b_0) bzw. (a_1, a_2, b_0, b_1) sind durch Schätzung zu ermitteln, so dass der gemessene Verlauf der Sprungantwort möglichst gut approximiert wird.

Frage 6.18.1: Approximieren Sie den gemessenen Verlauf mit Hilfe eines Systems 1. Ordnung durch Probieren (d.h. ermitteln Sie die Parameter (a_1, b_0)). Hinweis: Verwenden Sie folgendes [Arbeitsblatt einer Tabellenkalkulation](#) für die Messwerte, die Approximation und die Fehler.

Muster:

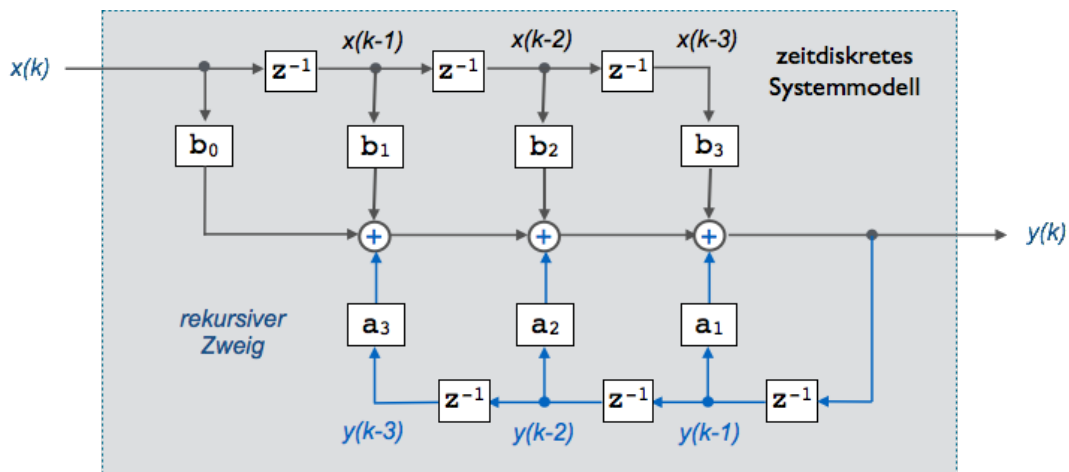


Frage 6.18.2: Skizzieren Sie den Signalfuss des Systems 1. Ordnung gemäß Gleichung (6.18.1). Hinweis: Verwenden Sie als Symbol für die zeitliche Verzögerung um ein Abtastintervall einen Block mit der Bezeichnung Δt , bzw. mit der Bezeichnung z^{-1} (für $1/z$, vergleichbar mit dem Integrator $1/s$ im zeitkontinuierlichen Fall).

Frage 6.18.3: Approximieren Sie den gemessenen Verlauf mit Hilfe eines Systems 2. Ordnung durch Probieren (d.h. ermitteln Sie die Parameter (a_1, a_2, b_0, b_1)). Hinweis: Verwenden Sie folgendes [Arbeitsblatt einer Tabellenkalkulation](#) für die Messwerte, die Approximation und die Fehler.

Frage 6.18.4: Skizzieren Sie den Signalfuss des Systems 2. Ordnung gemäß Gleichung (6.18.2).

Muster:

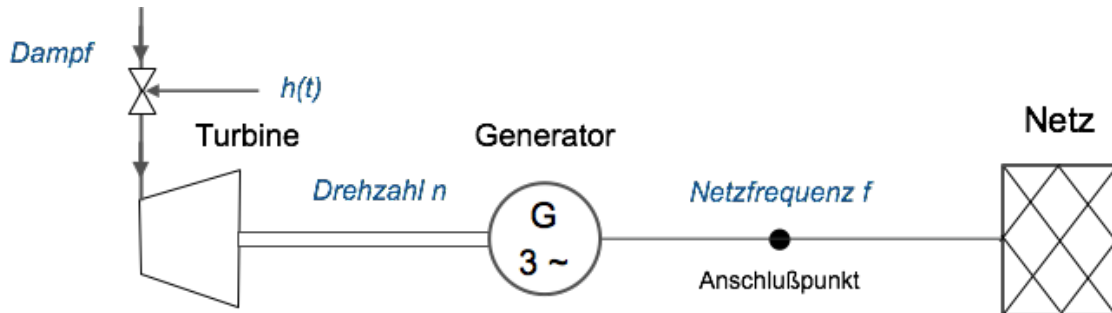


Frage 6.18.5: Für zeitdiskrete Systeme lassen sich ebenfalls Übertragungsfunktionen definieren. Statt der Laplace-Transformation verwendet man hierfür die sogenannte Z-Transformation. Wie lauten die Übertragungsfunktionen für die beiden Systeme? Hinweis: Verwenden Sie die Schreibweise aus Abschnitt 4.3 des vorliegenden Manuskripts.

Frage 6.18.6: Verwenden Sie zur Schätzung der Systemparameter das Kalman Filter aus Anhang F.

6.19. Frequenzregelung für Stromnetze (Primärregelung)

Im elektrischen Energieversorgungsnetz arbeitet ein Generator am Netz, wie in der folgenden Abbildung gezeigt. Der Generator wird von der Turbine getrieben und ist auf einen Arbeitspunkt $P_{\text{mech}} = M_T \omega$ eingestellt. Hierbei bezeichnet M_T das Antriebsmoment der Turbine. Der Generator transformiert die mechanische Leistung P_{mech} in elektrische Leistung P_{el} , die ins Netz gespeist wird. Die Drehzahl des Generators ist synchron zur Netzfrequenz.

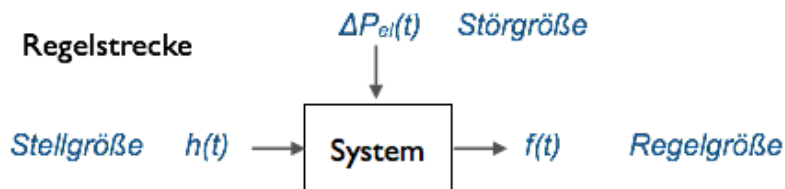


Frage 6.19.1: Physikalisches Modell. Erstellen Sie ein physikalisches Modell der Strecke Turbine und Generator. Verwenden Sie hierzu folgende Beziehungen: (1) Bei Änderungen der Turbinenleistung $P_T(t)$ durch die Dampfmenge $h(t)$ gibt es einen Speichereffekt durch den Dampf in der Turbine, d.h. es gilt $\dot{P}_T(t) = K_T h(t) - P_T(t)/T_T$. (2) Die Turbinenleistung $P_T(t)$ erzeugt ein Antriebsmoment $M_T(t) = P_T(t)/\omega_0$ am Generator. Dieses Moment wird für ein Lastmoment M_L verwendet, das der elektrischen Leistung entspricht, sowie für die Drehimpulsänderung des Rotors $M_R = J_R d\omega/dt$. Der Wirkungsgrad des Generators ist so hoch, dass Verluste vernachlässigt werden können. Mit ω_0 ist der Sollwert der Netzfrequenz bezeichnet ($\omega_0 = 2\pi f_0$). Die Netzfrequenz $f = \omega / 2\pi$ ist um die Polpaarzahl p des Generators proportional zur Drehzahl des Generators, d.h. $f = p n$.

Lösung: (1) $\dot{P}_T(t) = K_T h(t) - P_T(t) / T_T$
 (2) $M_T(t) = P_T(t) / \omega_0 = M_L + J_R d\omega/dt$

Frage 6.19.2: Systemdefinition. Definieren Sie den Generator-Turbinensatz als Regelstrecke. Als Störgröße sollen Änderungen ΔP der elektrischen Leistung im Netz um den Arbeitspunkt P_b des Generators betrachtet werden.

Lösung:



Frage 6.19.3: Systembeschreibung. Erstellen Sie ein Zustandsmodell der Regelstrecke. Wie reagiert die Strecke auf Lastschwankungen ΔP ? Simulieren Sie die Strecke mit plausiblen Parametern.

Lösung: Zustandsgrößen: $x_1(t) = P_T(t)$, $x_2(t) = \omega(t)$. Eingangsgröße (Stellgröße): $u(t) = h(t)$ (Ventilhub zur Einstellung der Dampfmenge), Ausgangsgröße (Regelgröße): $f(t) = \omega(t) / 2\pi$ (Netzfrequenz). Hiermit ergeben sich:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= K_T u(t) - x_1(t)/T_T & (6.19.1) \\ x_1(t) / \omega_0 &= M_L + J_R \dot{x}_2(t) \end{aligned}$$

umgeformt nach $\dot{x}_2(t)$:

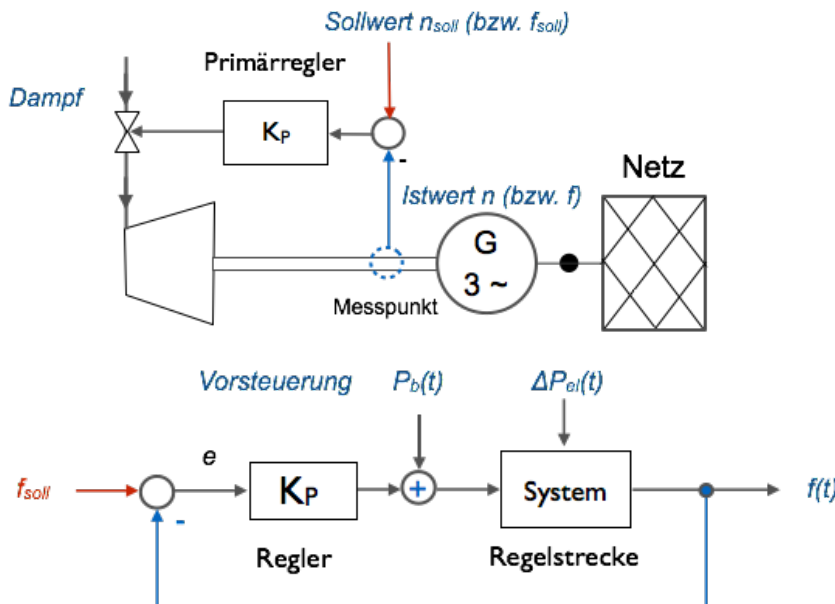
$$\dot{x}_2(t) = (1/\omega_0 J_R) x_1(t) - (M_L/J_R) \quad (6.16.2)$$

$$y(t) = x_2(t) / 2\pi \quad (6.19.3)$$

Störverhalten: Lastschwankungen ΔP bedeuten Änderungen des Lastmoments ΔM . Da die Antriebsleistung konstant bleibt, gilt $M_T \omega_1 = (M_T + \Delta M) \omega_2$. Bei positivem Lastsprung (mehr Leistung) verringert sich die Drehzahl der Maschine. Bei negativem Lastsprung (weniger Leistung) erhöht sich die Drehzahl der Maschine. Sofern im Netz keine weiteren Generatoren arbeiten, folgt die Netzfrequenz der Drehzahl der Maschine.

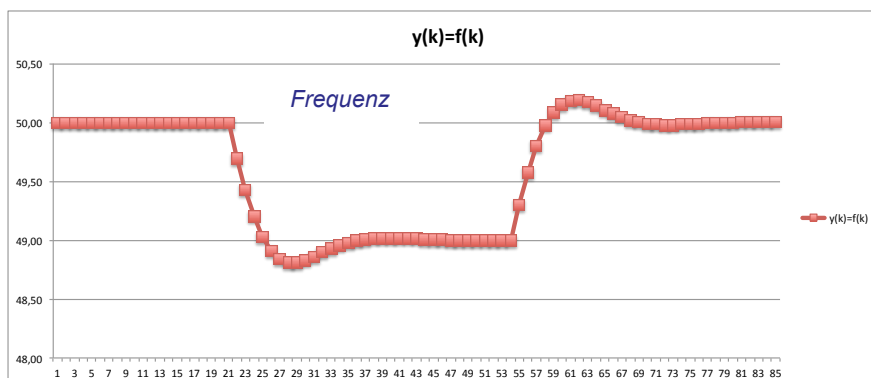
$$\dot{x}_2(t) = (1/\omega_0 J_R) x_1(t) - (M_L + \Delta P/\omega_0)/J_R \quad (6.16.2) \text{ mit Störgröße } \Delta M = \Delta P/\omega_0$$

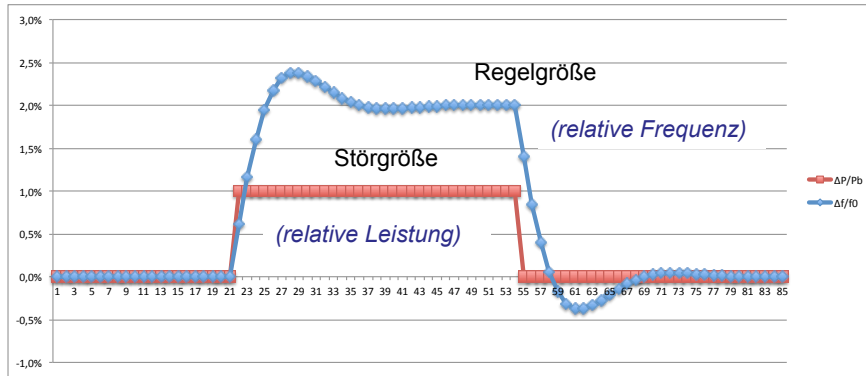
Frage 6.19.4: Reglerentwurf. Entwerfen Sie einen Regler nach folgendem Blockschaltbild. Hinweis: Der Regler soll nur Störungen (Abweichungen) um den Arbeitspunkt P_b ausregeln. Die Einstellung auf diesen Arbeitspunkt erfolgt daher mit Hilfe einer Vorsteuerung. Simulieren Sie das System mit und ohne Regler.



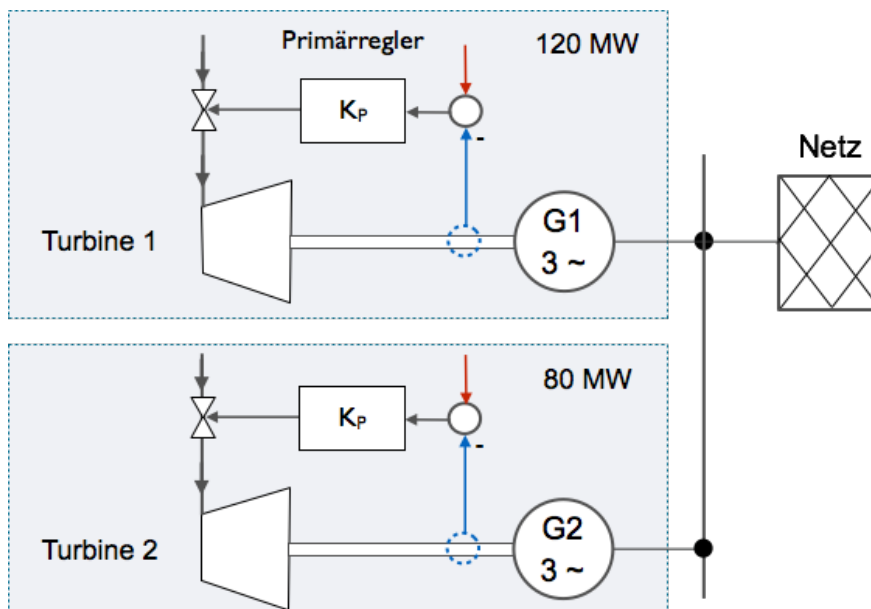
Frage 6.19.5: Verhalten im unregulierten und geregelten Fall. Für das stationäre Störverhalten wird folgende Kenngröße eingeführt: Die Statik: $S = \Delta f / f_0$ beschreibt die relative Frequenzabweichung bei einem vorgegebenen Lastabweichung ΔP . Welche Statik hat der Generator?

Beispiel zur Simulation: Statik = 2% bei Lastsprung von 1%





Frage 6.19.6: Netzverbund. Werden mehrere Generatoren im Verbund betrieben, so können sie sich gegenseitig beim Ausregeln von Lastschwankungen unterstützen. Betreiben Sie zwei Generatoren parallel und simulieren Sie die Regelung. Wie ändert sich die Statik insgesamt?



Lösung: Die Generatoren werden auf die Netzfrequenz einsynchronisiert. Im Modell teilen sich die Generatoren im Prinzip eine Antriebswelle. Es wirkt die kollektive Schwungmasse $J_R = J_{R1} + J_{R2}$.

$$\dot{x}_{11}(t) = K_{T1} u_1(t) - x_{11}(t)/T_{T1} \quad (6.19.11)$$

$$\dot{x}_{12}(t) = K_{T2} u_2(t) - x_{12}(t)/T_{T2} \quad (6.19.12)$$

$$\dot{x}_2(t) = (1/\omega_0 J_R) (x_{11}(t) + x_{12}(t)) - (M_L/J_R) \quad (6.16.2)$$

$$y(t) = x_2(t) / 2\pi \quad (6.19.3)$$

Die Statik verbessert sich insgesamt: Mit einem Generator vom $P_b = 120$ MW ergibt sich für $\Delta P = 1,2$ MW eine relative Frequenzänderung von $\Delta f/f_0 = 2\%$. Mit zwei Generatoren von insgesamt 200 MW ist für die gleiche Laständerung $\Delta P = 1,2$ MW die relative Frequenzänderung $\Delta f/f_0 = 1,2\%$ (bei gleicher Einstellung der Regler).

Der Arbeitspunkt der Generatoren P_{b1} und P_{b2} verschiebt sich während der Störung ΔP . Beide Generatoren leisten einen kollektiven Beitrag zur Kompensation der Lastabweichung. Die Schwungmasse der Generatoren stabilisiert die Regelung.

Frage 6.19.7: Erneuerbare Energien im Netz. Statt des zweiten Generators sollen 80 MW im Netz durch eine erneuerbare Energiequelle bereit gestellt werden. Diese Quelle speist durch Wechselrichter ein und ist nicht in die Primärregelung eingebunden. Wie ändert sich die Statik im Vergleich zum Betrieb zweier Generatoren in Aufgabe 6.19.6?

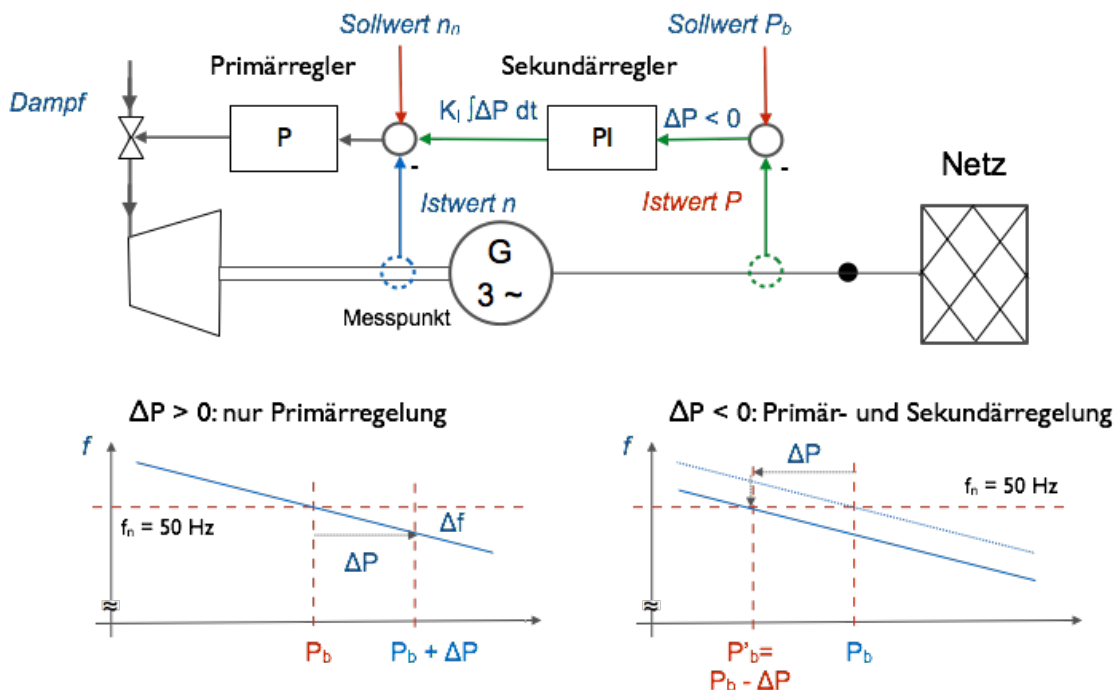
Lösung: Die Statik entspricht wieder der von Aufgabe 6.19.5. Da die erneuerbare Energiequelle keinen Beitrag zur Primärregelung leistet, führt jedoch bereits eine relativer Lastwechsel von $\Delta P/P_{ges} = 1,2 \text{ MW} / 200 \text{ MW} = 0,6\%$ zu der in Aufgabe 6.19.5 gezeigten Frequenzabweichung von $\Delta f/f_0 = 2\%$.

Frage 6.19.8: Veränderung der Arbeitspunkte. Durch die Primärregelung verschieben sich die Arbeitspunkte P_{b1} und P_{b2} beider Generatoren (siehe Aufgabe 6.19.6). Dieser kollektive Mechanismus ist zwar technisch sinnvoll zur Stabilisierung des Netzes, jedoch nicht fair zu den Erzeugern: Wenn Erzeuger 1 vom Plan abweicht, wird die Abweichung von allen Erzeugern gemeinsam getragen, d.h. die Brennstoffkosten und Betriebskosten trägt ebenfalls das Kollektiv. Wie könnte eine für alle Beteiligten faire Lösung aussehen?

6.20. Leistungsregelung für Stromnetze (Sekundärregelung)

Die sogenannte Sekundärregelung verschiebt bei einer Lastabweichung ΔP den Sollwert des Primärreglers. Hierdurch wird einerseits die Regelabweichung dauerhaft beseitigt. Andererseits erfolgt die Verschiebung des Sollwertes nur bei dem Erzeuger, der die Planabweichung verursacht hat.

Den Verursacher der Planabweichung kann man durch Messung aller Leistungsflüsse im Netz der jeweiligen Erzeuger ausfindig machen. Die Summe aller zu- und abfließenden Leistung sollte den Planwert P_b bei jedem Erzeuger ergeben. Weicht die Summe von diesem Wert ab, d.h. $P_{b2} = P_{b1} + \Delta P$, so muss der betreffende Erzeuger die Differenz auf eigene Kosten ausregeln. Bei einer negativen Differenz wird der Sollwert entsprechend nach unten korrigiert. Folgende Abbildung zeigt die Sekundärregelung. Die Sekundärregelung ist als PI-Regler ausgeführt ist.



Frage 6.20.1: Was spricht dafür, die Sekundärregelung als PI-Regler auszulegen?

Frage 6.20.2: Skizzieren Sie die Regelstrecke. Hinweis: Der Sekundärregler gibt den vorher durch die Vorsteuerung eingestellten Arbeitspunkt P_b vor.

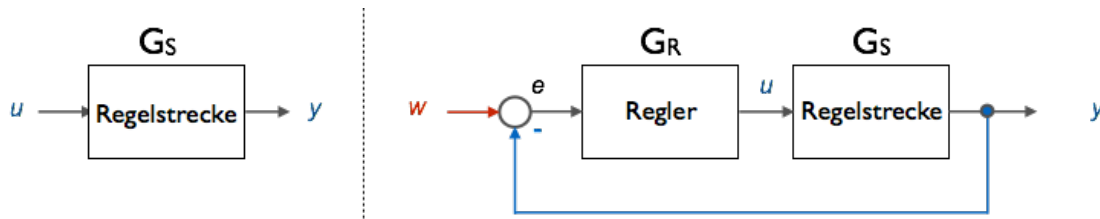
Frage 6.20.3: Entwerfen Sie den Regler. Simulieren Sie die Strecke.

Frage 6.20.4: Erweitern Sie Ihr Modell um mehrere Generatoren im Netz. Regeln Sie die Lastabweichung an einem der Generatoren aus. Untersuchen Sie die Wirkungsweise der Primärregelung und der Sekundärregelung.

7. Klausuraufgaben

7.1. P-Regler

Folgende Abbildung zeigt eine Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion $G_S(s)$ ohne Regelung (links), sowie die gleiche Regelstrecke im Regelkreis mit Regler. Der Regler hat die Übertragungsfunktion $G_R(s)$. Es soll ein P-Regler eingesetzt werden.



Frage 5.1.1: Wie lautet die Übertragungsfunktion der geregelten Strecke im allgemeinen Fall (mit $G_S(s)$ und $G_R(s)$)? Wie lautet die Übertragungsfunktion im speziellen Fall, wenn für $G_R(s)$ ein P-Regler eingesetzt wird?

Lösung: aus (1) $Y(s) = G_R(s) G_S(s) E(s)$ und (2) $E(s) = W(s) - Y(s)$ erhält man

$$G_{\text{ges}}(s) = G_R(s) G_S(s) / (1 + G_R(s) G_S(s)).$$

Mit $G_R(s) = K_P$ ergibt sich hieraus

$$G_{\text{ges}}(s) = K_P G_S(s) / (1 + K_P G_S(s)).$$

Frage 5.1.2: Für die Strecke sei $G_S(s) = b_0 / (s^2 + a_1 s + a_0)$. Welche Übertragungsfunktion ergibt sich für die geregelte Strecke mit dem P-Regler? Welchen Wert nimmt die Sprungantwort $h(t)$ für die unregelte Strecke bzw. die geregelte Strecke im eingeschwungenen Zustand an ($h(t \rightarrow \infty)$)?

Lösung: Mit dem Zählerpolynom $Z(s)$ und dem Nennerpolynom $N(s)$ von $G_S(s) = Z(s) / N(s)$ erhält man allgemein für die geregelte Strecke:

$G_{\text{ges}}(s) = K_P Z(s) / (N(s) + K_P Z(s))$. Hieraus ergibt sich im speziellen Fall:

$$G_{\text{ges}}(s) = K_P b_0 / (s^2 + a_1 s + a_0 + K_P b_0)$$

Eingeschwungener Zustand:

Ohne Regler: $h(t \rightarrow \infty) = b_0 / a_0$. Mit Regler: $h(t \rightarrow \infty) = K_P b_0 / (a_0 + K_P b_0)$

Frage 5.1.3: Für die Regelstrecke gelten folgende Werte: $b_0 = 3$, $a_1 = 4$, $a_0 = 3$. Berechnen Sie für den unregulierten Fall: (1) die Pole der Übertragungsfunktion, (2) die Partialbruchzerlegung, (3) die Impulsantwort. Beschreiben Sie das Zeitverhalten der unregulierten Strecke mit Hilfe ihrer Zeitkonstanten.

Lösung: Pole: $p_1 = -1$, $p_2 = -3$ erhält man durch Lösen der quadratischen Gleichung.

Durch Koeffizientenvergleich an den beiden Polen erhält man aus $G(s) = 3 / (s+1)(s+3) = K_1 / (s+1) + K_2 / (s+3)$ die Koeffizienten $K_1 = 1,5$ und $K_2 = -1,5$.

Die Impulsantwort erhält man hieraus aus der Rücktransformation in den Zeitbereich: $g(t) = 1,5 e^{-t} - 1,5 e^{-3t}$. Die unregelte Strecke hat die beiden Zeitkonstanten $\tau_1 = 1$ und $\tau_2 = 1/3$.

Frage 5.1.4: Legen Sie den Reglerparameter so fest, dass sich das Zeitverhalten der Strecke verbessert. Welchen Einfluss hat der Regler? Beschreiben Sie die Lage der Pole der Übertragungsfunktion der geregelten Strecke. Welche Impulsantwort hat die geregelte Strecke?

Beschreiben Sie das Zeitverhalten der geregelten Strecke mit Hilfe ihrer Zeitkonstanten. Welche Werte für die Reglerkonstante sollten Sie vermeiden?

Lösung: Verschiebung der ersten Polstelle zu kleineren Werten. Aus der Lösung der quadratischen Gleichung wählt man z.B. den Wert der Diskriminante $D = 0$, was sich mit Hilfe von $K_P = 1/3$ erreichen lässt. In diesem Fall sind $p_1 = p_2 = -2$. Im Vergleich zur unregelten Strecke ist hierdurch zwar der zweite Pol näher an die positive reelle Ebene gewandert, der dominierende Pol p_1 besitzt jedoch nun eine kleiner Zeitkonstante. Man erhält $\tau_1 = \tau_2 = 1/2$.

Mit $K_P = 1/3$ erhält man für die Übertragungsfunktion der geregelten Strecke:

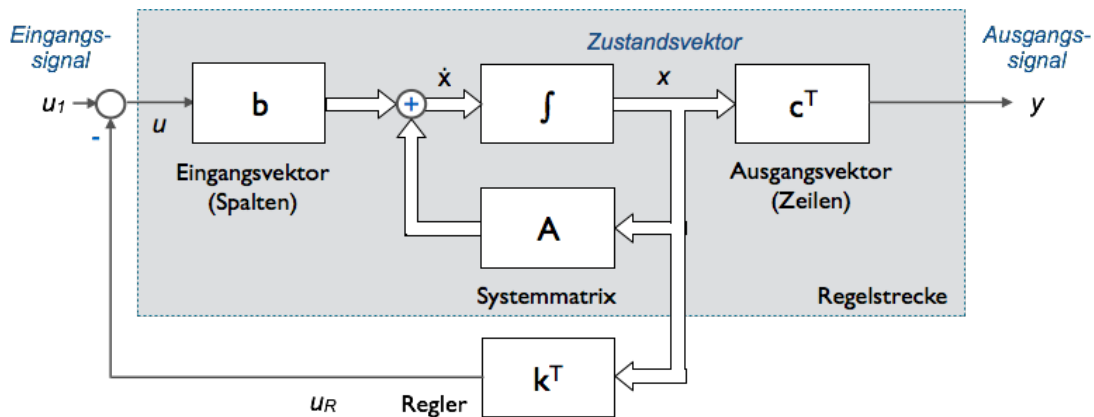
$$G_{ges}(s) = 1 / (s^2 + 4s + 4) = 1 / (s + 2)^2$$

Aus der Korrespondenztabelle der Laplace Transformation ermittelt man die zugehörige Zeitfunktion zu $g(t) = t e^{-2t}$.

Reglerkonstanten, die die Pole in Richtung der positiven reellen Ebene verschieben, sind zu vermeiden, da das System hierdurch instabil wird. Mit Blick in die Lösung der quadratischen Gleichung wären das alle Werte von K_P , die den ursprünglichen Pol bei $p_1 = -1$ weiter nach links verschieben, d.h. $K_P < 1/4$.

7.2. Zustandsregler

Ein Zustandsregler hat die in folgender Abbildung gezeigte Struktur. Die Regelstrecke ist ein System 2. Ordnung mit der Systemmatrix $A = (a_{11}, 0; 0, a_{22})$, $b = (1; 1)$; und $c^T = (0, 1)$.



Frage 5.2.1: Regelstrecke. Wie lauten die Zustandsgleichungen der Regelstrecke?

Lösung:

$$\dot{x}_1(t) = a_{11} x_1(t) + u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = a_{22} x_2(t) + u(t)$$

$$y(t) = x_2(t)$$

Frage 5.2.2: Regelstrecke. Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G_S(s)$ der Regelstrecke aus dem Zustandsmodell (A, b, c^T) bzw. direkt aus den Zustandsgleichungen. Welche Polstellen hat die Übertragungsfunktion?

Lösung: Weg 1: Gemäß Gleichung (3.28) aus dem Vorlesungsmanuskript erhält man:

$$G_S(s) = c^T (sE - A)^{-1} b$$

Wegen der Diagonalmatrix besitzt $M = (sE - A)^{-1}$ ebenfalls Diagonalfom, d.h. $M = (m_{11}, 0; 0, m_{22})$. Multiplikation von $c^T M$ ergibt $c^T M = (0, 1) = (m_{11}, 0; 0, m_{22}) = (0; m_{22})$. Hieraus ergibt sich durch

Multiplikation mit b das Skalarprodukt: $c^T M b = (0; m_{22}) (1, 1) = m_{22}$. Das Element erhält man aus $M = (sE-A)^{-1} = ((s-a_{22}), 0; 0, (s-a_{11})) / \det(sE-A)$ zu $(s-a_{11}) / ((s-a_{22})(s-a_{11})) = 1/(s-a_2)$. Somit ist

$$G_S(s) = 1/(s - a_{22})$$

Weg 2 ist in diesem Fall viel einfacher: Aus

$$\dot{x}_2(t) = a_{22} x_2(t) + u(t)$$

$$y(t) = x_2(t)$$

ergibt sich unmittelbar

$$\dot{y}(t) = a_{22} y(t) + u(t)$$

Durch Transformation in den Bildbereich erhält man hieraus:

$$s Y(s) = a_{22} Y(s) + U(s)$$

Nach Umformung zu $s Y(s) - a_{22} Y(s) = (s - a_{22}) Y(s) = U(s)$ erhält man die Übertragungsfunktion

$$G_S(s) = 1 / (s - a_{22})$$

Somit ergibt sich eine Polstelle bei $s = a_{22}$.

Frage 5.2.3: Regler. Für den Regler wird der Zeilenvektor k^T wie folgt gewählt: $k^T = (0, K_P)$. Erstellen Sie die Zustandsgleichungen der geregelten Strecke. Welche Veränderungen ergeben sich in der Systemmatrix A' der geregelten Strecke gegenüber der Systemmatrix A der ungeregelten Strecke?

Lösung: Für das geregelte System gilt:

$$u(t) = u_1(t) - u_R(t) = u_1(t) - k^T x(t) = u_1(t) - K_P x_2(t)$$

Durch Einsetzen in die Zustandsgleichungen erhält man hieraus:

$$\dot{x}_1(t) = a_{11} x_1(t) + u_1(t) - K_P x_2(t) = a_{11} x_1(t) - K_P x_2(t) + u_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = a_{22} x_2(t) + u_1(t) - K_P x_2(t) = (a_{22} - K_P) x_2(t) + u_1(t)$$

$$y(t) = x_2(t)$$

Die Systemmatrix der geregelten Strecke ergibt sich zu $A' = (a_{11}, -K_P; 0, (a_{22} - K_P))$.

Frage 5.2.4: Geregelte Strecke. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion der geregelten Strecke. Welcher Einfluss hat die Regelung sich auf die Lage der Polstellen?

Lösung: Am einfachsten direkt aus den Zustandsgleichungen:

$$\dot{x}_2(t) = (a_{22} - K_P) x_2(t) + u_1(t)$$

$$y(t) = x_2(t)$$

Somit erhält man:

$$\dot{y}(t) = (a_{22} - K_P) y(t) + u_1(t)$$

Durch Transformation in den Bildbereich erhält man hieraus:

$$s Y(s) = (a_{22} - K_P) Y(s) + U_1(s)$$

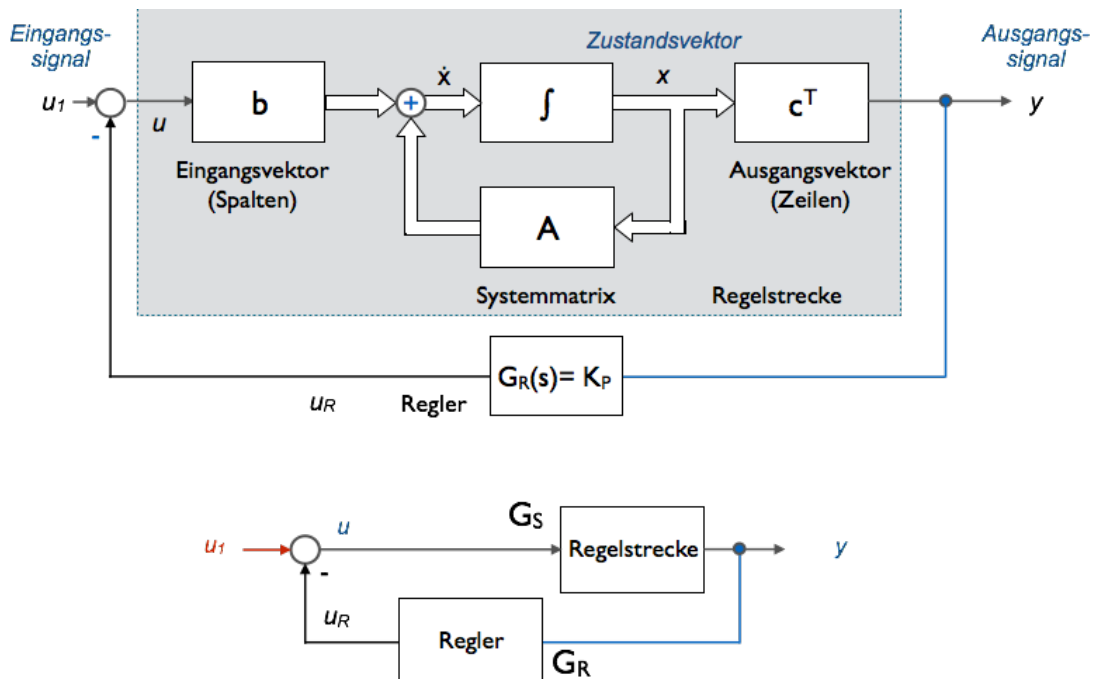
Nach Umformung erhält man die Übertragungsfunktion

$$G_{ges}(s) = 1 / (s - a_{22} + K_P)$$

Somit ergibt sich eine Polstelle bei $s = a_{22} - K_P$. Die Regelung verschiebt unmittelbar die Lage der Polstelle der Übertragungsfunktion.

Frage 5.2.5: Skizzieren Sie das Blockdiagramm für spezielle Wahl des Vektor $k^T = K_P c^T = (0, K_P)$ aus Frage 2.3 so, dass das Diagramm dem eines konventionellen Regelkreises näher kommt. Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion des Regelkreises aus dem Blockdiagramm, in dem Sie für die Strecke die Übertragungsfunktion $G_S(s)$ einführen, sowie für den Regler $G_R(s) = K_P$. Welche Unterschiede ergeben sich zu einem konventionellen Regelkreis mit P-Regler in der Struktur und in der Übertragungsfunktion?

Lösung: Da der Vektor k^T die gleiche Struktur hat wie c^T (und somit $k^T = K_P c^T = (0, K_P)$ gilt), könnte man den P-Regler mit der Konstanten K_P auch direkt mit dem Ausgang $y(t)$ verbinden. Somit erhält man einen konventionellen P-Regler, der sich allerdings im Rückführungszweig befindet (siehe Abbildung).



Für die Übertragungsfunktion erhält man aus dem Blockdiagramm: (1) $Y(s) = G_S(s) U(s)$ und (2) $U(s) = U_1(s) - G_R(s) Y(s)$. Hieraus ergibt sich nach Umformung:

$$G_{ges}(s) = G_S(s) / (1 + G_R(s) G_S(s)).$$

Der Nenner der Übertragungsfunktion (und somit die Lage der Pole) entspricht der des konventionellen Regelkreises.

Im konventionellen Regelkreis befindet sich der Regler im Vorwärtszweig vor der Strecke. Somit findet sich im konventionellen Regelkreis die Übertragungsfunktion des Reglers auch im Zähler der Übertragungsfunktion.

Frage 5.2.6: Zeitverhalten der geregelten Strecke. Für die Strecke sei $G_S(s) = b_0 / (s^2 + a_1 s + a_0)$. Welche Übertragungsfunktion ergibt sich für die geregelte Strecke mit dem Zustandsregler? Welchen Wert nimmt die Sprungantwort $h(t)$ für die unregelte Strecke bzw. die geregelte Strecke im eingeschwungenen Zustand an ($h(t \rightarrow \infty)$)? Vergleichen Sie das Verhalten mit den konventionellen P-Regler.

Lösung: Mit dem Zählerpolynom $Z(s)$ und dem Nennerpolynom $N(s)$ von $G_S(s) = Z(s) / N(s)$ erhält man allgemein für die geregelte Strecke:

$G_{ges}(s) = Z(s) / (N(s) + K_P Z(s))$. Hieraus ergibt sich im speziellen Fall:

$$G_{ges}(s) = b_0 / (s^2 + a_1 s + a_0 + K_P b_0)$$

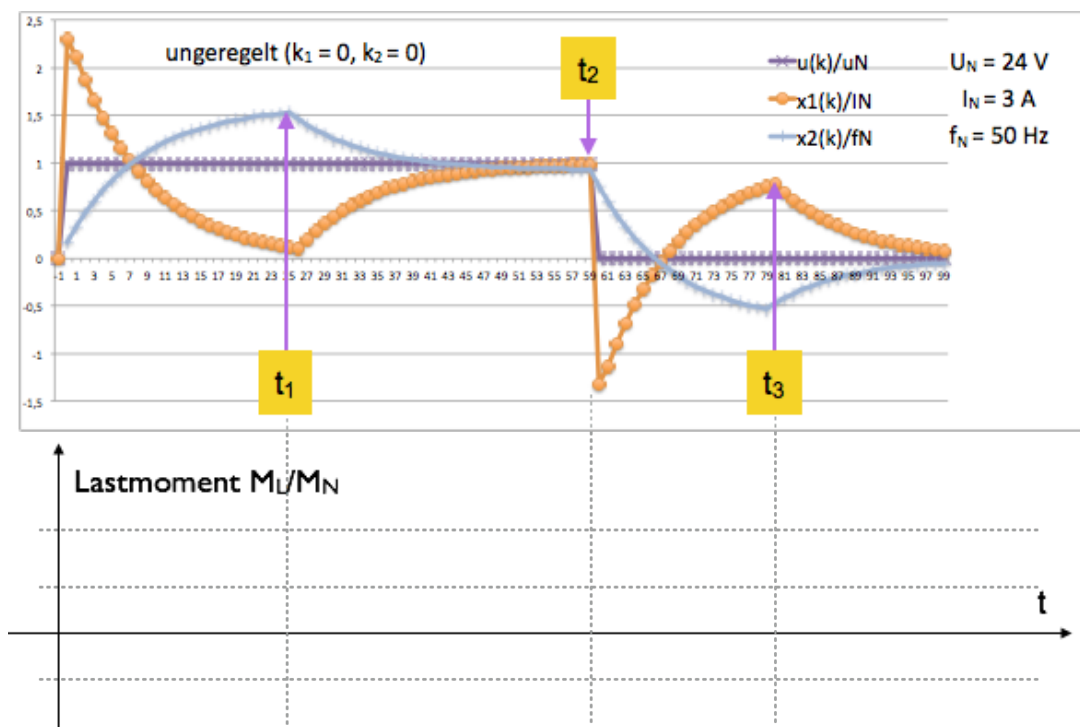
Eingeschwungener Zustand:

Ohne Regler: $h(t \rightarrow \infty) = b_0 / a_0$. Mit Regler: $h(t \rightarrow \infty) = b_0 / (a_0 + K_P b_0)$

Vergleich mit konventionellem P-Regler: siehe Aufgabe 1.2. Bei Zugriff auf alle Zustandsgrößen durch k^T lassen sich alle Polstellen der Strecke beeinflussen.

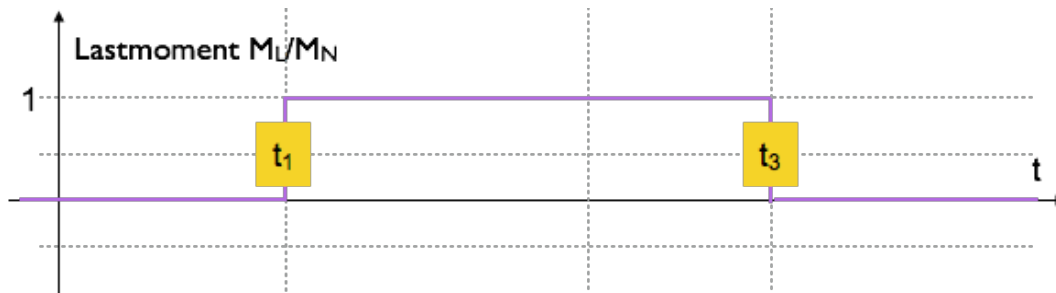
7.3. Einfluss von Störgrößen

Folgende Abbildung zeigt einen Simulationslauf des Gleichspannungsmotors. Der Motor ist in diesem Fall die Regelstrecke. Die Zustandsgröße $x_1(t)$ entspricht dem Motorstrom, $x_2(t)$ der Drehzahl. Als Eingangsgröße dient die Ankerspannung des Motors $u(t)$. In der abgebildeten Simulation sind diese Größen auf die jeweiligen Nennwerte normiert. Als Störgröße wirkt ein Lastmoment M_L auf die Strecke ein.



Frage 5.3.1: Ergänzen Sie den Verlauf des Lastmomentes im Diagramm. Begründen Sie Ihren Verlauf stichwortartig aus dem Verhalten des Motors.

Lösung: Das Lastmoment M_N wird zu t_1 zugeschaltet, mit t_3 weggeschaltet.



Begründung: Motor läuft vor t_1 auf Leerlaufdrehzahl hoch (Strom geht gegen 0). Bei Last läuft die Drehzahl auf Nenn Drehzahl, der Strom steigt auf den Nennwert. Ab Zeitpunkt t_3 geht das System in Richtung Ruhezustand, d.h. hier ist die Last entfernt worden.

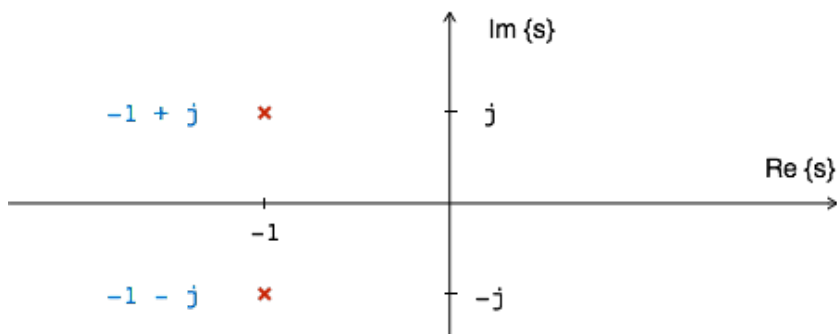
Frage 5.3.2: Welches ist die Startbedingung der Regelstrecke? Erklären Sie das Verhalten der Regelstrecke zu den Zeitpunkten t_1 , t_2 und t_3 . Erklären Sie das Verhalten der Strecke zwischen den Zeitpunkten t_2 und t_3 (zunächst negativer, dann positiver Motorstrom, negative Drehzahl).

Lösung: Zeitpunkte t_1 und t_3 siehe oben (Frage 3.1).

Zum Zeitpunkt t_2 wird die Versorgungsspannung abgeschaltet ($u(t_2) = 0$ mit Kurzschluss des Ankerkreises). Zu diesem Zeitpunkt liegt noch Nennlast an, d.h. es wirkt ein Nennmoment auf den Motor. Der Motor geht in den Generatorbetrieb (Umkehr des Stromes) und wird langsamer. Da weiter ein Lastmoment anliegt, ändert sich nach dem Stillstand die Drehrichtung (negative Drehzahlen, Stromumkehr). Zum Zeitpunkt t_3 erfolgt die Abschaltung des Lastmoments, der Generator kehrt in den Ruhezustand zurück.

7.4. Systembeschreibung durch Polvorgabe

Ein System besitzt die in der Abbildung gezeigten Polstellen $s_{1,2} = -1 \pm j$.



Frage 7.4.1: Übertragungsfunktion. Wie lautet das Nennerpolynom $N(s)$ der Übertragungsfunktion? Wie lautet die Übertragungsfunktion $G(s)$, wenn das Zählerpolynom $Z(s) = 2$ beträgt?

Lösung: $N(s) = (s - (-1 + j)) (s - (-1 - j)) = s^2 + 2s + 2$

Mit $Z(s) = 2$ folgt hieraus $G(s) = Z(s) / N(s) = 2 / (s^2 + 2s + 2)$

Frage 7.4.2: Verhalten im eingeschwungenen Zustand. Auf welchen Wert schwingt die Sprungantwort des Systems ein? Skizzieren Sie den Verlauf der Sprungantwort. Begründen Sie Ihre Aussage.

Lösung: $h(t \rightarrow \infty) = G(s \rightarrow 0)$, es gilt also im eingeschwungenen Zustand $h(t \rightarrow \infty) = 1$. Die Impulsantwort des Systems ist eine gedämpfte Schwingung. Die Sprungantwort schwingt also beim Einschwingen über.

Frage 7.4.3: Differenzialgleichung. Wie lautet die Differenzialgleichung des Systems für das Eingangssignal $u(t)$ und das Ausgangssignal $y(t)$?

Lösung: Aus der Übertragungsfunktion erhält man

$$Y(s) (s^2 + 2s + 2) = 2 U(s)$$

Transformation in den Zeitbereich ergibt

$$\ddot{y}(t) + 2 \dot{y}(t) + 2 y(t) = 2 u(t)$$

Frage 7.4.4: Zustandsmodell. Wie lauten die Zustandsgleichungen des Systems? Welche Werte besitzt die Zustandsmatrix A , der Eingangsvektor b und der Ausgangsvektor c^T ?

Lösung: Wählt man $x_1(t) = y(t)$ und $x_2(t) = \dot{y}(t)$, so erhält man aus der DGL

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

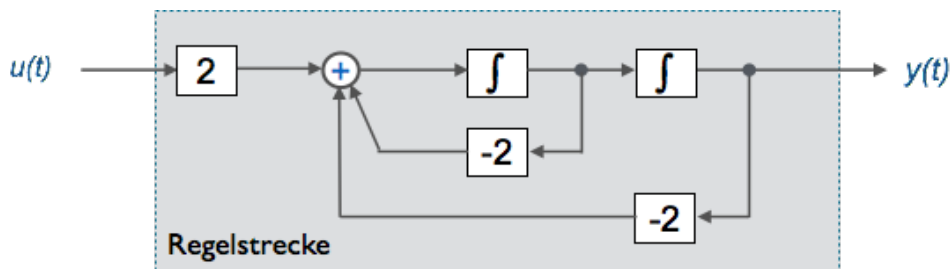
$$\dot{x}_2(t) = -2 x_2(t) - 2 x_1(t) + 2 u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Es lauten also: $A = [0, 1; -2, -2]$, $b = [0; 1]$, $c^T = [1, 0]$.

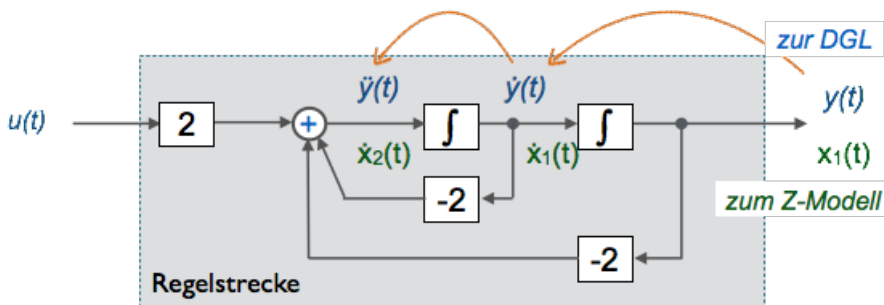
7.5. Zustandsregler

Ein System wird durch folgenden Signalfluss beschrieben.



Frage 7.5.1: Wie lautet die Differenzialgleichung des Systems? Welche Polstellen hat das System?

Lösung: Wenn man dem Signalfluss rückwärts von $y(t)$ aus folgt erhält man



als Differenzialgleichung (DGL): $\ddot{y}(t) = -2 \dot{y}(t) - 2 y(t) + 2 u(t)$, und somit

$$\ddot{y}(t) + 2 \dot{y}(t) + 2 y(t) = 2 u(t)$$

Dieses System besitzt Polstellen bei $s_{1,2} = -1 \pm j$.

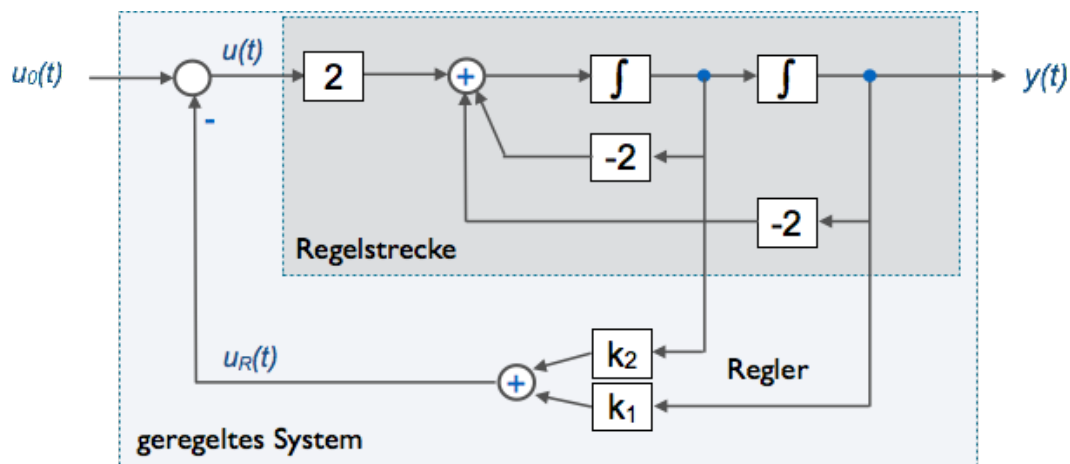
Frage 7.5.2: Zustandsmodell. Leiten Sie die Zustandsgleichungen des Systems aus der Differenzialgleichung bzw. direkt aus dem Signalfluss her. Welche Werte besitzt die Zustandsmatrix A , der Eingangsvektor b und der Ausgangsvektor c^T ?

Lösung: Ausgehend vom der DGL: siehe Frage 1.4

Ausgehend vom Signalfuss: von $y(t)=x_1(t)$ aus erhält man rückwärts dem Signalfuss fol-gend
 (1) $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, (2) $\dot{x}_2(t) = -2 x_2(t) - 2 x_1(t) + 2 u(t)$.

Für das Zustandsmodell erhält man also: $A = [0, 1; -2, -2]$, $b = [0; 2]$, $c^T = [1, 0]$.

Frage 7.5.3: Zustandsmodell des geregelten Systems. Folgende Abbildung zeigt die Regelstrecke zusammen mit einem Regler.



Wie lauten die Zustandsgleichungen des geregelten Systems? Welche Werte besitzt die Zustandsmatrix A_R des geregelten Systems, der Eingangsvektor b_R und der Ausgangsvektor c_R^T . Hinweis: Mit dem Regler errechnet man $u(t) = u_0(t) - u_R(t)$.

Lösung: Ausgangspunkt sind die Zustandsgleichungen

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (1)$$

$$\dot{x}_2(t) = -2 x_2(t) - 2 x_1(t) + 2 u(t) \quad (2)$$

Durch Einsetzen von

$$u(t) = u_0(t) - u_R(t) = u_0(t) - k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t)$$

in (2) ergibt sich:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (1)$$

$$\dot{x}_2(t) = -2(1 + k_2) x_2(t) - 2(1 + k_1) x_1(t) + 2 u_0(t) \quad (2)$$

Frage 7.5.4: Wie lautet die Differenzialgleichung des geregelten Systems? Welche Polstellen hat das geregelte System für folgende Reglerparameter: $k_1=0$, $k_2=0,5$? Welchen Einfluss hat der Regler?

Lösung: Die Struktur der Zustandsgleichungen hat sich nicht geändert, bis auf $u_0(t)$ als neue Eingangsgröße, und andere Koeffizienten vor den Zustandsvariablen. Durch Einsetzen von (1) in (2) und Verwendung der Ausgangsgleichung (3) $y(t)=x_1(t)$ erhält man also:

$$\ddot{y}(t) + 2(1 + k_2) \dot{y}(t) + 2(1 + k_1) y(t) = 2 u_0(t)$$

Für $k_1 = 0$ und $k_2 = 0,5$ erhält man:

$$\ddot{y}(t) + 3 \dot{y}(t) + 2 y(t) = 2 u_0(t)$$

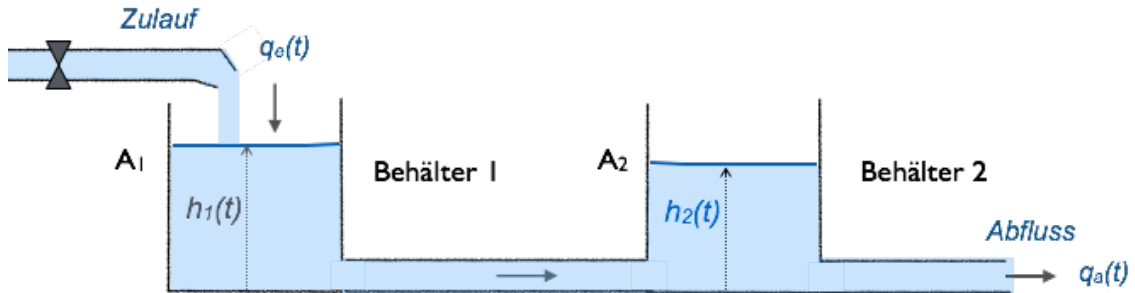
Die Polstellen des Systems ergeben sich aus den Nullstellen des Polynoms

$$s^2 + 3s + 2 = 0 = (s + 2)(s + 1)$$

Die Polstellen haben sich durch Einfluss des Reglers verschoben nach $s_1 = -2$ und $s_2 = -1$.

7.6. Füllstandsregelung mit 2 Behältern

Zwei Behälter sind wie in der folgenden Abbildung gezeigt miteinander verbunden.



Der Füllstand $h_2(t)$ des zweiten Behälters soll geregelt werden. Als Stellgröße soll der Zulauf $q_e(t)$ verwendet werden. Der Ablauf $q_a(t)$ am 2. Behälter ist als Störgröße zu betrachten.

Frage 7.6.1: Physikalisches Modell. Beschreiben Sie das Verhalten des Systems. Hinweis: Nehmen Sie an, dass der zwischen den Behältern ausgetauschte Flüssigkeits-strom proportional ist zur Differenz der Füllstände $h_1(t) - h_2(t)$.

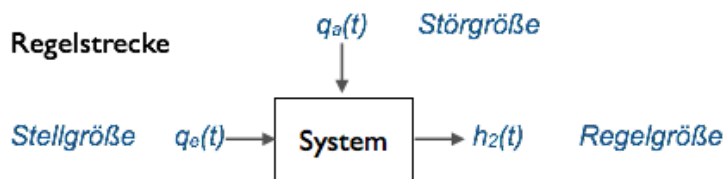
Lösung: Die Volumenänderung $A \dot{h}(t)$ ist jeweils proportional zum Zustrom bzw. Ablauf:

$$\dot{h}_1(t) = -k/A_1 h_1(t) + k/A_1 h_2(t) + 1/A_1 q_e(t) \tag{1}$$

$$\dot{h}_2(t) = k/A_2 h_1(t) - k/A_2 h_2(t) - 1/A_2 q_a(t) \tag{2}$$

Frage 7.6.2: Systemdefinition. Definieren Sie das System nach der Vorgabe in der Aufgabenstellung. Hinweis: Nur $h_2(t)$ soll geregelt werden. Eine Skizze mit Eingängen und Ausgängen genügt.

Lösung:



Frage 7.6.3: Systembeschreibung. Erstellen Sie die Zustandsgleichungen der Regelstrecke. Wie lauten die Zustandsmatrix A, der Eingangsvektor b und der Ausgangsvektor c^T ? Hinweis: Die Störgröße ist nicht Teil des Zustandsmodells.

Lösung: Man wählt $x_1(t) = h_1(t)$ und $x_2(t) = h_2(t)$. Eingangsgröße ist $u(t) = q_e(t)$.

$$\dot{x}_1(t) = -k/A_1 x_1(t) + k/A_1 x_2(t) + 1/A_1 u(t) \tag{1}$$

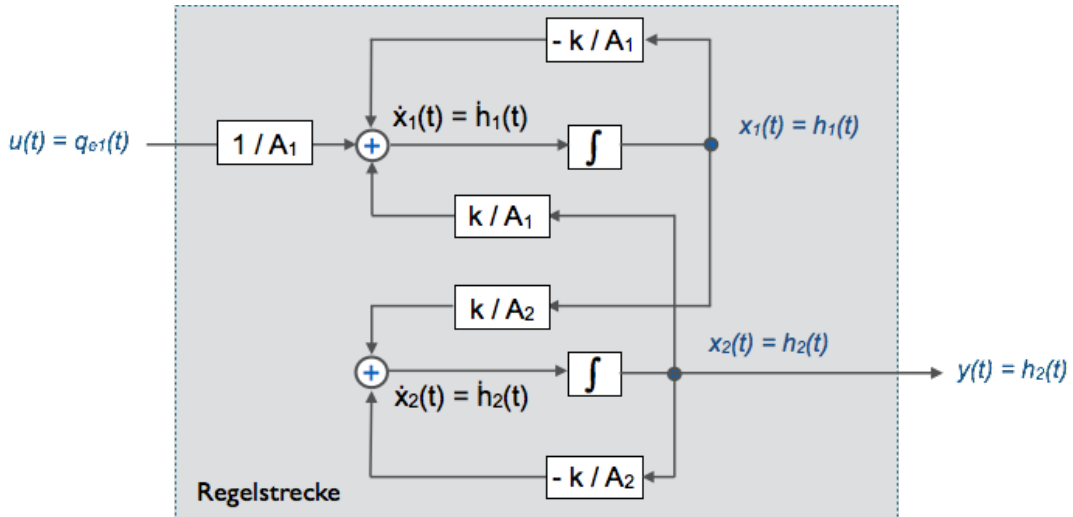
$$\dot{x}_2(t) = k/A_2 x_1(t) - k/A_2 x_2(t) \tag{2}$$

$$y(t) = x_2(t) \tag{3}$$

Somit erhält man: $A = [-k/A_1, k/A_1; k/A_2, -k/A_2]$, $b = [1/A_1; 0]$, $c^T = [0, 1]$.

Frage 7.6.4: Skizzieren Sie den Signalfluss des Systems.

Lösung: Die Behälter beströmen sich gegenseitig abhängig von den Füllständen.

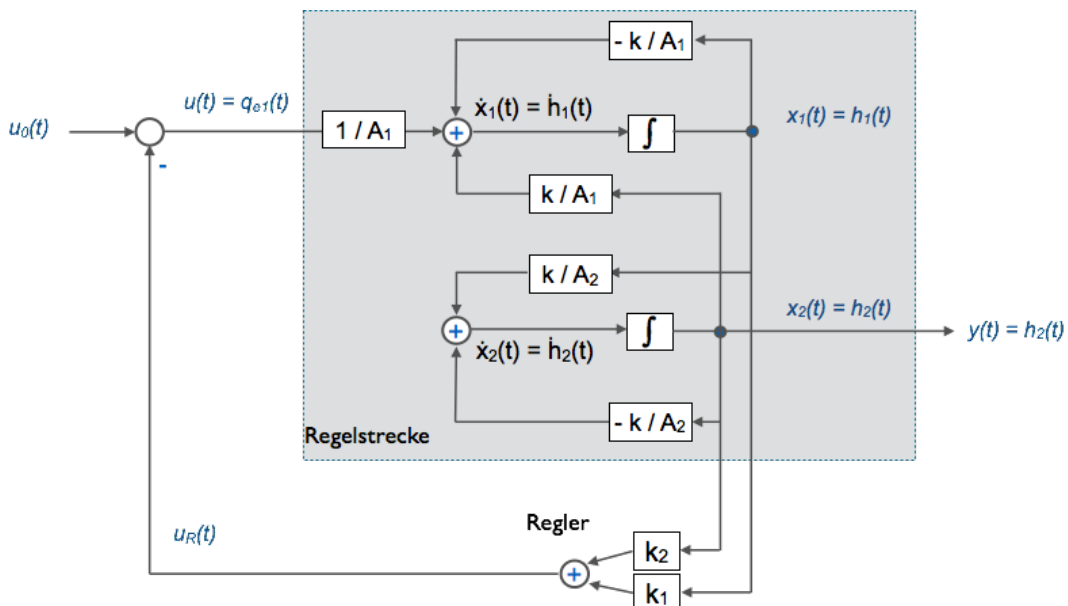


Frage 7.6.5: Qualitative Fragen zur Regelstrecke. Wie beurteilen Sie die Steuerbarkeit des Systems? Halten Sie das System für beobachtbar? Begründen Sie Ihre Aussagen.

Lösung: Steuerbarkeit: Obwohl die Eingangsgröße nur direkt auf $x_1(t)$ einwirkt, wirkt sie mittelbar auch auf $x_2(t) = h_2(t)$, da die Gefäße ja miteinander verbunden sind. Der Signalfluss zeigt $x_1(t)$ als mittelbare Größe. Das System sollte also steuerbar sein. Beobachtbarkeit: Umgekehrt kann man von dem beobachteten Füllstand $y(t) = h_2(t) = x_2(t)$ auch auf den Füllstand $h_1(t) = x_1(t)$ schließen. Das System sollte also auch beobachtbar sein.

Frage 7.6.6: Entwurf Zustandsregler. Skizzieren Sie einen Zustandsregler für das System. Wie lauten die Zustandsgleichungen des geregelten Systems?

Lösung:



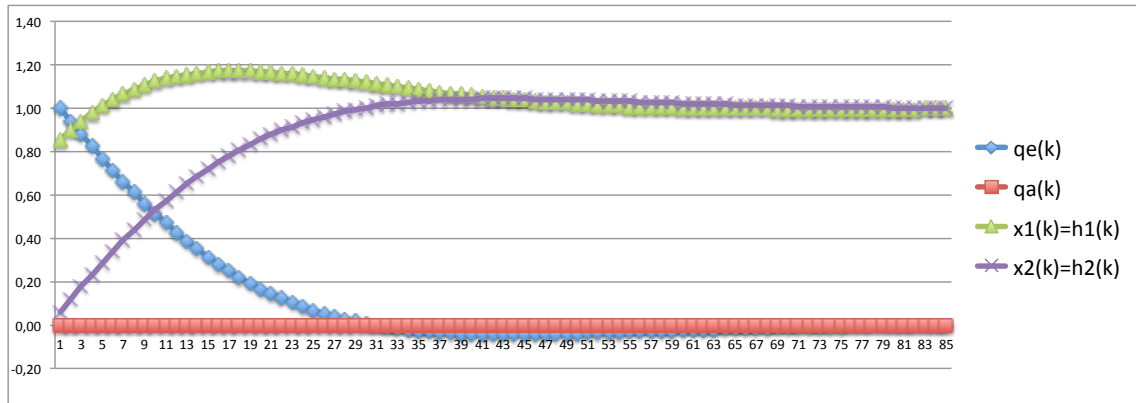
Zustandsgleichungen: $u(t) = u_0(t) - k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t)$ einsetzen:

$$\dot{x}_1(t) = (k/A_1 - k_1) x_1(t) + (k/A_1 - k_2) x_2(t) + u_0(t) \quad (1)$$

$$\dot{x}_2(t) = k/A_2 x_1(t) - k/A_2 x_2(t) \quad (2)$$

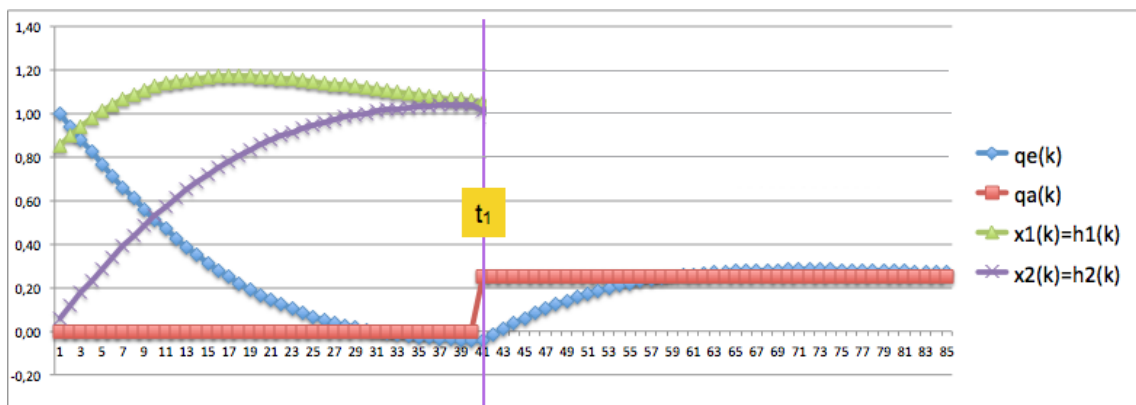
$$y(t) = x_2(t) \quad (3)$$

Frage 7.6.7: Führungsverhalten. Folgendes Diagramm zeigt eine Simulation der geregelten Strecke. Interpretieren Sie den Verlauf von $q_e(t)$, $h_1(t)$ und $h_2(t)$. Welche Wirkung haben die Reglerkonstanten k_1 und k_2 ?

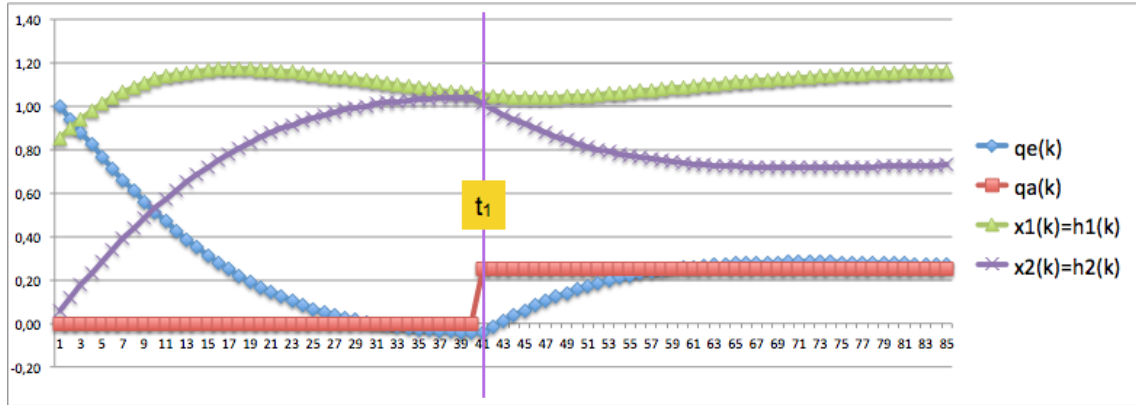


Lösung: Initialzustände: $h_1(0) = 0,8$, $h_2(0) = 0$. Der Regler stellt den Zulauf $q_e(t)$ so ein, dass sich Behälter 2 auf einen konstanten Wert $h_2(t)$ füllt. Hierfür genügt k_2 . Der Füllstand $h_1(t)$ kann sich hierbei über den gewünschten Wert erhöhen. Die Konstante k_1 erlaubt es, den Füllstand $h_1(t)$ bei der Regelung zu berücksichtigen.

Frage 7.6.8: Störverhalten. Zum Zeitpunkt t_1 wird eine konstante Menge $q_a(t)$ abge-pumpt, wie folgende Simulation zeigt. Die Reglereinstellungen und Startbedingungen sind identisch mit Frage 3.7. Wie schätzen Sie den weiteren Verlauf der Füllstände $h_1(t)$ und $h_2(t)$ ab t_1 ein (bitte einzeichnen)? Begründen Sie Ihre Einschätzung.



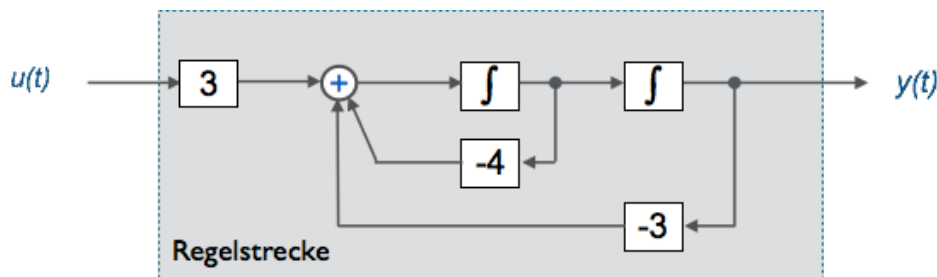
Lösung: Der Regler kann die Störung nicht ausregeln, es bleibt eine Regeldifferenz.



Grund hierfür ist, dass der Regler zwar ein Gleichgewicht zwischen Zulauf $q_e(t)$ (Stellgröße) und Abfluss $q_a(t)$ (Störgröße) herstellt (siehe Signalfuss bzw. Simulationslauf). Bis zu diesem Zeitpunkt ist aber eine Menge Flüssigkeit abgeflossen, der Füllstand $h_2(t)$ also gesunken. Der Zulauf fließt mittelbar über Behälter 1 zu, was eine Differenz der Füllstände verursacht, die für den Zustrom von Behälter 1 nach Behälter 2 erforderlich ist.

7.7. Strecke mit P-Regler

Ein Regelstrecke besitzt den in der Abbildung gezeigten Signalfuss.



Frage 7.7.1: Differenzialgleichung. Wie lautet die Differenzialgleichung der Strecke?

Frage 7.7.2: Übertragungsfunktion. Wie lautet die Übertragungsfunktion der Strecke?

Frage 7.7.3: Stabilität. Ist die Strecke als System stabil? Untersuchen Sie hierzu die Lage der Polstellen.

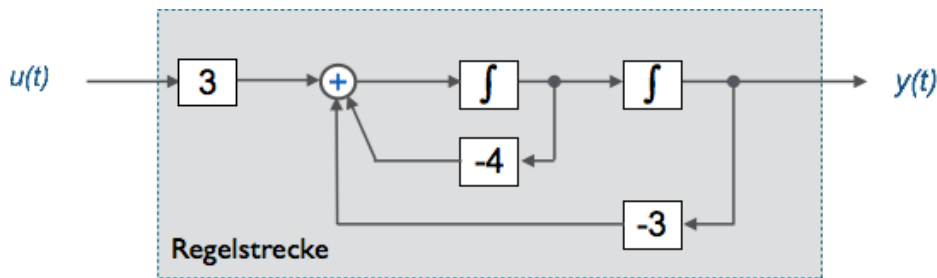
Frage 7.7.4: Verhalten im eingeschwungenen Zustand. Auf welchen Wert schwingt die Sprungantwort des Systems ein? Welche Polstelle beeinflusst das Zeitverhalten maßgeblich? Skizzieren Sie den Verlauf der Sprungantwort. Begründen Sie Ihre Aussage.

Frage 7.7.5: P-Regler. Zur Regelung der Strecke soll ein P-Regler eingesetzt werden. Skizzieren Sie den Regelkreis. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion der geregelten Strecke.

Frage 7.7.6: Reglerparameter. Als Reglerkonstante wird $K_P = 1$ gewählt. Welche Polstellen besitzt das geregelte System hiermit? Auf welchen Wert schwingt sich die Sprungantwort des geregelten Systems ein? Wie ändert sich das Einschwingverhalten im Vergleich zum unregulierten Zustand?

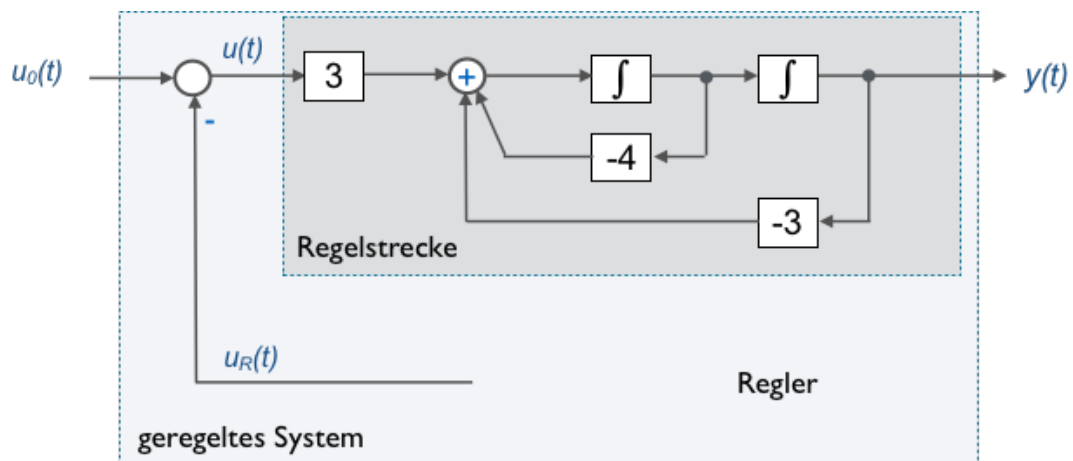
7.8. Zustandsregler

Eine Regelstrecke wird durch folgenden Signalfluss beschrieben.



Frage 7.8.1: Zustandsmodell. Wie lauten die Zustandsgleichungen des Systems? Welche Werte besitzt die Zustandsmatrix A , der Eingangsvektor b und der Ausgangsvektor c^T ?

Frage 7.8.2: Zustandsregler. Zur Regelung der Strecke soll ein Zustandsregler eingesetzt werden. Skizzieren Sie die Strecke mit dem Zustandsregler.



Frage 7.8.3: Zustandsmodell des geregelten Systems. Wie lauten die Zustandsgleichungen des geregelten Systems? Welche Werte besitzt die Zustandsmatrix A_R des geregelten Systems, der Eingangsvektor b_R und der Ausgangsvektor c_R^T . Hinweis: Mit dem Regler errechnet man $u(t) = u_0(t) - u_R(t)$.

Frage 7.8.4: Wie lautet die Differenzialgleichung des geregelten Systems? Welche Polstellen hat das geregelte System für folgende Reglerparameter: $k_1=1$, $k_2=0$? Welchen Einfluss hat der Regler?

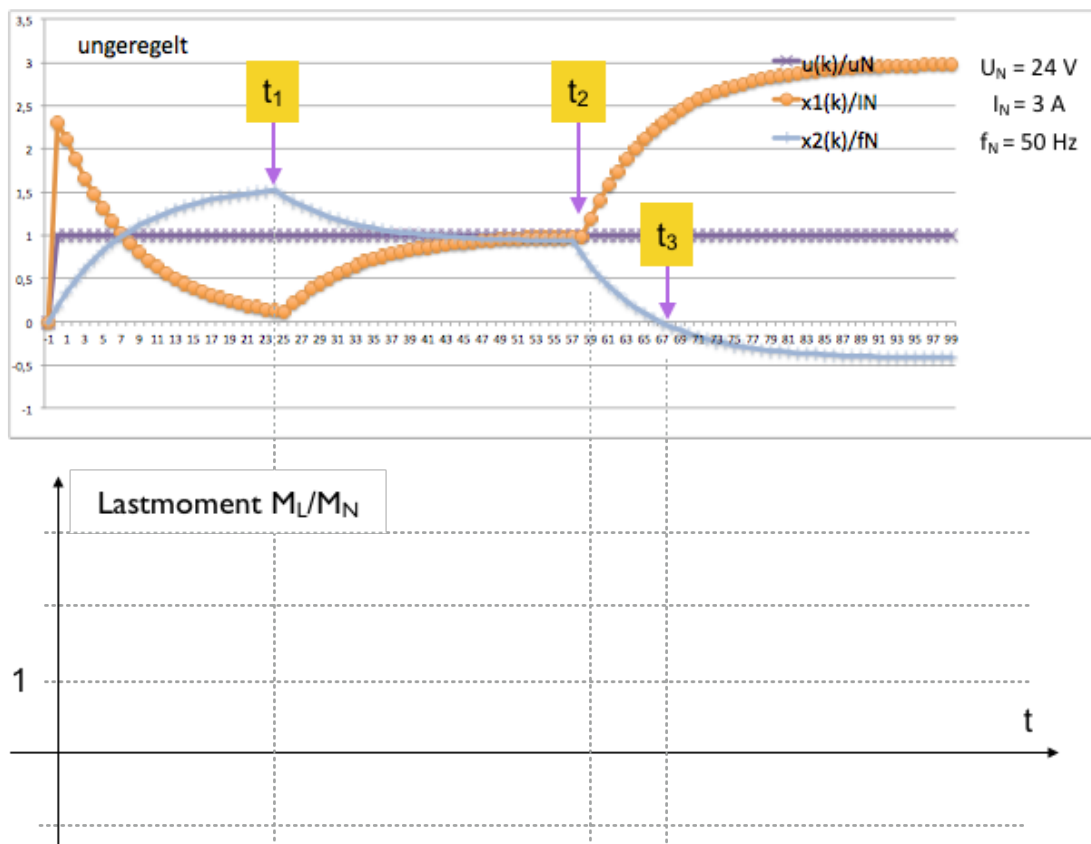
Frage 7.8.5: Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geregelten Systems mit den Reglerparametern aus Aufgabe 2.4. Auf welchen Wert schwingt sich das System ein? Wie hat sich das Zeitverhalten durch den Zustandsregler geändert?

Frage 7.8.6: Vergleich mit P-Regler. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des per Zustandsregler geregelten Systems für den allgemeinen Fall der Reglerparameter k_1 und k_2 . Vergleichen Sie mit der Übertragungsfunktion des mit einem P-Regler geregelten Systems. Welche Unterschiede ergeben sich?

7.9. Gleichstrommotor als Regelstrecke

Folgende Abbildung zeigt einen Simulationslauf des Gleichspannungsmotors. Der Motor ist in diesem Fall die Regelstrecke. Die Zustandsgröße $x_1(t)$ entspricht dem Motorstrom, $x_2(t)$ der Drehzahl.

Als Eingangsgröße dient die Ankerspannung des Motors $u(t)$. In der abgebildeten Simulation sind diese Größen auf die jeweiligen Nennwerte normiert. Als Störgröße wirkt ein Lastmoment M_L auf die Strecke ein.

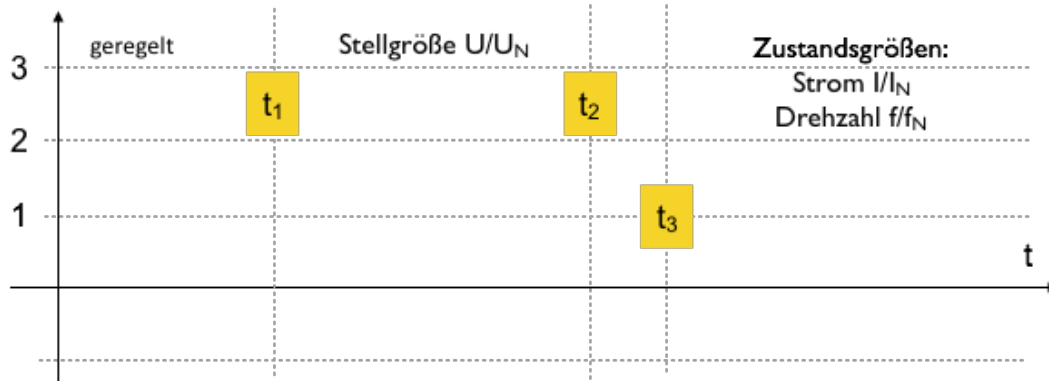


Frage 7.9.1: Lastmoment. Ergänzen Sie den Verlauf des Lastmomentes im Diagramm. Begründen Sie Ihren Verlauf stichwortartig aus dem Verhalten des Motors.

Frage 7.9.2: Zustandsgrößen. Welches ist die Startbedingung der Regelstrecke? Erklären Sie das Verhalten der Regelstrecke zu den Zeitpunkten t_1 , t_2 und t_3 . Wie sind die negativen Drehzahlen zum Zeitpunkt t_3 zu interpretieren? Wird elektrische Leistung aufgenommen oder abgegeben?

Frage 7.9.3: Drehzahlregler. Skizzieren Sie einen Regelkreis mit dem Motor als Regelstrecke und wahlweise einem P-Regler bzw. mit einem Zustandsregler. Hätte ein Zustandsregler Vorteile gegenüber einem P-Regler?

Frage 7.9.4: Simulation der geregelten Strecke. Wie würde sich eine mit Hilfe eines P-Reglers geregelte Strecke bei gleichem Lastprofil wie in Aufgabe 3.1 verhalten? Ergänzen Sie den Verlauf der Stellgröße (Motorspannung) und der beiden Zustandsgrößen (Motorstrom, Drehzahl) in normierter Darstellung in folgendem Diagramm. Begründen Sie Ihre Skizze.



Englisch - Deutsch

Canonical forms	Normalformen (des Zustandsmodells)
Modal form	Diagonalform
Companion form	Beobachternormalform
Controllable form	Regelungsnormalform
Denominator	Nenner
Discrete-time	zeitdiskret
Eigenvalue	Eigenwert
Eigenvector	Eigenvektor
Numerator	Zähler
State estimator	Beobachter
State-space model	Zustandsmodell (Modell im Zustandsraum)
Transfer function	Übertragungsfunktion
...	
...	

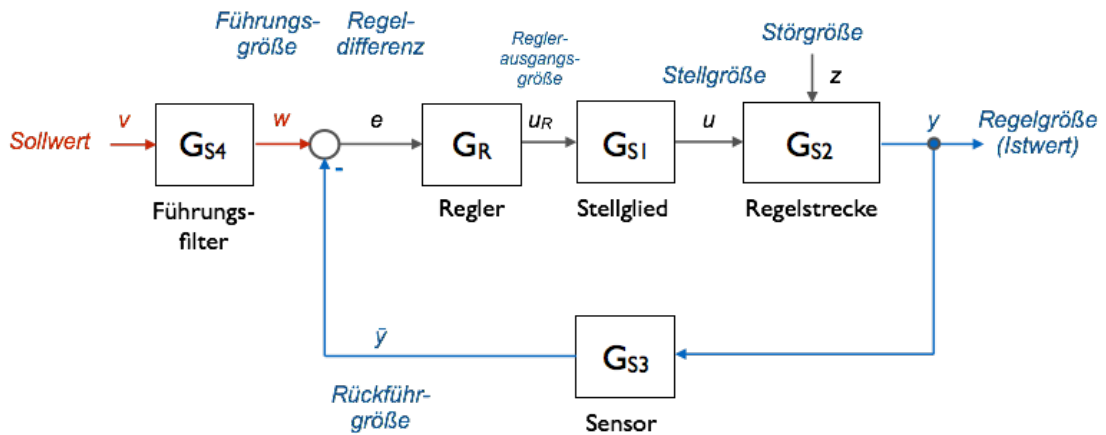
Abkürzungen

ADC	Analoge-Digital Converter (Analog-Digital-Wandler)
$T = 1/f$	Schwingungsdauer, Periodendauer [s]
$f = 1/T$	Frequenz, Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit [1/s]
$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$	Kreisfrequenz, Winkelgeschwindigkeit der Kreisbewegung [1/s]
E	Energie [Joule, J, N m, W s, kg m ² / s ²] potentielle Energie $E_p = 1/2 k y^2$, kinetische Energie, Translation $E_k = 1/2 m v^2$, kinetische Energie, Rotation $E_r = 1/2 J \omega^2$, Energie elektrisches Feld $E_C = 1/2 C U^2$, Energie magnetisches Feld $E_L = 1/2 L I^2$
G(s)	Übertragungsfunktion (Abbild der Impulsantwort)
H(s)	Übergangsfunktion (Abbild der Sprungantwort)
PWM	Pulsweitenmodulation
SISO	Single Input - Single Output (Eingrößensystem)

Literatur

- (1) Manfred Berger, Grundkurs der Regelungstechnik (mit Anwendungen der Student Edition von MATLAB und SIMULINK), Books on Demand Verlag, 2001, ISBN-13: 978-3831108473
- (2) Holger Lutz und Wolfgang Wend, Taschenbuch der Regelungstechnik: mit MATLAB und Simulink, Harri Deutsch Verlag, 2012, 9. Auflage: 9, ISBN-13: 978-3817118953
- (3) Jan Lutze, Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf Einschleifiger Regelungen, Springer Verlag, 2013, 9. Auflage, ISBN-13: 978-3642295324
- (4) Jan Lutze, Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung, Springer Verlag, 2013, 7. Auflage, ISBN-13: 978-3642295614
- (5) Tobias Fläming-Vetter, Lineare Regler in der Praxis, Folien zur Vorlesung mit Laborversuch, DHBW-Stuttgart, Mechatronik, 2014
- (6) Roboternetz, Übersicht über Regler, <http://rn-wissen.de/index.php/Regelungstechnik>

Anhang A - Regelkreis



Mathematische Formeln

Laplace Transformation

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Grenzwertsätze der Laplace-Transformation:

Anfangswertsatz: $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) s$

Endwertsatz: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} F(s) s$

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung (wobei $F(t)$ = Stammfunktion von $f(t)$):

$$\int_a^b f(\tau) d\tau = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$$

Partielle Integration:

$$\int u(\tau) v'(\tau) d\tau = u(t) v(t) + \int u'(\tau) v(\tau) d\tau$$

Beispiele zur Laplace Transformation

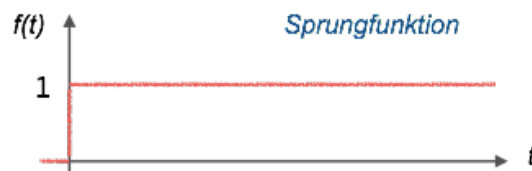
Impulsfunktion:



Definition im Zeitbereich: $\delta(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow 0$; 0 sonst

Bildfunktion: $F(s) = 1$

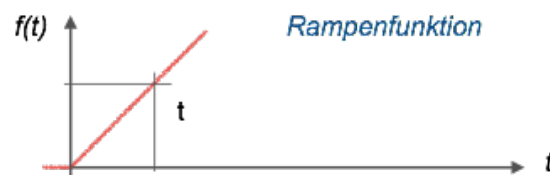
Sprungfunktion:



Definition im Zeitbereich: $f(t) = 1$ für $t \geq 0$; 0 sonst

Bildfunktion: $F(s) = 1/s$

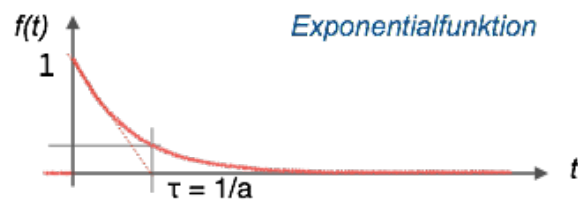
Rampenfunktion:



Definition im Zeitbereich: $f(t) = t$ für $t \geq 0$; 0 sonst

Bildfunktion: $F(s) = 1/s^2$

Exponentialfunktion:



Definition im Zeitbereich: $f(t) = e^{-at}$ für $t \geq 0$; 0 sonst

Bildfunktion: $F(s) = 1/(s+a)$

Polstelle: $p = -a$

Sinus- und Cosinus:

Definition im Zeitbereich:	$f_1(t) = \sin(\omega t)$ für $t \geq 0$; 0 sonst
	$f_2(t) = \cos(\omega t)$ für $t \geq 0$; 0 sonst
Bildfunktion:	$F_1(s) = \omega / (s^2 + \omega^2)$
	$F_2(s) = s / (s^2 + \omega^2)$
Polstellen:	$p_{1,2} = \pm j\omega$ (konjugiert komplexes Polpaar)


Gedämpfte Schwingung (Sinus):

Definition im Zeitbereich:	$f(t) = e^{-at} \sin(\omega t)$ für $t \geq 0$; 0 sonst
Bildfunktion:	$F(s) = \omega / ((s + a)^2 + \omega^2)$
Polstellen:	$p_{1,2} = -a \pm j\omega$ (konjugiert komplexes Polpaar)

Anhang B - Reglertypen

P-Regler

Regel-differenz



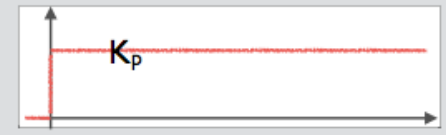
Regler

$u_R(t) = K_P * e(t)$
 $u_R(k) = K_P * e(k)$

Übertragungsfunktion


$G_R = K_P$

Sprungantwort



I-Regler

Regel-differenz



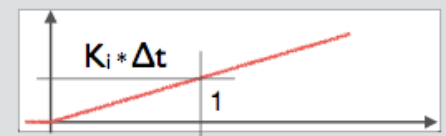
Regler

$u_R(t) = K_i * \int e(\tau) d\tau, \quad \tau = 0 \text{ bis } t$
 $u_R(k) = K_i * \Delta t * \sum e(i), \quad i = 0, \dots, k$

Übertragungsfunktion


$G_R(s) = K_i / s$

Sprungantwort



PID-Regler

Regel-differenz



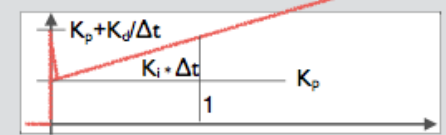
Regler

$u_R(t) = K_P * e(t) + K_i * \int e(\tau) d\tau + K_d * de(t)/dt$
 $u_R(k) = K_P * e(k) + K_i * \Delta t * \sum e(i) + K_d * (e(k) - e(k-1)) / \Delta t$

Übertragungsfunktion

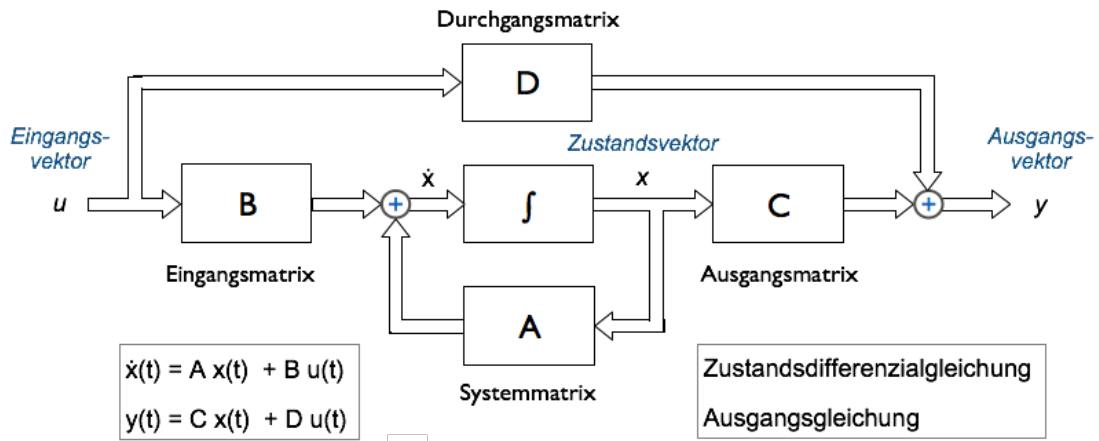
$G_R(s) = K_P + K_i / s + K_d s$

Sprungantwort

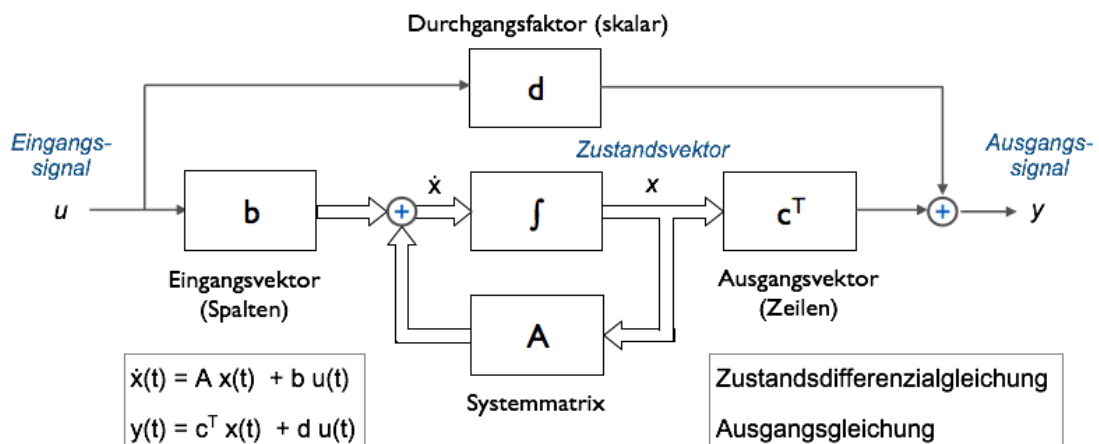


Anhang C - Zustandsbeschreibung und Zustandsregler

Mehrgrößensysteme (allgemeiner Fall)



Eingrößensystem



Mathematische Formeln: Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix A

Charakteristische Matrix Δ der Matrix A: $\Delta = (\lambda E - A)$

Charakteristisches Polynom:

$$\Delta(\lambda) = \text{Det}(\lambda E - A) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$$

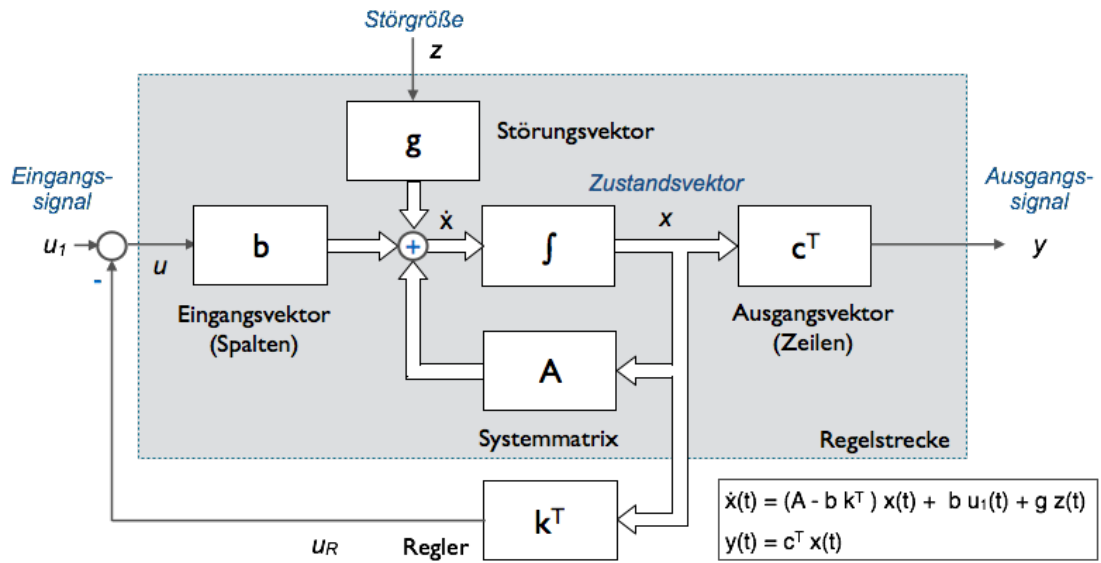
Eigenwerte χ^i = Nullstellen des charakteristischen Polynoms

Für die zugehörige Eigenvektoren x_r gilt:

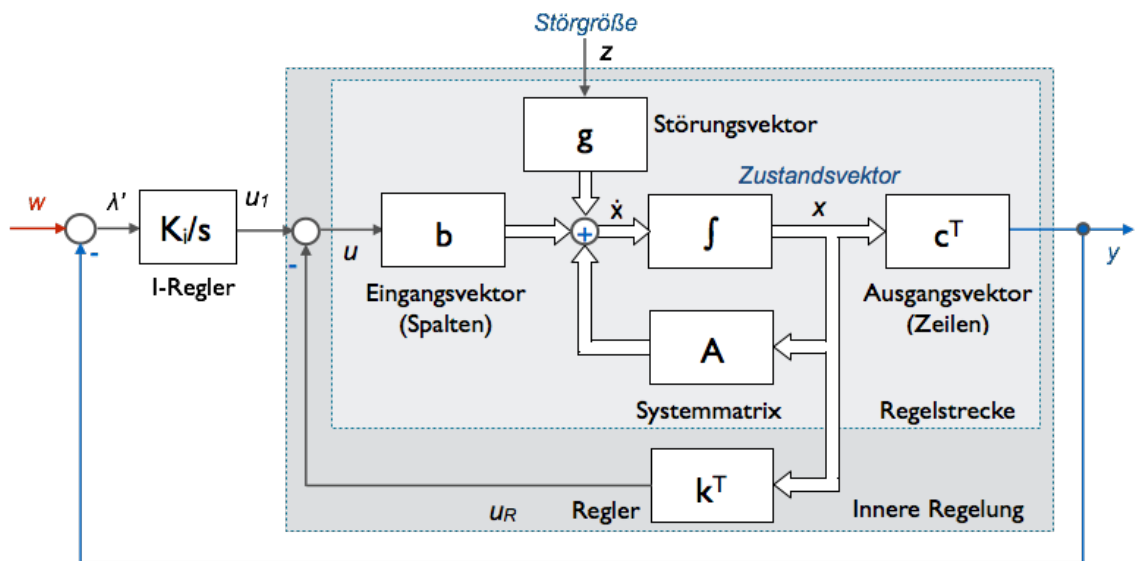
$$A x_r = \lambda_r x_r \quad \text{bzw.} \quad (E\lambda - A) x = 0$$

Diese Bedingung hat nichttriviale Lösungen nur für $\text{Det}(E\lambda - A) = 0$, d.h. für die Eigenwerte der Matrix A. Für eine Diagonalmatrix entsprechen die Eigenwerte den Diagonalelementen (d.h. $\lambda_r = a_{rr}$). Die zugehörigen Eigenvektoren sind die Einheitsvektoren e_r .

Zustandsregelung (Eingrößensystem)



Zustandsregelung mit vorgelagertem I-Regler (Eingrößensystem)

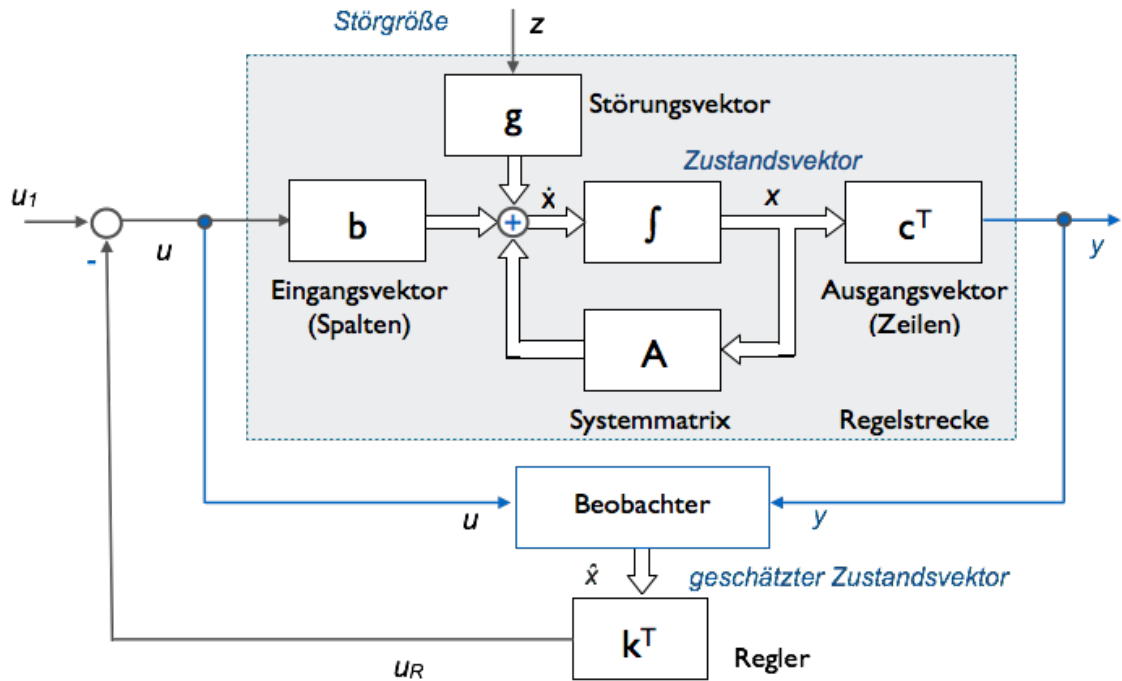


$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A - b k^T) & K_i b \\ -c^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$$

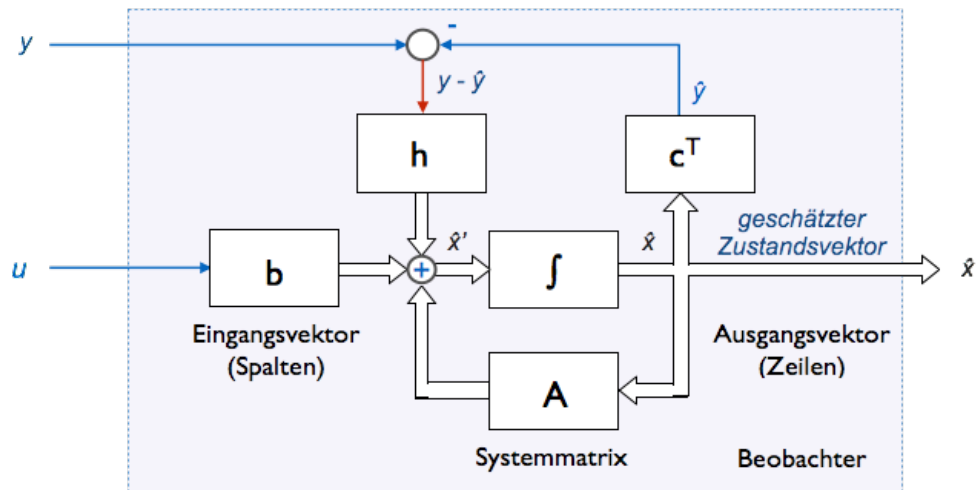
$$y(t) = \begin{bmatrix} -c^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix}$$

Anhang D - Zustandsschätzung

Regler mit Beobachter



Aufbau des Beobachters



Zustandsgleichungen des Beobachters:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - h c^T) \hat{x}(t) + b u(t) + h y(t)$$

$$\hat{y}(t) = c^T \hat{x}(t)$$

Anhang E - MATLAB Befehle

Laplace-Transformation: $F = \text{laplace}(f)$; $f = \text{ilaplace}(F)$

```

Beispiel: syms s t          /* Variablen deklarieren
          G=3.33/(1 + 0.08 *s) /* Vorgabe der Übertragungsfunktion (Dezimalpunkt=Punkt)
          g= ilaplace(G)     /* Rücktransformation
          g= (333/8) * exp(-(25*t)/2) /* Ergebnis
  
```

Differenzieren und Integrieren: $\text{diff}(f,t)$, $\text{int}(f,t)$

```

Beispiel: diff(g,t)        /* wurde oben definiert
          ans = -(8325/16) * exp(-(25*t)/2) /* Ergebnis
  
```

Partialbruchzerlegung: $\text{diff}(\text{int}(G,s))$

```

Beispiel: G=(s+3)/(s^2 -4) /* [G]=Datentyp sym
          diff(int(G,s))
          ans = 5/(4*(s-2)) - 1/(4*(s+2))
  
```

Gebrochen rationale Funktion durch Zeilenvektoren eingeben:

```

Beispiel: Z = [1, 3]; N = [1, 0, -4] /* Eingabe Zähler Z und Nenner N
  
```

Koeffizienten der Partialbruchzerlegung: $\text{residue}(Z, N)$

```

residue(Z,N)
ans = 1.25; -0.25 /* Ergebnis
[K, P] = residue(Z,N) /* alternative Eingabe für Koeffizienten und Polstellen
K=1.25; -0.25; P = 2.0; -2.0 /* Ergebnis
  
```

Z und N in die Übertragungsfunktion übernehmen:

```

G = tf(Z, N) /* tf = transfer function; [G]=Datentyp tf
(s + 3) / (s^2 - 4) /* Ergebnis
  
```

Pole und Nullstellen berechnen:

```

zeroes = tzero(G)
zeroes = -3.0 /* Ergebnis
poles = pole(G)
poles = 2.0; -2.0 /* Ergebnis
  
```

Zustandsgleichungen eingeben und Übertragungsfunktion berechnen:

Beispiel: Gleichstrommotor aus Übung 3.2

```
syms s t
A = [-3000, -47.74; 795.7, 0]; c=[0, 1] /* Systemmatrix, Ausgangsvektor (Zeilen)
b=[1000; 0]; d=0; /* Eingangsvektor ([b1; b2] = [b1, b2]' Spaltenvektor)
sE = s * eye(2) /* s*Einheitsmatrix E (zweidimensional)
G = c*inv(sE-A)*b /* Übertragungsfunktion berechnen
G = 397850000/(500*s^2 + 1500000*s + 18993359) /* Ergebnis; [G]=Datentyp sym
```

Kürzer mit G als Datentyp tf (transfer function = Übertragungsfunktion):

```
sys = ss(A, b, c, d) /* System sys aus Zustandsmodell erstellen
G=tf(sys) /* Transferfunktion G aus sys berechnen
```

Beispiel: Berechnung der Pole und Nullstellen

```
Z= 795700; N=[1, 3000, 37990] /* Eingabe Zähler und Nenner
G = tf(Z, N) /* tf = transfer function; [G]=Datentyp tf
poles=pole(G) /* Pole berechnen
poles = -2987.3; -12.7 /*Ergebnis
```

Beispiel: Übertragungsfunktion direkt aus den Zustandsgleichungen berechnen

```
sys = ss(A, b, c, d) /* A, b, c und d=0 vorher eingeben
sys = /* Ergebnis = Zustandsmodell sys
a = x1 x2 x3 x4
x1 0 1 0 0
x2 0 0 15 0
x3 0 0 0 1
x4 0 0 -3.125 0
b = u1
x1 0
x2 0.001
x3 0
x4 -0.000125
c = x1 x2 x3 x4
y1 1 0 8 0
d = 0
G=tf(sys) /* G = Übertragungsfunktion aus Zustandsmodell
```

Übertragungsfunktion eingeben und Zustandsgleichungen berechnen:

```

Z = 79.5; N=[1, 30, 3.81]      /* Z- und N-Polynom eingeben
G = tf(Z, N)                  /* tf = transfer function; [G]=Datentyp tf
G = 992.5 / (125 s^2 + 3750 s + 477) /*Ergebnis: Continuous-time transfer function.
ZGL = ss(G)                   /*Zustandsmodell berechnen; [ZGL]Datentyp ss
ZGL =                          /* Ergebnis: Continuous-time state-space model.

a =          x1  x2
          x1  -30 -1.905
          x2   2   0
b =          u1
          x1   8
          x2   0
c =          x1  x2
          y1   0 4.969
d = 0
[A,B,C,D]=ssdata(ZGL)        /* Ergebnis den Variablen A,B, C, D zuweisen

```

Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen: eig(A)

```

Beispiel: Matrix A =   -43.0000  -0.1800  0.8000
                      7.9600    0        0
                      0        -1.0000  0
eig(A)                 /* Eigenwerte berechnen
ans =  -42.9701 + 0.0000i      /* Ergebnis
       -0.0149 + 0.3847i
       -0.0149 - 0.3847i

```

Beispiel: [V, D, W] = eig(A) /* Linke Eigenvektoren V, Diagonalmatrix D, rechte Eigenvektoren W

```

V =  -0.9833 + 0.0000i  0.0173 + 0.0013i  0.0173 - 0.0013i      /* Ergebnis
     0.1821 + 0.0000i  0.0139 - 0.3589i  0.0139 + 0.3589i
     0.0042 + 0.0000i  0.9331 + 0.0000i  0.9331 + 0.0000i
D =  -42.9701 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i
     0.0000 + 0.0000i  -0.0149 + 0.3847i  0.0000 + 0.0000i
     0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  -0.0149 - 0.3847i

```

$$W = \begin{bmatrix} -0.9998 + 0.0000i & 0.1703 + 0.0015i & 0.1703 - 0.0015i \\ -0.0038 + 0.0000i & 0.9197 + 0.0000i & 0.9197 + 0.0000i \\ 0.0186 + 0.0000i & -0.0169 + 0.3535i & -0.0169 - 0.3535i \end{bmatrix}$$

Optimale Reglerparameter: Optimierungskriterium: mit Q bzw r gewichtete mittlere quadratische Abweichungen der Zustände x_i und der Stellgröße u vom Ruhepunkt $x_{i0}=0, u_0=0$

$$k = \text{lqr}(A, b, Q, r)$$

Beispiel:

```
A=[-30, -0.48; 7.96, 0] /* Eingabe Systemmatrix
B=[10; 0] /* Eingabe Eingangsvektor
QS=ctrb(A,B) /* Berechnung der Steuerbarkeitsmatrix Qs
QS = 10.0000 -300.0000 /* Ausgabe der Steuerbarkeitsmatrix (det(Qs) ≠ 0)
      0 79.6000
Q=[0,0; 0,1] /* Eingabe der Bewertungsmatrix (q11=0, q22=1)
k=lqr(A, B, Q, 1) /* Berechnung der optimalen Reglerparameter
k = 0.2431 0.9532 /* Ergebnis
```

Steuerbarkeit: Ein System ist steuerbar, wenn sich alle Zustandsgrößen durch die Eingangsgröße $u(t)$ beeinflussen lassen. Ein vollständig steuerbares System lässt sich jedem Initialzustand $x(t_0)$ aus in einen beliebigen Zustand $x(t)$ überführen. Nachweis: Die Determinante der Steuerbarkeitsmatrix ist ungleich Null.

Beispiel:

```
QS=ctrb(A,B) /* Berechnung der Steuerbarkeitsmatrix Qs
QS=ctrb(sys) /* Berechnung der Steuerbarkeitsmatrix Qs
```

Beobachtbarkeit: Ein System ist beobachtbar, wenn innerhalb endlicher Zeit aus dem Eingangssignal $u(t)$ und dem Ausgangssignal $y(t)$ des Systems der Zustandsvektor $x(t)$ bestimmt werden kann. Bei einem beobachtbaren System lassen sich Zustandsgrößen durch einen Beobachter ohne direkte Messung rekonstruieren. Nachweis: Die Determinante der Beobachtbarkeitsmatrix ist ungleich Null.

Beispiel:

```
QB=obsv(A,C) /* Berechnung der Beobachtbarkeitsmatrix QB
QB=obsv(sys) /* Berechnung der Beobachtbarkeitsmatrix QB
```

Kanonische Formen der Zustandsgleichungen

Eingabe des Systems:

$A=[0,1,0,0; 0, 0,15,0; 0,0,0,1; 0,0,3.125,0]$; $b=[0; 0.001; 0; 0.000125]$; $c=[1,0,0,0]$; $d=0$;

$sys=ss(A,b,c,d)$ /* zeigt Kontrollausgabe

Übertragungsfunktion: $G=tf(sys)$ /* zeigt Kontrollausgabe

Diagonalform (Modalform):

$canon(sys)$ /* bzw. $canon(sys, 'modal')$; zeigt Kontrollausgabe

$a =$	0	1.49e-08	0	0
	0	0	0	0
	0	0	1.768	0
	0	0	0	-1.768

$b = [0.004596; 0.004596; -1.628e-08; 1.563e-05]$

$c = [0.007693, -0.007693, 0, 0]$

Beobachternormalform (Companion form):

$canon(sys, 'companion')$ /* zeigt Kontrollausgabe

$a =$	0	0	0	0
	1	0	0	0
	0	1	0	3.125
	0	0	1	0

$b = [1; 0; 0; 0]$; $c = [0, 0.000125, 0, 0.0003906]$

Regelungsnormalform (Beispiel 4x4 Matrix):

$QS=ctrb(A,b)$ /* Steuerbarkeitsmatrix mit Kontrollausgabe

$Qinv=QS^{-1}$; /* inverse Steuerbarkeitsmatrix

$q4T=Qinv(4,:)$; /* 4. Zeile (Zeile N) in Zeilenvektor q4T extrahieren

$Tinv = [q4T; q4T*A; q4T*A^2; q4T*A^3]$; /* Transformationsmatrix T' berechnen

$T=Tinv^{-1}$; /* Transformationsmatrix T berechnen

$Ar=Tinv*A*T$ /* Regelungsnormalform von A berechnen, Ergebnis:

0	1.0000	0	0
0	0	1.0000	0
0	0	0	1.0000
0	0	3.1250	0

$br=Tinv*b$ /* Regelungsnormalform des Eingangsvektors b,

/*Ergebnis: $b = [0; 0; 0; 1]$

Rücktransformation:

$A = T \cdot A_r \cdot T^{-1}$

/* Rücktransformation A, Ergebnis:

```
0  1.0000    0    0
0    0 15.0000    0
0    0    0  1.0000
0    0  3.1250    0
```

$b = T \cdot b_r$

/* Rücktransformation b, Ergebnis:

$b = 1.0e-03 * [0; 1; 0; 0.1250]$

Reglerauslegung durch Polvorgabe:

MATLAB unterstützt eine Abkürzung durch diese Kette:

```
sys=ss(A,b,c,d);          /* System im Zustandsraum definieren
rank(ctrb(sys))          /* Rang der Steuerbarkeitsmatrix prüfen
    ans = 4                /* Ergebnis
P=[-2, -1.8, -1.6, -1.4]; /* gewünschte Pole (=Eigenwerte der Systemmatrix)
k = place(A, b, P)       /* die Reglerkonstanten durch Polvorgabe ermitteln
    k = 1.0e+05 * [-0.0645, -0.1545, 2.1453, 1.7800] /* Ergebnis
```

Anhang F - Kalman Filter

```
package de.dhbwStuttgart.tet;

public class Kalman {

//Parameter estimation by Kalman filter
static final int m = 4; //column and row index

public static void main(String[] args) {

//generate and initialize objects
double[][] P = new double[m][m];
for (int i = 0; i < m; i++) P[i][i] = 1000000.;
double[] f = new double[m], T = new double[m],
K = new double[m], pf = new double[m], fTp = new double[m];
double y = 0., sc=0., yest = 0.;
double input[] = new double[20], output[] = new double[20];
int k = 0; //loop index

//fill input and output vector
for (int i = 0; i < 20; i++) input[i] = 24.;

output[0]=8.73; output[1]=16.76; output[2]=23.90;
output[3]=30.23; output[4]=35.84; output[5]=40.82;
output[6]=45.24; output[7]=49.16; output[8]=52.64;
output[9]=55.73; output[10]=58.47; output[11]=60.90;
output[12]=63.05; output[13]=64.96; output[14]=66.66;
output[15]=68.16; output[16]=69.50; output[17]=70.68;
output[18]=71.74; output[19]=72.67;

//initialize vectors K and T
for (int i = 0; i < m; i++){
f[i]=0.; K[i]=0.; T[i]=0.;
}

// open text file for results
Out.open("Kalman.txt");

//loop with index k
for (k = 0; k < 20; k++) {

/*Step 1: update measurement vector f=(y(k-1), y(k-2), ...,
u(k), u(k-1), ...) and y(k); Note: for better legibility,
Step 1 is specialized for 2nd order systems (m=4)*/
if ((k-1) >= 0) f[0] = output[k-1];
if ((k-2) >= 0) f[1] = output[k-2];
if (k >= 0) f[2] = input[k];
```

```

if ((k-1) >= 0) f[3] = input[k-1];
y=output[k];

//Step 2a: calculate K
// pf = P * f
for (int j = 0; j<m; j++){
    pf[j] = 0.;
    for (int i = 0; i<m; i++){
        pf[j]= pf[j] + P[j][i]*f[i];
    }
}

// sc = 1/(fT * pf + 1) is a scalar term
sc=0.;
for (int i = 0; i<m; i++){
    sc = sc + f[i]*pf[i];
}
sc = 1./(sc+1.);

// K = pf * sc
for (int i = 0; i<m; i++){
    K[i] = pf[i]*sc;
}

//Step 2b: calculate P
// fTp = fT * P
for (int j = 0; j<m; j++){
    fTp[j] = 0.;
    for (int i = 0; i<m; i++){
        fTp[j]= fTp[j] + f[i]*P[i][j];
    }
}
// Matrix P = P - K*fTp
for (int j = 0; j<m; j++){
    for (int i = 0; i<m; i++){
        P[j][i]= P[j][i] - K[i]*fTp[j];
    }
}

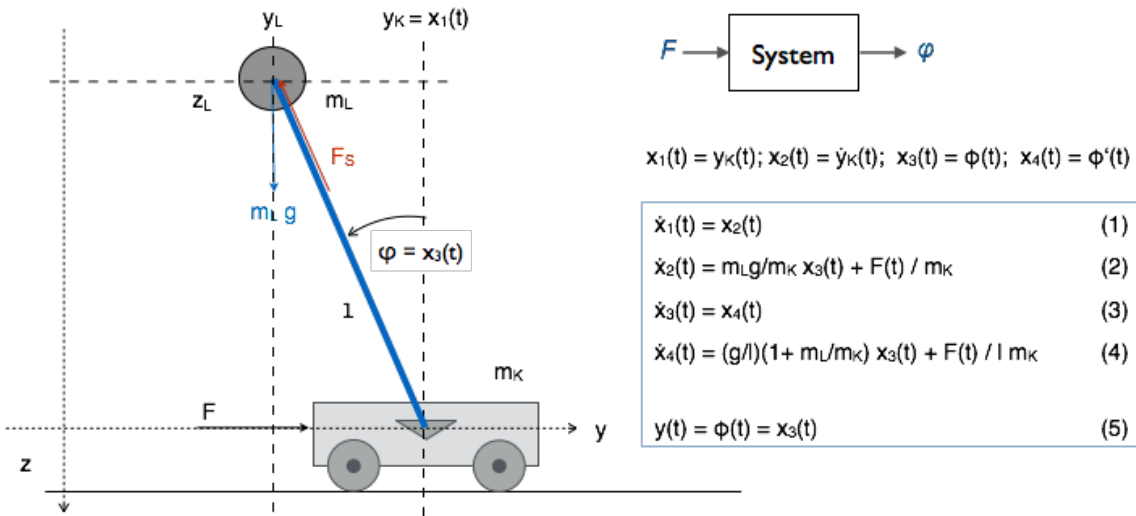
//Step 3: calculate coefficient vector T
// yest = fT * T is a scalar term
yest = 0.;
for (int i = 0; i<m; i++){
    yest = yest + f[i]*T[i];
}
// T = T + K * (y(k)- yest)
for (int i = 0; i<m; i++){
    T[i] = T[i] + K[i]*(y - yest);
}

```

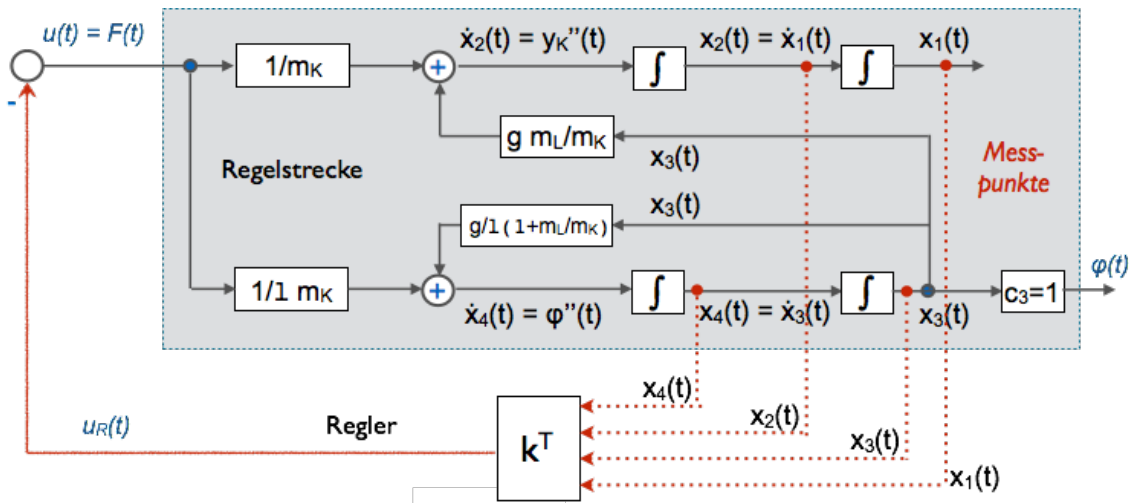
```
        //write results to file
        Out.println("loop " + k);
        for (int i=0;i<m;i++) Out.println("T("+ +")="+ T[i]);
        Out.println();
    } //end loop
    Out.close();
}
}
```

Anhang G - Signalflüsse

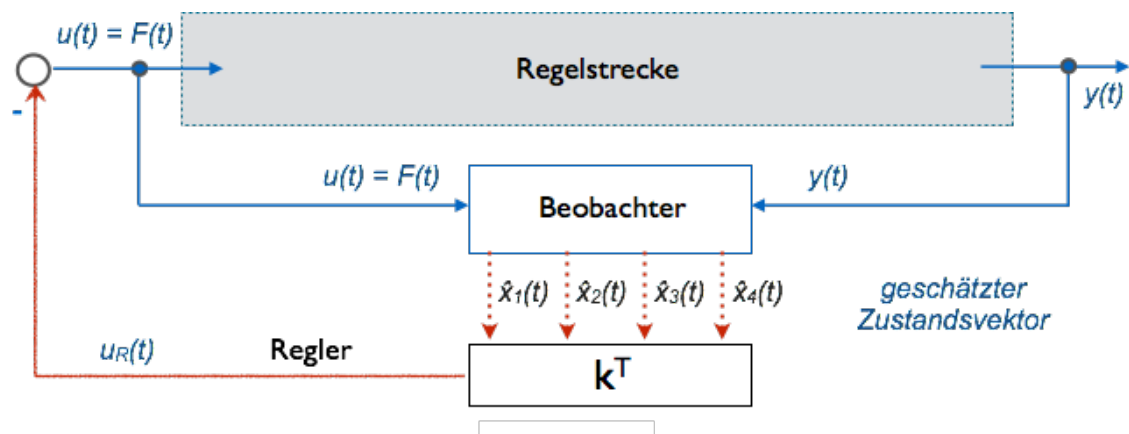
Beispiel: Inverses Pendel



Signalfluss mit Zustandsrückführung:



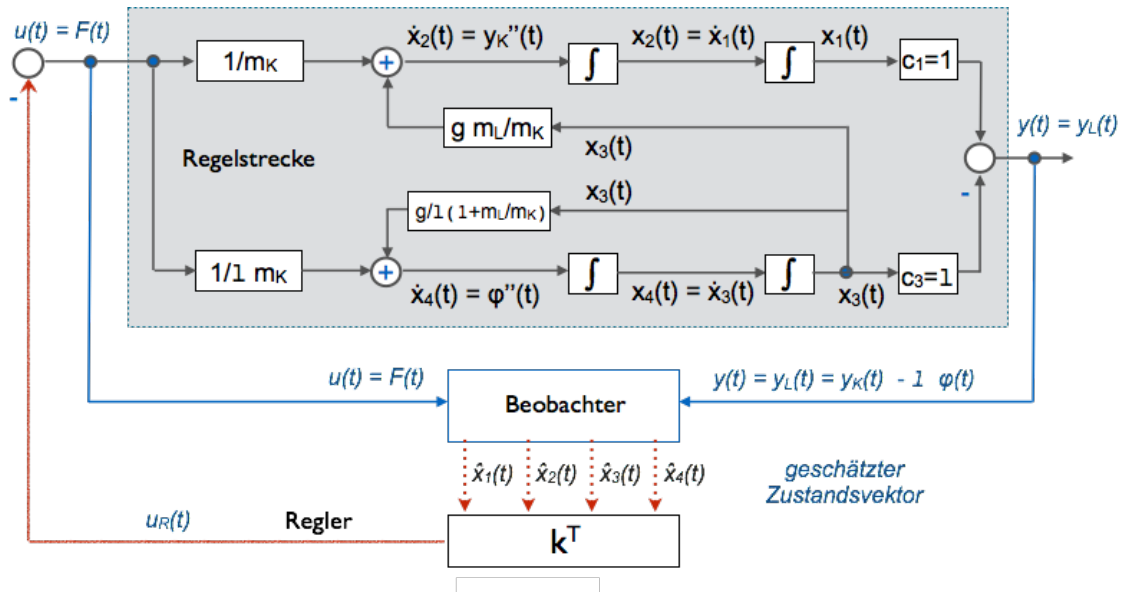
Zustandsschätzung durch Beobachter:



Bobachtbarkeit:

Ob der Zustandsvektors sich aus dem Ausgangssignal bei gegebenen Eingangssignal rekonstruieren lässt, hängt von den Eigenschaften des Systems ab. Im gegebenen Beispiel lassen sich aus $y(t) = \phi(t)$ zwar $\hat{x}_3(t) = \phi(t)$ und $\hat{x}_4(t) = \phi'(t)$ ableiten, nicht jedoch die Position des Wagens $\hat{x}_1(t) = y_K(t)$ und die Bewegung des Wagens $\hat{x}_2(t) = y_K'(t)$. Nachweis: Rang der Beobachtbarkeitsmatrix in Abhängigkeit des Ausgangsvektors c^T (MATLAB Befehle in Anhang E).

Regelung mit Beobachter:



Signalffluss des Beobachters:

