

Formal Languages and Automata

Übungsklausur

Jan Hladik und Stephan Schulz

20. November 2015

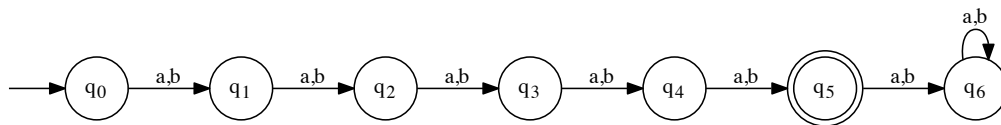
Aufgabe 1: (2+4+4P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie für die folgenden Sprachen einen DFA an

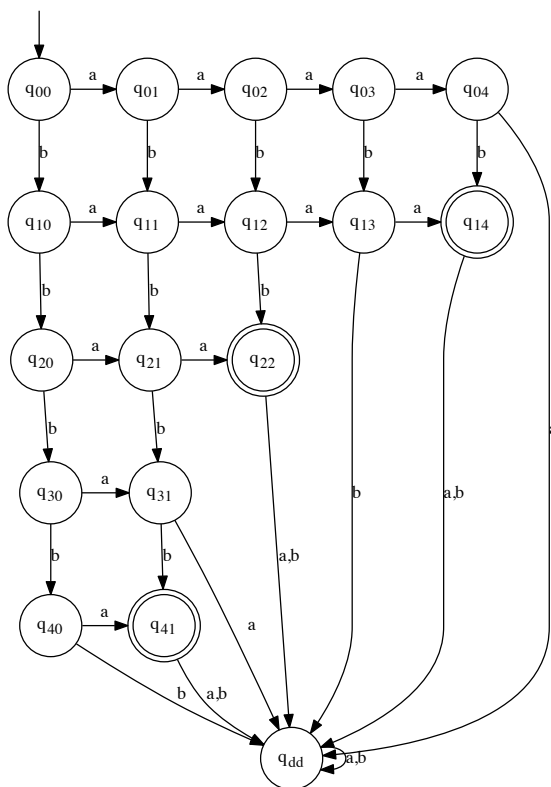
- a) $L_0 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a + |w|_b = 5\}$
- b) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \cdot |w|_b = 4\}$
- c) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \geq 2 \text{ und } w[|w| - 1] = w[2]\}$

Lösung:

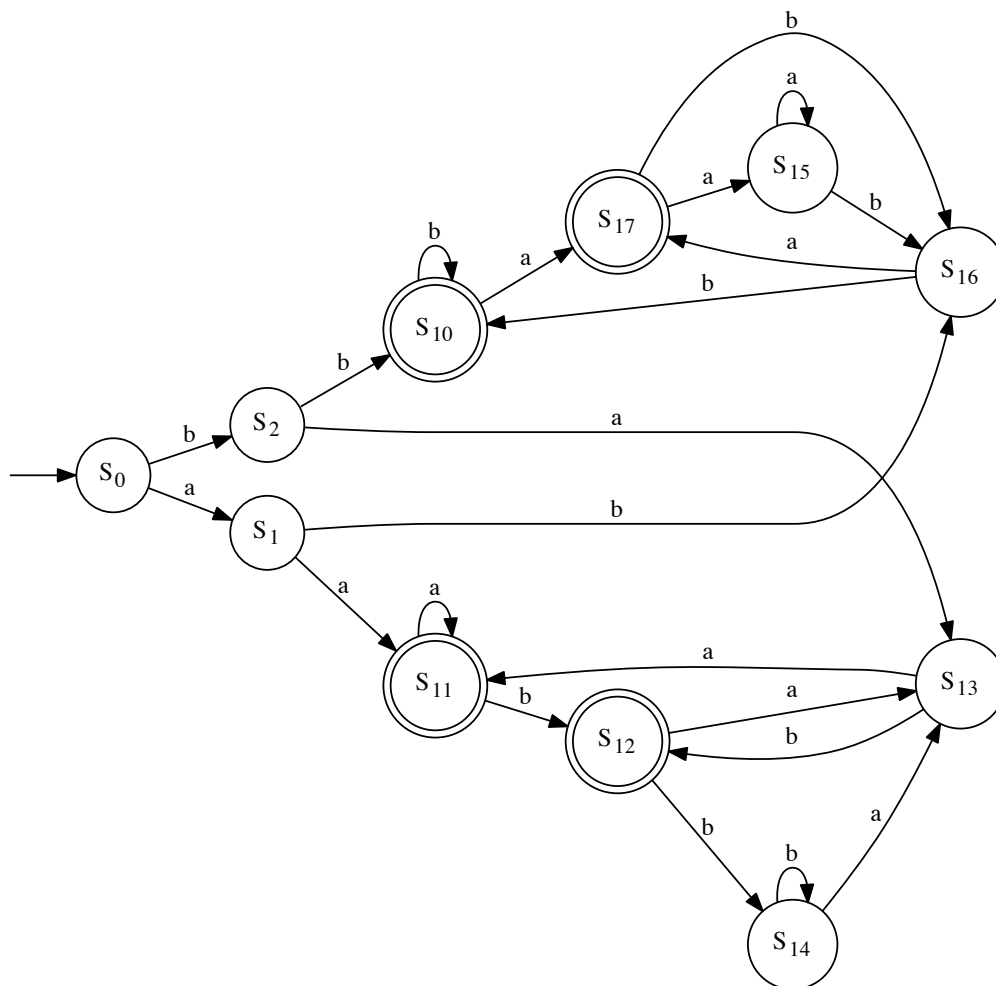
- a) Idee: Zustand zählt die Anzahl der gelesenen Zeichen. Bei 5 wird akzeptiert, bei mehr ist Ende.



- b) Idee: Nach rechts zählt der Automat das Vorkommen von a, nach unten Vorkommen von b. Erfolg bei $4 \cdot 1, 1 \cdot 4, 2 \cdot 2$. Junk-Zustant ist q_{dd}



- c) Idee: Der Teilautomat rechts oben (ab S10) akzeptiert Worte, deren vorletztes Zeichen ein b ist. Der Teilautomat unten (ab S11) akzeptiert Worte, deren vorletztes Zeichen ein a ist. Die Logik davor sorgt dafür, dass erstens richtig in diese Automaten eingestiegen wird, und das zweitens auch die Spezialfälle aa und bb richtig erkannt werden.



Aufgabe 2: (2+2+2+3+5P)

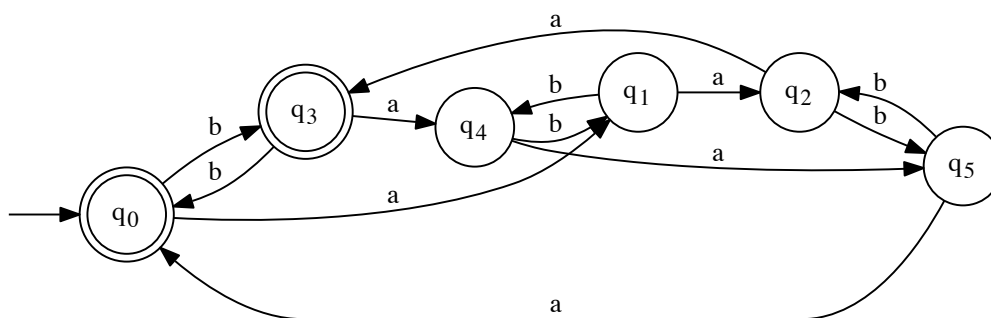


Abbildung 1: Automat A_3

Betrachten Sie den deterministischen endlichen Automaten A_3 in Abbildung 1.

- Welche Konfigurationsfolge durchläuft der Automat beim Bearbeiten des Wortes $ababab$?
- Welche Konfigurationsfolge durchläuft der Automat beim Bearbeiten des Wortes $aaabbb$?
- Geben Sie den Automaten in tabellarischer Form an.
- Geben Sie eine formale Beschreibung von $L(A_3)$
- Minimieren Sie den Automaten mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren.

Lösung:

c)

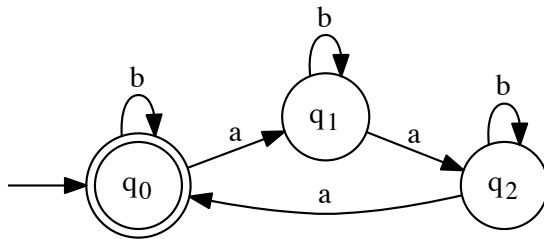
		a	b
-> *	q0	q1	q3
	q1	q2	q4
	q2	q3	q5
*	q3	q4	q0
	q4	q5	q1
	q5	q0	q2

d) $L(A_3) = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \bmod 3 = 0\}$

e) # Adding (q4, q5) to V because $\delta(q4, a) = q5$, $\delta(q5, a) = q0$, and $(q5, q0) \in V$
 # Adding (q1, q5) to V because $\delta(q1, a) = q2$, $\delta(q5, a) = q0$, and $(q2, q0) \in V$
 # Adding (q1, q2) to V because $\delta(q1, a) = q2$, $\delta(q2, a) = q3$, and $(q2, q3) \in V$
 # Adding (q2, q4) to V because $\delta(q2, a) = q3$, $\delta(q4, a) = q5$, and $(q3, q5) \in V$

	q1	q0	q3	q2	q5	q4
q1	o	X	X	X	X	o
q0	X	o	o	X	X	X
q3	X	o	o	X	X	X
q2	X	X	X	o	o	X
q5	X	X	X	o	o	X
q4	o	X	X	X	X	o

Merging q3 into q0
 # Merging q4 into q1
 # Merging q5 into q2



Aufgabe 3: (3+2+5P)

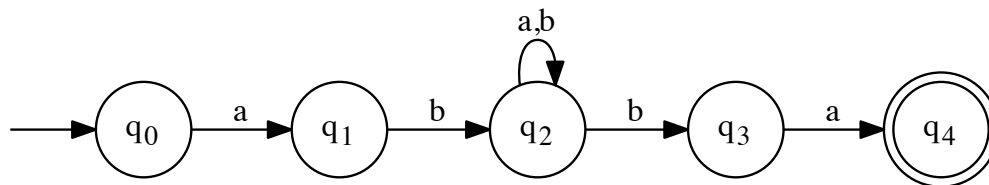


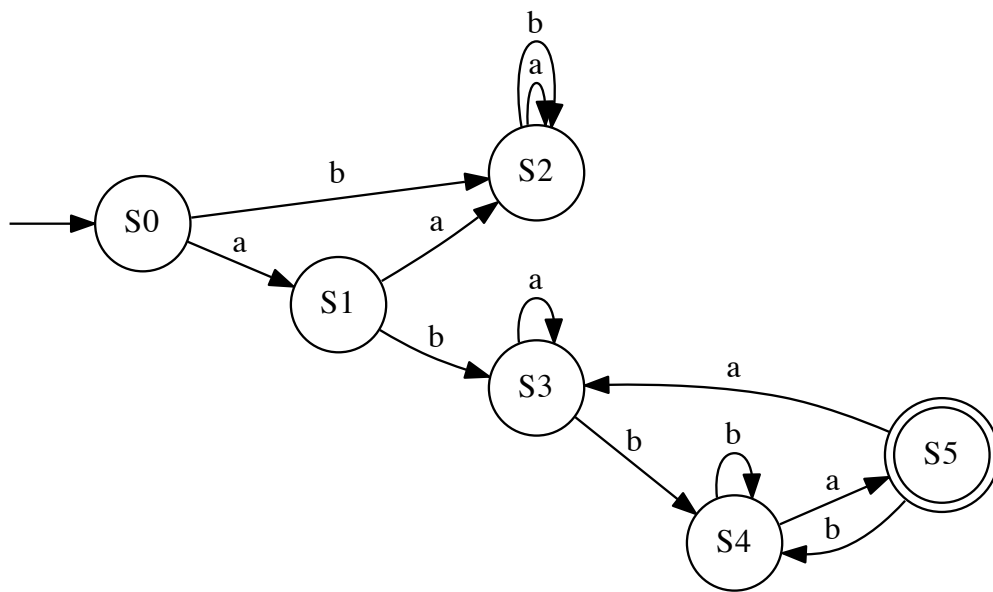
Abbildung 2: Automat A_4

Betrachten Sie den NFA A_4 in Abbildung 2.

- Welche möglichen Ableitungen durchläuft der Automat auf dem Wort $abbbba$?
- Beschreiben Sie $L(A_4)$ als Menge.
- Konvertieren Sie A_4 mit dem in der Vorlesung angegebenen Verfahren in einen deterministischen endlichen Automaten.

Lösung:

- $L(A_4) = \{abwba \mid |w \in \Sigma^*\}$
- $S_0 = \text{frozenset}(['q_0'])$
 $\Delta(S_0, a) = \text{frozenset}(['q_1'])$
 $S_1 = \text{frozenset}(['q_1'])$
 $\Delta(S_0, b) = \text{frozenset}([])$
 $S_2 = \text{frozenset}([])$
 $\Delta(S_1, a) = \text{frozenset}([])$
 State is equal to S_2
 $\Delta(S_1, b) = \text{frozenset}(['q_2'])$
 $S_3 = \text{frozenset}(['q_2'])$
 $\Delta(S_2, a) = \text{frozenset}([])$
 State is equal to S_2
 $\Delta(S_2, b) = \text{frozenset}([])$
 State is equal to S_2
 $\Delta(S_3, a) = \text{frozenset}(['q_2'])$
 State is equal to S_3
 $\Delta(S_3, b) = \text{frozenset}(['q_3', 'q_2'])$
 $S_4 = \text{frozenset}(['q_3', 'q_2'])$
 $\Delta(S_4, a) = \text{frozenset}(['q_2', 'q_4'])$
 $S_5 = \text{frozenset}(['q_2', 'q_4'])$
 $\Delta(S_4, b) = \text{frozenset}(['q_3', 'q_2'])$
 State is equal to S_4
 $\Delta(S_5, a) = \text{frozenset}(['q_2'])$
 State is equal to S_3
 $\Delta(S_5, b) = \text{frozenset}(['q_3', 'q_2'])$
 State is equal to S_4



Aufgabe 4: (3+3+3P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_1 = \{a^n w a^n \mid n \in \mathbb{N}, w \in \Sigma^*\}$.

- a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_1$ an.
- b) Überprüfen Sie, welche die folgenden Worte in L_1 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.
 - b1) ε
 - b2) $babab$
 - b3) $aabbaaa$
- c) Zeigen oder widerlegen Sie: L_1 ist regulär.

Lösung: Wichtige Idee: $0 \in \mathbb{N}$, d.h. $L_1 \supseteq \{a^0 w a^0 \mid w \in \Sigma^*\}$ und damit $L_1 = \Sigma^*$

- a) $P = \{S \rightarrow aS, S \rightarrow bS, S \rightarrow \varepsilon\}$. Formal ist das 4-Tuplen anzugeben!
- c) L_1 wird von der in a) angegebenen rechts-linearen Grammatik erzeugt. Damit ist L_1 regulär. Alternativ: $L_1 = L((a + b)^*)$

Aufgabe 5: (3+3+4P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_8 = \{a^n b w a^n \mid w \in \Sigma^*, n \in \mathbb{N}\}$.

- a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_8$ an.
- b) Überprüfen Sie, welche die folgenden Worte in L_8 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.
 - a1) $abba$
 - a2) $ababaa$
 - a3) $aababa$
- c) Zeigen oder widerlegen Sie: L_8 ist regulär.

Lösung: Idee: Jedes Wort aus L_8 hat vor dem ersten b höchstens so viele a , wie am Ende (aber aus dem w können weitere a hinten dazu kommen).

- a) $P = \{S \rightarrow aSa, S \rightarrow bB, B \rightarrow aB, B \rightarrow bB, B \rightarrow \varepsilon\}$. Formal ist das 4-Tuplen anzugeben!
- c) L_8 ist nicht regulär. Beweis per Pumping-Lemma. Ein geeignetes Wort ist $a^k b a^k \in L_8$ - wenn man da pumpt, stehen vorne mehr a s als hinten, und das Wort ist nicht mehr in L_8 . In der Klausur wird ein vollständiger Beweis erwartet, nicht nur die Idee!

Aufgabe 6: (2+2+3P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $G_3 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow \varepsilon, S \rightarrow aSb\}, S)$.

- a) Bestimmen Sie den maximalen Typ der Grammatik in der Chomsky-Hierarchie
- b) Geben Sie eine formale Beschreibung der erzeugten Sprache
- c) Bestimmen Sie den maximalen Typ der Sprache in der Chomsky-Hierarchie. Falls Sprache und Grammatik unterschiedliche Typen haben, geben Sie eine äquivalente Grammatik mit dem maximal möglichen Typ an.

Aufgabe 7: (5+2+1P)

Sei $L = \{a^n b^m c^p d^q \mid m, n, p, q \in \mathbb{N} \text{ und } m + n = p + q\}$.

- a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, die die Sprache L erzeugt
- b) Geben Sie Ableitungen in G für die folgenden Worte an:
 - b1) $abbccdd$
 - b2) $abdd$

Aufgabe 8: (5+3P)

Betrachten Sie die folgende Grammatik G :

$$G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle \text{ mit}$$

- $V_N = \{S, A, B, C, D, E\}$
- $V_T = \{a, b, c\}$
- $P = \{$
 - $S \rightarrow Ac$
 - $A \rightarrow aAc$
 - $A \rightarrow ac$
 - $A \rightarrow B$
 - $B \rightarrow BE$
 - $A \rightarrow D$
 - $D \rightarrow bDc$
 - $D \rightarrow bc$
 - $D \rightarrow C$
 - $C \rightarrow c$
 - $C \rightarrow Cc$
 - $E \rightarrow a \mid b \mid c \}$

- a) Transformieren Sie G mit dem in der Vorlesung gezeigten Verfahren in Chomsky-Normalform.
- b) Geben Sie eine formale Beschreibung von $L(G)$.

Lösung:

- a) 1. Remove $A \rightarrow B, A \rightarrow D, D \rightarrow C$: Add
 - $A \rightarrow BE$
 - $A \rightarrow bDc$
 - $A \rightarrow bc$
 - $A \rightarrow c$
 - $A \rightarrow Cc$
 - $D \rightarrow c$
 - $D \rightarrow Cc$
2. Find terminating symbols: $\{a, b, c, E, C, D, A, S\}$. Intermediate result:

$$P = \{$$
 - $S \rightarrow Ac$
 - $A \rightarrow aAc$
 - $A \rightarrow ac$
 - $D \rightarrow bDc$
 - $D \rightarrow bc$
 - $C \rightarrow c$
 - $C \rightarrow Cc$
 - $E \rightarrow a \mid b \mid c$
 - $A \rightarrow bDc$
 - $A \rightarrow bc$
 - $A \rightarrow c$
 - $A \rightarrow Cc$
 - $D \rightarrow c$
 - $D \rightarrow Cc \}$

3. Find reachable symbols: $\{S, A, c, a, D, b, C\}$ Intermediate result:

$$P = \{ \begin{array}{l} S \rightarrow Ac \\ A \rightarrow aAc \\ A \rightarrow ac \\ D \rightarrow bDc \\ D \rightarrow bc \\ C \rightarrow c \\ C \rightarrow Cc \\ A \rightarrow bDc \\ A \rightarrow bc \\ A \rightarrow c \\ A \rightarrow Cc \\ D \rightarrow c \\ D \rightarrow Cc \end{array} \}$$

4. Add new NTS for a, b, c : Intermediate result:

$$P = \{ \begin{array}{l} S \rightarrow AV \\ A \rightarrow TAV \\ A \rightarrow TV \\ D \rightarrow UDV \\ D \rightarrow UV \\ C \rightarrow c \\ C \rightarrow CV \\ A \rightarrow UDV \\ A \rightarrow UV \\ A \rightarrow c \\ A \rightarrow CV \\ D \rightarrow c \\ D \rightarrow CV \\ T \rightarrow a \\ U \rightarrow b \\ V \rightarrow c \end{array} \}$$

5. Expand TAV, UDV Final result:

$$P = \{ \begin{array}{l} S \rightarrow AV \\ A \rightarrow TQ \\ A \rightarrow TV \\ D \rightarrow UR \\ D \rightarrow UV \\ C \rightarrow c \\ C \rightarrow CV \\ A \rightarrow UR \\ A \rightarrow UV \\ A \rightarrow c \\ A \rightarrow CV \\ D \rightarrow c \\ D \rightarrow CV \\ T \rightarrow a \\ U \rightarrow b \\ V \rightarrow c \\ R \rightarrow DV \\ Q \rightarrow AV \end{array} \}$$

- b) $L(G) = \{a^n b^m c^o \mid m, n, o \in \mathbb{N}, o > n + m\}$

Aufgabe 9: (3+3+3P)

Betrachten Sie die Grammatik $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ mit

- $V_N = \{S, A, B, R, T\}$
- $V_T = \{a, b\}$
- $P = \{$
 - $S \rightarrow AR$
 - $S \rightarrow AT$
 - $S \rightarrow AA$
 - $R \rightarrow SA$
 - $T \rightarrow SB$
 - $T \rightarrow b$
 - $B \rightarrow b$
 - $A \rightarrow a$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des CYK-Algorithmus, welche der folgenden Wörter in $L(G)$ sind.

- a1) *aaabb*
- a2) *aaaaab*

b) Geben Sie eine Charakterisierung von $L(G)$ an

Lösung:

a1) Processing word *aaabb*

Table initialized

		1	2	3	4	5	
1	A						
2		A					
3			A				
4				B, T			
5					B, T		
w	a	a	a	b	b		

Checking words of length 2
 Subword from 1 to 2 : aa
 Subword from 2 to 3 : aa
 Subword from 3 to 4 : ab
 Subword from 4 to 5 : bb

Checking words of length 3
 Subword from 1 to 3 : aaa
 Subword from 2 to 4 : aab
 Subword from 3 to 5 : abb

Checking words of length 4
 Subword from 1 to 4 : aaab
 Subword from 2 to 5 : aabb

Checking words of length 5
 Subword from 1 to 5 : aaabb
 Final table:

	1	2	3	4	5
1	A	S	R	S	T
2		A	S	T	S
3			A	S	T
4				B,T	-
5					B,T
w	a	a	a	b	b

Das Wort ist nicht in der Sprache!

a2) Processing word aaaaab

Table initialized

	1	2	3	4	5	6
1	A					
2		A				
3			A			
4				A		
5					A	
6						B,T
w	a	a	a	a	a	b

Checking words of length 2

Subword from 1 to 2 : aa
 Subword from 2 to 3 : aa
 Subword from 3 to 4 : aa
 Subword from 4 to 5 : aa
 Subword from 5 to 6 : ab

Checking words of length 3

Subword from 1 to 3 : aaa
 Subword from 2 to 4 : aaa
 Subword from 3 to 5 : aaa
 Subword from 4 to 6 : aab

Checking words of length 4

Subword from 1 to 4 : aaaa
 Subword from 2 to 5 : aaaa

Subword from 3 to 6 : aaab
 Checking words of length 5
 Subword from 1 to 5 : aaaaa
 Subword from 2 to 6 : aaaab
 Checking words of length 6
 Subword from 1 to 6 : aaaaab

Final table:

	1	2	3	4	5	6
1	A	S	R	S	R	S
2		A	S	R	S	T
3			A	S	R	S
4				A	S	T
5					A	S
6						B,T
w	a	a	a	a	a	b

Das Wort ist in der Sprache.

Aufgabe 10: (3+3+4P)

Gegeben sei der Kellerautomat $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_f\}, \{a, b, c, d\}, \{Z_0, X\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\})$, wobei δ in der folgenden Tabelle angegeben ist.

q_0	a	Z_0	XZ_0	q_0
q_0	a	X	XX	q_0
q_0	b	Z_0	XZ_0	q_1
q_0	b	X	XX	q_1
q_0	c	X	ε	q_2
q_0	d	X	ε	q_3
q_0	ε	Z_0	ε	q_f
q_1	b	X	XX	q_1
q_1	c	X	ε	q_2
q_1	d	X	ε	q_3
q_2	c	X	ε	q_2
q_2	d	X	ε	q_3
q_2	ε	Z_0	ε	q_f
q_3	d	X	ε	q_3
q_3	ε	Z_0	ε	q_f

a) Geben Sie, falls möglich, für die folgenden Wörter akzeptierende Konfigurationsfolgen an.

a1) $w_1 = aaacdd$

a2) $w_2 = abaccd$

b) Beschreiben Sie formal die von A akzeptierte Sprache als Menge.

Ende des Klausurumfangs

– Bonusaufgaben –

Aufgabe B1: (2+2+2+4P)

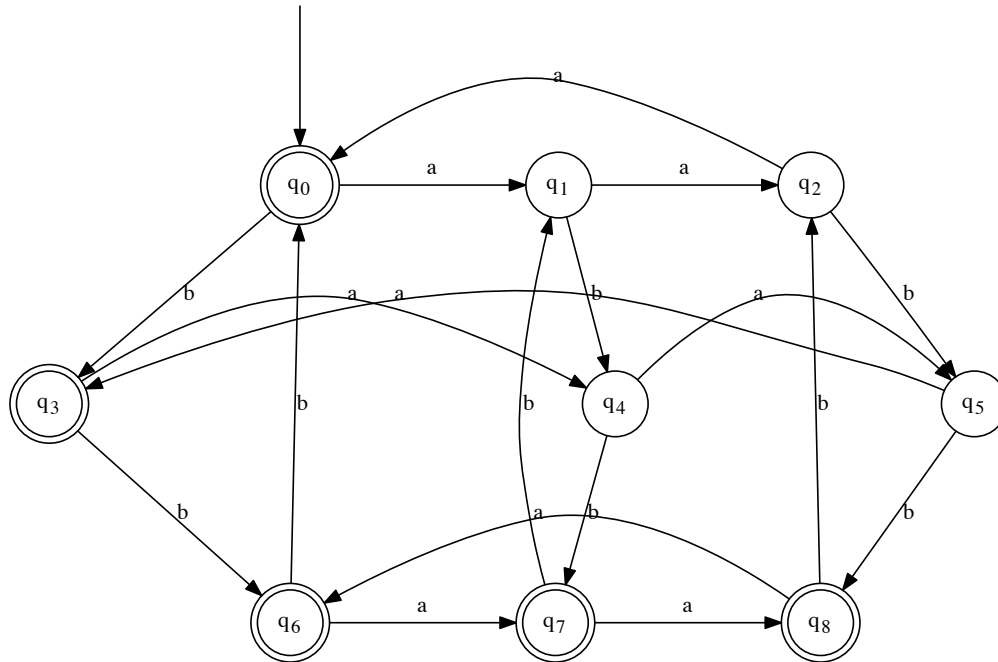


Abbildung 3: Automat A_2

Betrachten Sie den deterministischen endlichen Automaten A_2 in Abbildung 3.

- Welche Konfigurationsfolge durchläuft der Automat beim Bearbeiten des Wortes $ababab$?
- Welche Konfigurationsfolge durchläuft der Automat beim Bearbeiten des Wortes $aaabbb$?
- Geben Sie den Automaten in tabellarischer Form an.
- Geben Sie eine formale Beschreibung von $L(A_2)$

Aufgabe B2: (3+3+4P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_0 = \{a^n b b a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

- a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_0$ an.
- b) Überprüfen Sie, welche die folgenden Worte in L_0 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.
 - a1) bb
 - a2) aba
 - a3) $aabbaa$
- c) Zeigen oder widerlegen Sie: L_0 ist regulär.

Aufgabe B3: (1+1+2P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_2 = \{a^n b a^n \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 2\}$.

- a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_2$ an.
- b) Überprüfen Sie, welche die folgenden Worte in L_2 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.
 - a1) ε
 - a2) b
 - a2) $aabaa$
- c) Zeigen oder widerlegen Sie: L_2 ist regulär.

Aufgabe B4: (3+3+4P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_3 = \{a^n b^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

- a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_3$ an.
- b) Überprüfen Sie, welche die folgenden Worte in L_3 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.
 - a1) ε
 - a2) $aabbbb$
 - a3) $aaabbb$
- c) Zeigen oder widerlegen Sie: L_3 ist regulär.

Aufgabe B5: (3+3+2P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_4 = \{a^n b b a^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.

- a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_4$ an.
- b) Überprüfen Sie, welche die folgenden Worte in L_4 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.
 - a1) ba
 - a2) $ababba$
 - a3) $aabbaa$
- c) Zeigen oder widerlegen Sie: L_4 ist regulär.

Aufgabe B6: (2+3+5P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $G_2 = (\{S, T, U, X\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aTU, U \rightarrow X, TX \rightarrow T, T \rightarrow bS, T \rightarrow b\}, S)$.

- a) Bestimmen Sie den maximalen Typ der Grammatik in der Chomsky-Hierarchie
- b) Geben Sie eine formale Beschreibung der erzeugten Sprache
- c) Bestimmen Sie den maximalen Typ der Sprache in der Chomsky-Hierarchie. Falls Sprache und Grammatik unterschiedliche Typen haben, geben Sie eine äquivalente Grammatik mit dem maximal möglichen Typ an.