Matrikelnr.:		Unterschrift:	
Duale Hochschule Baden-Württemberg Stuttgart **ÜBUNGSKLAUSUR/Lösungen**		Fakultät Studiengang: Jahrgang / Kurs : Studienhalbjahr:	**Technik** **Angewandte Informatik** **2015 B** **3. Semester**
Datum:	**17. November 2015**	Bearbeitungszeit:	**80 Minuten**
Modul: Unit:	**T2INF2002.1/2** **Formale Sprachen Automaten**	Dozent:	**Jan Hladik** **Stephan Schulz**
Hilfsmittel:	**Vorlesungsskript, eigene Notizen**		
Punkte:		Note:	

Aufgabe Nr.	erreichbare Punkte	erreichte Punkte
1	10	
2	9	
3	12	
4	9	
5	6	
6	8	
7	7	
8	13	
Summe	74	

1. Sind Sie gesund und prüfungsfähig?
2. Sind Ihre Taschen und sämtliche Unterlagen, insbesondere alle nicht erlaubten Hilfsmittel, seitlich an der Wand zum Gang hin abgestellt und nicht in Reichweite des Arbeitsplatzes?
3. Haben Sie auch außerhalb des Klausurraumes im Gebäude keine unerlaubten Hilfsmittel oder ähnliche Unterlagen liegen lassen?
4. Haben Sie Ihr Handy ausgeschaltet und abgegeben?

(Falls Ziff. 2 oder 3 nicht erfüllt sind, liegt ein Täuschungsversuch vor, der die Note „nicht ausreichend“ zur Folge hat.)

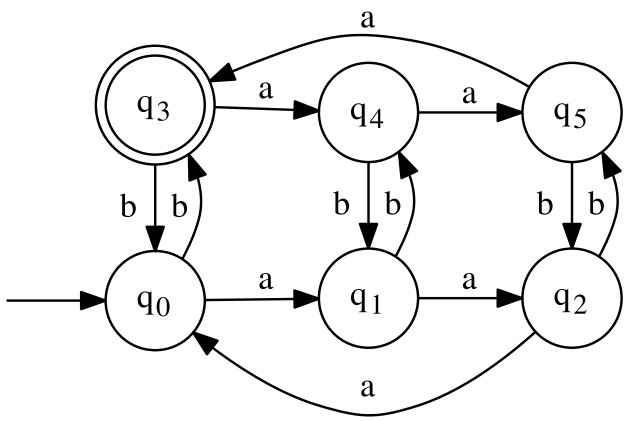
Aufgabe 1 (4+6P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie deterministische endliche Automaten an, die die folgenden Sprachen erkennen.

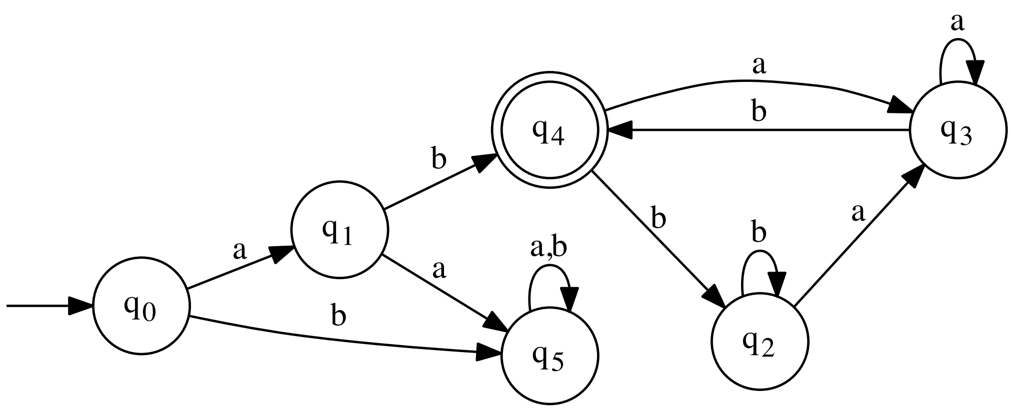
a) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \bmod 3 = 0 \text{ und } |w|_b \bmod 2 = 1\}$

b) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ beginnt mit } ab \text{ und endet mit } ab\}$

Lösung:



a)



b)

Aufgabe 1 (Fortsetzung)

Aufgabe 2 (2+2+5P)

Betrachten Sie den nichtdeterministischen endlichen Automaten A_2 in Abbildung 1.

a) Geben Sie alle Läufe des Wortes $abbbba$ auf dem Automaten A_2 an, bei denen das Wort vollständig gelesen wird.

b) Beschreiben Sie $L(A_2)$ als Menge.

c) Konvertieren Sie A_2 mit dem in der Vorlesung angegebenen Verfahren in einen deterministischen endlichen Automaten.

(Der Automat ist auf der nächsten Seite noch einmal abgebildet, falls Sie mehr als eine Seite benötigen.)

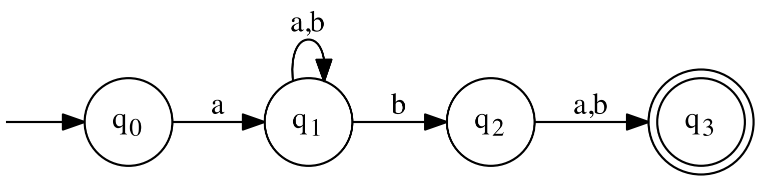


Abbildung 1: Automat A_2

Lösung:

a)
- $(q_0, abbbba) \to (q_1, bbbba) \to (q_1, bbba) \to (q_1, bba) \to (q_1, ba) \to (q_2, a) \to (q_3, \epsilon)$ (akzeptiert)
- $(q_0, abbbba) \to (q_1, bbbba) \to (q_1, bbba) \to (q_1, bba) \to (q_1, ba) \to (q_1, a) \to (q_1, \epsilon)$ (nicht akzeptiert)

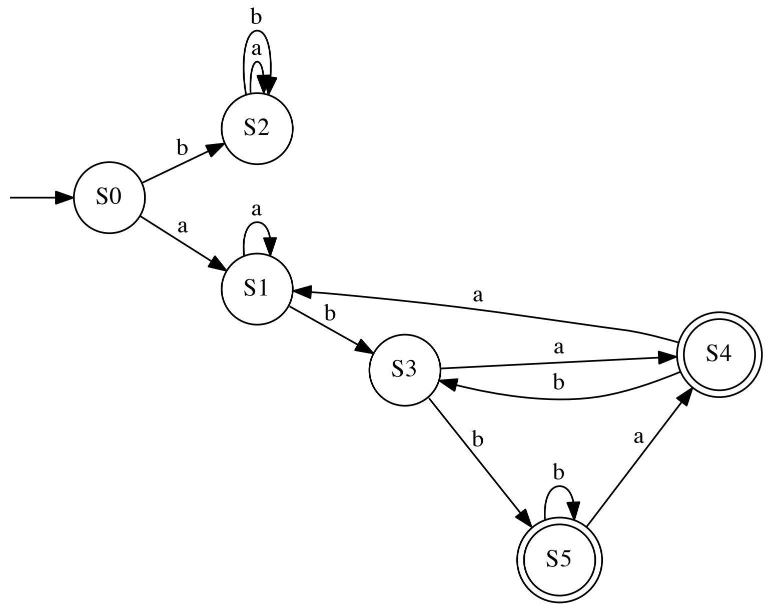
b) $L(A_2) = \{awbx \mid w \in \Sigma^*, x \in \Sigma\}$

Aufgabe 2 (Fortsetzung)

c)

```
          |                a                b
-------------------------------------------
->    q0 |            {q1}               {}
      q1 |            {q1}          {q2,q1}
      q2 |            {q3}             {q3}
   *  q3 |              {}               {}
S0 = frozenset(['q0'])
Delta(S0, a) =  frozenset(['q1'])
S1  =  frozenset(['q1'])
Delta(S0, b) =  frozenset([])
S2  =  frozenset([])
Delta(S1, a) =  frozenset(['q1'])
State is equal to  S1
Delta(S1, b) =  frozenset(['q1', 'q2'])
S3  =  frozenset(['q1', 'q2'])
Delta(S2, a) =  frozenset([])
State is equal to  S2
Delta(S2, b) =  frozenset([])
State is equal to  S2
Delta(S3, a) =  frozenset(['q1', 'q3'])
S4  =  frozenset(['q1', 'q3'])
Delta(S3, b) =  frozenset(['q1', 'q3', 'q2'])
S5  =  frozenset(['q1', 'q3', 'q2'])
Delta(S4, a) =  frozenset(['q1'])
State is equal to  S1
Delta(S4, b) =  frozenset(['q1', 'q2'])
State is equal to  S3
Delta(S5, a) =  frozenset(['q1', 'q3'])
State is equal to  S4
Delta(S5, b) =  frozenset(['q1', 'q3', 'q2'])
State is equal to  S5
```

Ergebnis:



Aufgabe 3 (2+6+4P)

Betrachten Sie den deterministischen endlichen Automaten A_3 in Abbildung 2.

a) Welche Konfigurationsfolge durchläuft der Automat beim Bearbeiten des Wortes $abaaaaa$?

b) Minimieren Sie den Automaten A_3 mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren.

c) Geben Sie eine formale Beschreibung von $L(A_3)$.

(Der Automat ist auf der nächsten Seite noch einmal abgebildet, falls Sie mehr als eine Seite benötigen. Dort finden Sie auch eine Tabelle für Aufgabenteil 3b).)

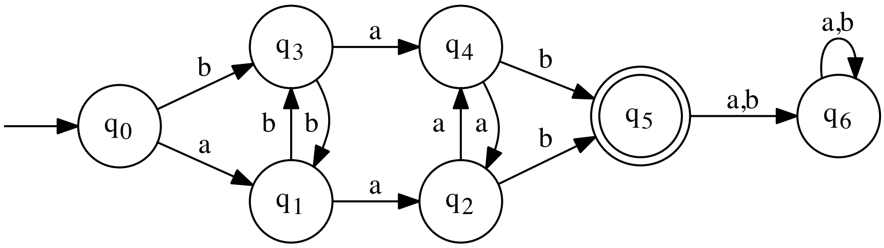
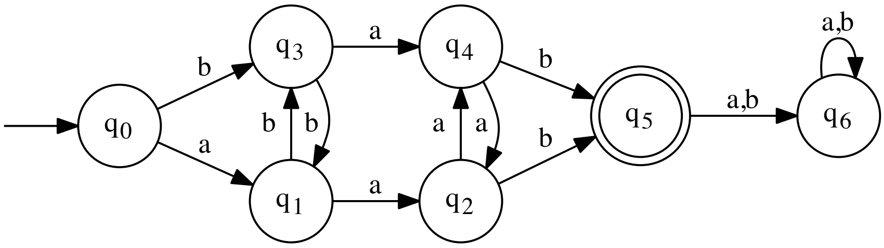


Abbildung 2: Automat A_3

Lösung (a):

a) $(q_0, abaaaaa) \to (q_1, baaaaa) \to (q_3, aaaaa) \to (q_4, aaaa) \to (q_2, aaa) \to (q_4, aa) \to (q_2, a) \to (q_4, \epsilon)$

Aufgabe 3 (Fortsetzung)



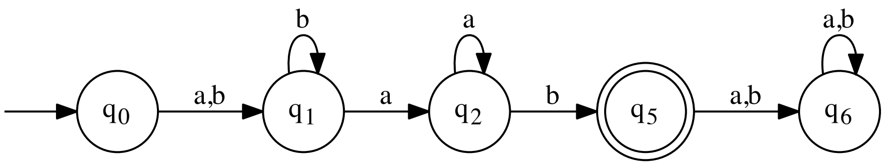
Lösung (b+c):

Tabelle für Aufgabe 3b)

b)

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
q_0	o	x	x	x	x	x	x
q_1	x	o	x	o	x	x	x
q_2	x	x	o	x	o	x	x
q_3	x	o	x	o	x	x	x
q_4	x	x	o	x	o	x	x
q_5	x	x	x	x	x	o	x
q_6	x	x	x	x	x	x	o

Die Zustände q_1, q_3 und q_2, q_4 sind jeweils äquivalent und können zusammengefasst werden:



c) $L(A_3) = \{xb^n a^m b \mid x \in \{a, b\}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^+\}$

Aufgabe 4 (1+1+1+6P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_5 = \{a^k bwba^k | w \in \Sigma^*, k \in \mathbb{N}\}$.

a) Überprüfen Sie, welche der folgenden Wörter in L_5 sind.

   a1) bb

   a2) $aababa$

   a3) $aabbbaa$

b) Zeigen oder widerlegen Sie: L_5 ist regulär.

Lösung:

a) a1) $bb \in L_5$

   a2) $aababa \notin L_5$

   a3) $aabbbaa \in L_5$

b) Behauptung: L_5 ist nicht regulär. Beweis per Pumping-Lemma.

   Annahme: L_5 sei regulär. Dann gilt: $\exists n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass jedes Wort $s \in L$ mit $|s| \leq n$ als uvw dargestellt werden kann, so dass $v \neq \epsilon$, $|uv| \leq n$, und $\forall h \in \mathbb{N} : uv^h w \in L_5$.

   Betrachte das Wort $a^n bba^n \in L_5$. Dann gilt: $u = a^i, v = a^j, w = a^{n-(i+j)}ba^n$ und $j > 0$. Per Pumping Lemma muss dann auch $uv^0w = a^{n-j}bba^n \in L_5$ sein. Da $j \neq 0$ ist das aber nicht der Fall. Also ist die Annahme falsch und L_5 nicht regulär.

Aufgabe 4 (Fortsetzung)

Aufgabe 5 (2+4P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Betrachten Sie den Automaten A_6 in Abbildung 3.

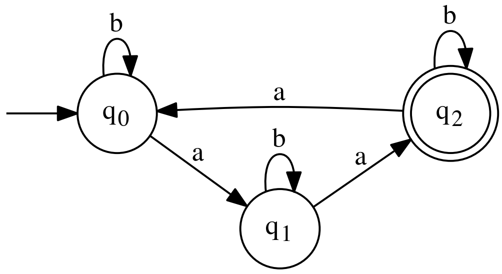


Abbildung 3: Automat A_6

a) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, das die an den verschiedenen Zuständen akzeptierten Sprachen beschreibt.

b) Lösen Sie dieses Gleichungssystem und geben Sie so einen regulären Ausdruck an, der die von A_6 akzeptierte Sprache beschreibt.

Lösung:

a)
- $L_0 = aL_1 + bL_0$
- $L_1 = aL_2 + bL_1$
- $L_2 = aL_0 + bL_2 + \epsilon$

b)
- $L_1 = b^*aL_2$ (Arden's Lemma)
- $L_2 = b^*(aL_0 + \epsilon)$ (Arden's Lemma)
- $L_1 = b^*a(b^*(aL_0 + \epsilon))$ (Einsetzen L_2)
- $$\begin{array}{lll} L_0 & = & b^*aL_1 & (Arden) \\ & = & b^*a(b^*a(b^*(aL_0 + \epsilon))) & (Einsetzen L_1) \\ & = & b^*a(b^*a(b^* + b^*aL_0)) & (Umformen) \\ & = & b^*a(b^*ab^* + b^*ab^*aL_0) & (Ausmultiplizieren) \\ & = & b^*ab^*ab^* + b^*ab^*ab^*aL_0 & (Ausmultiplizieren) \\ & = & (b^*ab^*ab^*a)^*b^*ab^*ab^* & (Arden) \end{array}$$

Aufgabe 5 (Fortsetzung)

Aufgabe 6 (6+1+1P)

Sei $L_8 = \{a^n b^m c^p \mid m, n, p \in N$ und $n + p = m\}$.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, die die Sprache L_8 erzeugt.

b) Geben Sie Ableitungen in G für die folgenden Wörter an:

   b1) $abbbcc$

   b2) $bbcc$

Lösung:

a) Betrachte $V = \{S, A, C\}, \Sigma = \{a, b, c\}$ und

$$\begin{aligned} P \;=\; \{ & S \to \varepsilon \\ & S \to A \\ & S \to C \\ & S \to AC \\ & A \to aAb \\ & A \to ab \\ & C \to bCc \\ & C \to bc \end{aligned}$$

Dann ist $G = \langle V, \Sigma, P, S\rangle$ kontext-frei und erzeugt L_8. Anmerkung: Mit ε-Produktionen geht es noch etwas einfacher!

b) b1) $S \Rightarrow AC \Rightarrow abC \Rightarrow abbCc \Rightarrow abbbcc$

   b2) $S \Rightarrow C \Rightarrow bCc \Rightarrow bbcc$

Aufgabe 6 (Fortsetzung)

Aufgabe 7 (7P)

Transformieren Sie die folgende Grammatik G_9 mit dem in der Vorlesung gezeigten Verfahren in Chomsky-Normalform.

$$\begin{aligned} G_9 &= (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S) \\ P &= \{S \to AC \mid CCD \\ &\quad A \to AB \\ &\quad B \to S \mid b \\ &\quad C \to D \mid c \\ &\quad D \to Sd \mid d \\ &\quad E \to SB \mid d\} \end{aligned}$$

Lösung:

- Schritt 1: Elimination von Kettenregeln der Form $S \to T$
  - $B \to S$
    - $N(S) = \{S\}$: Ersetzte $B \to S$ durch
      - $B \to AC$
      - $B \to CCD$
  - $C \to D$
    - $N(D) = \{D\}$: Ersetze $C \to D$ durch
      - $C \to Sd$
      - $C \to d$
  - Ergebnis:

$$\begin{aligned} P &= \{S \to AC \mid CCD \\ &\quad A \to AB \\ &\quad B \to AC \mid CCD \mid b \\ &\quad C \to Sd \mid d \mid c \\ &\quad D \to Sd \mid d \\ &\quad E \to SB \mid d\} \end{aligned}$$

- Schritt 2: Entferne nicht-terminierende Symbole:
  - Initial: B, C, D, E
  - Iteration: S
  - Nicht terminierend: A

  Ergebnis:

$$\begin{aligned} P &= \{S \to CCD \\ &\quad B \to CCD \mid b \\ &\quad C \to Sd \mid d \mid c \\ &\quad D \to Sd \mid d \\ &\quad E \to SB \mid d\} \end{aligned}$$

Aufgabe 7 (Fortsetzung)

- Schritt 3: Entferne nicht-erreichbare Symbole
  - Erreichbar: $\{S, C, D, d, c\}$
  - Nicht erreichbar: B, E, b
  - Ergebnis:

$$\begin{aligned} P &= \{S \rightarrow CCD \\ &\quad C \rightarrow Sd \mid d \mid c \\ &\quad D \rightarrow Sd \mid d \end{aligned}$$

- Schritt 4: Ersetze d durch X_d (in komplexen rechten Seiten):

$$\begin{aligned} P &= \{S \rightarrow CCD \\ &\quad C \rightarrow SX_d \mid d \mid c \\ &\quad D \rightarrow SX_d \mid d \\ &\quad X_d \rightarrow d \end{aligned}$$

- Auflösen von zu großen rechten Seiten:
  - Ersetzte $S \rightarrow CCD$ durch $S \rightarrow CC_1, C_1 \rightarrow CD$
  - Endergebnis:
    * $V_N = \{S, C, C_1, D, X_d\}, V_t = \{c, d\}$

$$\begin{aligned} P &= \{S \rightarrow CC_1 \\ &\quad C_1 \rightarrow CD \\ &\quad C \rightarrow SX_d \mid d \mid c \\ &\quad D \rightarrow SX_d \mid d \\ &\quad X_d \rightarrow d \end{aligned}$$

    * $G_9' = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$

Aufgabe 8 (6+4+3P)

Betrachten Sie die folgende Grammatik:

$$\begin{aligned} G_{10} &= (\{S, A, B, C, D\}, \{a, b, c\}, P, S) \\ P &= \{S \to AD \\ & \quad A \to a \mid b \\ & \quad B \to b \mid a \\ & \quad C \to CS \mid c \\ & \quad D \to BC\} \end{aligned}$$

a) Überprüfen Sie mit Hilfe des CYK-Algorithmus, welche der folgenden Wörter von G_{10} erzeugt werden:

a1) $w_1 = bbcabc$

a2) $w_2 = acbc$

b) Beschreiben Sie die von G_{10} erzeugte Sprache $L(G_{10})$ formal. Dies können Sie durch Angabe als Menge oder, falls $L(G_{10})$ regulär ist, durch Angabe eines regulären Ausdrucks tun.

Lösung für Teil a1)

	1	2	3	4	5	6
1	A,B	-	S	-	-	S
2		A,B	D	-	-	D
3			C	-	-	C
4				A,B	-	S
5					A,B	D
6						C
w =	b	b	c	a	b	c

Ist $w_1 \in L(G_{10})$? Ja

Lösung für Teil a2)

	1	2	3	4
1	A,B	D	-	-
2		C	-	-
3			A,B	D
4				C
w =	a	c	b	c

Ist $w_2 \in L(G_{10})$? Nein

Lösung für Teil b) $L(G_{10}) = \{(xyc)^n \mid x, y \in \Sigma, n \in \mathbb{N}^+\}$

Aufgabe 8 (Fortsetzung)

Ende