Bitte die Blätter nicht trennen!

Matrikelnummer:			
Duale Hochschule Baden-Württemberg Stuttgart **ÜBUNGSKLAUSUR**		Fakultät Studiengang: Jahrgang / Kurs : Studienhalbjahr:	**Technik** **Angewandte Informatik** **2015 B/K/ITA** **3. Semester**
Datum:	**9.11.2016**	Bearbeitungszeit:	**90 Minuten**
Modul: Unit:	**T2INF2002** **Formale Sprachen**	Dozent:	**Stephan Schulz** **Jan Hladik**
Hilfsmittel:	**Vorlesungsskript, eigene Notizen**		

Aufgabe	erreichbar	erreicht
1	10	
2	10	
3	12	
4	15	
5	6	
6	11	
7	9	
8	8	
9	13	
Summe	94	

1. Sind Sie gesund und prüfungsfähig?
2. Sind Ihre Taschen und sämtliche Unterlagen, insbesondere alle nicht erlaubten Hilfsmittel, seitlich an der Wand zum Gang hin abgestellt und nicht in Reichweite des Arbeitsplatzes?
3. Haben Sie auch außerhalb des Klausurraumes im Gebäude keine unerlaubten Hilfsmittel oder ähnliche Unterlagen liegen lassen?
4. Haben Sie Ihr Handy ausgeschaltet und abgegeben?

(Falls Ziff. 2 oder 3 nicht erfüllt sind, liegt ein Täuschungsversuch vor, der die Note „nicht ausreichend“ zur Folge hat.)

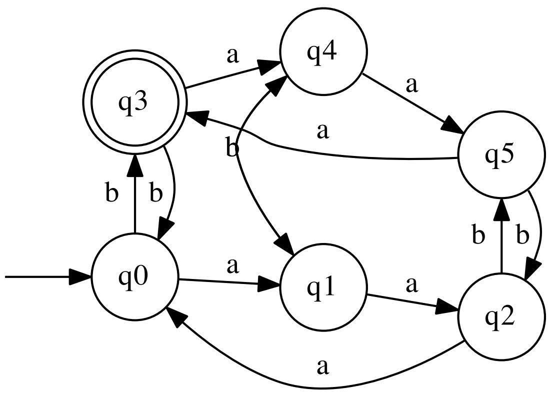
Aufgabe 1 (4+6P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie (in grafischer Darstellung) vollständige deterministische endliche Automaten (*DFAs*) an, die die folgenden Sprachen erkennen.

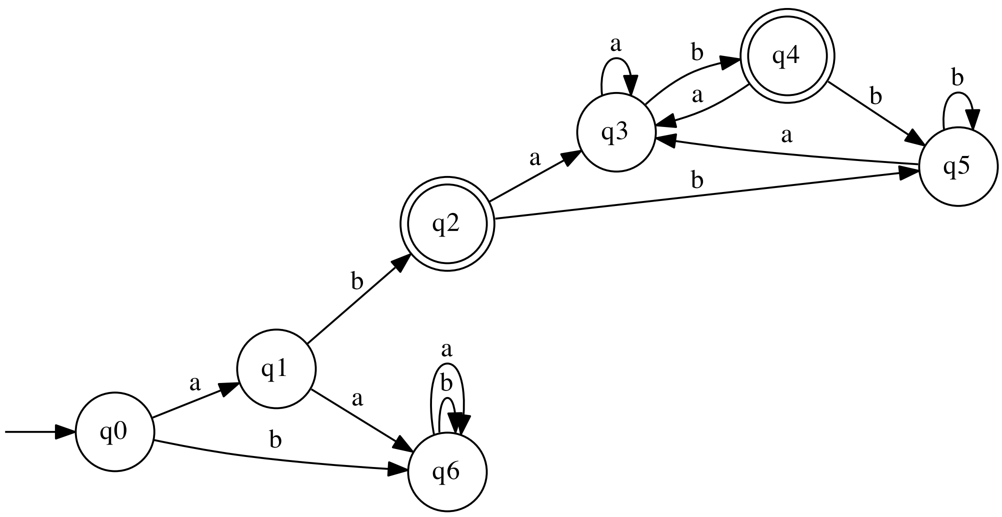
a) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \bmod 3 = 0 \text{ und } |w|_b \bmod 2 = 1\}$

b) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ beginnt mit } ab \text{ und endet mit } ab\}$

Lösung:



a)



b)

Aufgabe 1 (Fortsetzung)

Aufgabe 2 (3+2+5P)

Betrachten Sie den nichtdeterministischen endlichen Automaten A_2 in Abbildung 1.

a) Geben Sie alle möglichen Ableitungen des Wortes $abbbba$ auf dem Automaten A_2 an.

b) Beschreiben Sie $L(A_2)$ als Menge.

c) Konvertieren Sie A_2 mit dem in der Vorlesung angegebenen Verfahren in einen deterministischen endlichen Automaten.

(Der Automat ist auf der nächsten Seite noch einmal abgebildet, falls Sie mehr als eine Seite benötigen.)

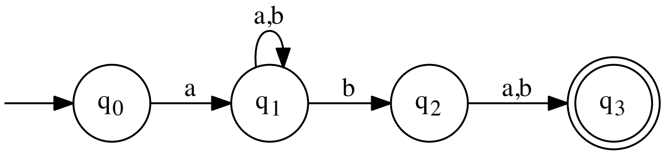


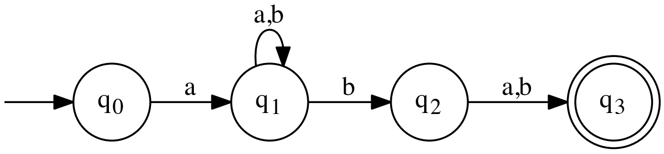
Abbildung 1: Automat A_2

Lösung:

a)
- $(q_0, abbbba, q_1), (q_1, bbbba, q_1), (q_1, bbba, q_1), (q_1, bba, q_1), (q_1, ba, q_1), (q_1, a, q_1)$
- $(q_0, abbbba, q_1), (q_1, bbbba, q_1), (q_1, bbba, q_1), (q_1, bba, q_1), (q_1, ba, q_2), (q_2, a, q_3)$ (akzeptiert)
- $(q_0, abbbba, q_1), (q_1, bbbba, q_1), (q_1, bbba, q_1), (q_1, bba, q_2), (q_1, ba, q_3)$
- $(q_0, abbbba, q_1), (q_1, bbbba, q_1), (q_1, bbba, q_2), (q_1, bba, q_3)$
- $(q_0, abbbba, q_1), (q_1, bbbba, q_2), (q_1, bbba, q_3)$

b) $L(A_2) = \{awbx \mid w \in \Sigma^*, x \in \Sigma\}$

Aufgabe 2 (Fortsetzung)



Lösung:

c)
```
# S0 = frozenset(['q0'])
# Delta(S0, a) =  frozenset(['q1'])
# S1  =  frozenset(['q1'])
# Delta(S0, b) =  frozenset([])
# S2  =  frozenset([])
# Delta(S1, a) =  frozenset(['q1'])
# State is equal to  S1
# Delta(S1, b) =  frozenset(['q1', 'q2'])
# S3  =  frozenset(['q1', 'q2'])
# Delta(S2, a) =  frozenset([])
# State is equal to  S2
# Delta(S2, b) =  frozenset([])
# State is equal to  S2
# Delta(S3, a) =  frozenset(['q1', 'q3'])
# S4  =  frozenset(['q1', 'q3'])
# Delta(S3, b) =  frozenset(['q1', 'q3', 'q2'])
# S5  =  frozenset(['q1', 'q3', 'q2'])
# Delta(S4, a) =  frozenset(['q1'])
# State is equal to  S1
# Delta(S4, b) =  frozenset(['q1', 'q2'])
# State is equal to  S3
# Delta(S5, a) =  frozenset(['q1', 'q3'])
# State is equal to  S4
# Delta(S5, b) =  frozenset(['q1', 'q3', 'q2'])
# State is equal to  S5
         |    a    b
---------------------
->     S0 |   S1   S2
       S1 |   S1   S3
       S2 |   S2   S2
       S3 |   S4   S5
    *  S4 |   S1   S3
    *  S5 |   S4   S5
```

Aufgabe 3 (2+6+4P)

Betrachten Sie den deterministischen endlichen Automaten A_3 in Abbildung 2.

a) Welche Konfigurationsfolge durchläuft der Automat beim Bearbeiten des Wortes $abaaaaa$?

b) Minimieren Sie den Automaten A_3 mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren.

c) Geben Sie eine formale Beschreibung von $L(A_3)$.

(Der Automat ist auf der nächsten Seite noch einmal abgebildet, falls Sie mehr als eine Seite benötigen. Dort finden Sie auch eine Tabelle für Aufgabenteil 3b).)

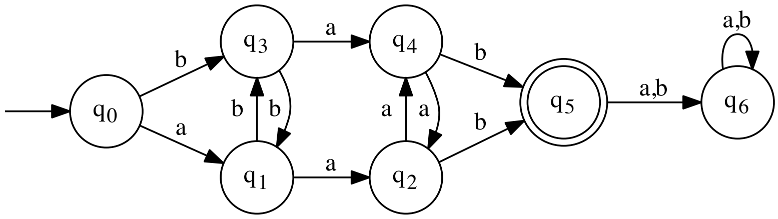


Abbildung 2: Automat A_3

Lösung:

a) $q_0abaaaaa \Rightarrow q_1baaaaa \Rightarrow q_3aaaaa \Rightarrow q_4aaaa \Rightarrow q_2aaa \Rightarrow q_4aa \Rightarrow q_2a \Rightarrow q_2\varepsilon$ (nicht akzeptiert)

b) Siehe nächste Seite.

c) $L(A_3) = \{xb^na^mb \mid x \in \Sigma, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^+\} = L((a+b)b^*aa^*b)$

Aufgabe 3 (Fortsetzung)

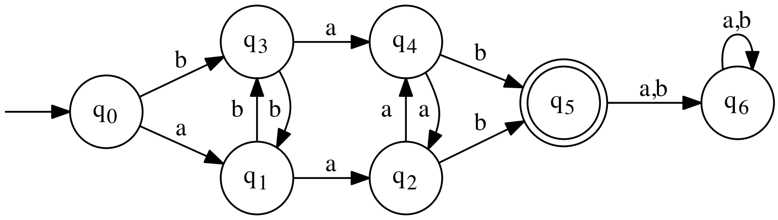


Tabelle für Aufgabe 3b)

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
q_0							
q_1							
q_2							
q_3							
q_4							
q_5							
q_6							

Lösung:

b)

```
# Adding (q2, q3) to V because delta(q2,b)=q5, delta(q3,b)=q1, and (q5,q1) in V
# Adding (q0, q2) to V because delta(q0,b)=q3, delta(q2,b)=q5, and (q3,q5) in V
# Adding (q4, q6) to V because delta(q4,b)=q5, delta(q6,b)=q6, and (q5,q6) in V
# Adding (q0, q4) to V because delta(q0,b)=q3, delta(q4,b)=q5, and (q3,q5) in V
# Adding (q1, q2) to V because delta(q1,b)=q3, delta(q2,b)=q5, and (q3,q5) in V
# Adding (q1, q4) to V because delta(q1,b)=q3, delta(q4,b)=q5, and (q3,q5) in V
# Adding (q2, q6) to V because delta(q2,a)=q4, delta(q6,a)=q6, and (q4,q6) in V
# Adding (q3, q4) to V because delta(q3,b)=q1, delta(q4,b)=q5, and (q1,q5) in V
# Adding (q0, q1) to V because delta(q0,a)=q1, delta(q1,a)=q2, and (q1,q2) in V
# Adding (q3, q6) to V because delta(q3,a)=q4, delta(q6,a)=q6, and (q4,q6) in V
# Adding (q0, q3) to V because delta(q0,a)=q1, delta(q3,a)=q4, and (q1,q4) in V
# Adding (q1, q6) to V because delta(q1,a)=q2, delta(q6,a)=q6, and (q2,q6) in V
# Adding (q0, q6) to V because delta(q0,a)=q1, delta(q6,a)=q6, and (q1,q6) in V
# Merging q3 into q1
# Merging q4 into q2
# +---+---+---+---+---+---+---+---+            |    a    b
# |   | q0| q1| q2| q3| q4| q5| q6|    --------------------
# +---+---+---+---+---+---+---+---+         q0 |    q1   q1
# | q0| o | X | X | X | X | X | X |         q1 |    q2   q1
# +---+---+---+---+---+---+---+---+         q2 |    q2   q5
# | q1| X | o | X | o | X | X | X |     *   q5 |    q6   q6
# +---+---+---+---+---+---+---+---+         q6 |    q6   q6
# | q2| X | X | o | X | o | X | X |
# +---+---+---+---+---+---+---+---+
# | q3| X | o | X | o | X | X | X |
# +---+---+---+---+---+---+---+---+
# | q4| X | X | o | X | o | X | X |
# +---+---+---+---+---+---+---+---+
# | q5| X | X | X | X | X | o | X |
# +---+---+---+---+---+---+---+---+
# | q6| X | X | X | X | X | X | o |
# +---+---+---+---+---+---+---+---+
```

Aufgabe 4 (4+3+4+4)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_4 = \{a^k w a^k | k \geq 1, w \in \Sigma^*\}$ und $L_5 = \{a^k bwba^k | w \in \Sigma^*, k \in \mathbb{N}\}$.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_4$ an.

b) Überprüfen Sie, welche der folgenden Wörter in L_4 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.

   b1) ε

   b2) baa

   b3) $aaabaa$

c) Zeigen oder widerlegen Sie: L_4 ist regulär.

d) Zeigen oder widerlegen Sie: L_5 ist regulär.

Lösung: Erkenntnis: $L_4 = L(a(a + b)^*a)$, damit regulär, weil in w ja alles erlaubt ist.

a) $G = \{N, \Sigma, P, S\}$ mit

   – $N = \{S, T\}$
   – $P = \{S \to aT, T \to aT, T \to bT, T \to a\}$

b) b1 Nein

   b2 Nein

   b3 Ja, $S \Rightarrow aT \Rightarrow aaT \Rightarrow aaaT \Rightarrow aaabT \Rightarrow aaabaT \Rightarrow aaabaa$

c) L_4 ist regulär. Beweis 1: G ist rechtslinear. Beweis 2: $L_4 = L(a(a + b)^*a)$

d) L_5 ist nicht regulär. Beweis per Pumping Lemma mit $a^k bba^k$ (das sollte in der Klausur auch ausgeführt werden!)

Aufgabe 4 (Fortsetzung)

Aufgabe 5 (2+4P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Betrachten Sie den Automaten A_6 in Abbildung 3.

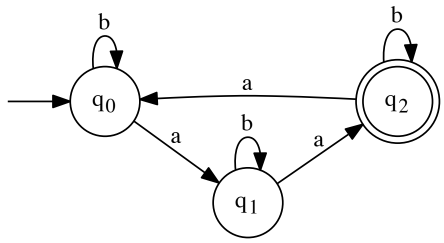


Abbildung 3: Automat A_6

a) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, das die an den verschiedenen Zuständen akzeptierten Sprachen beschreibt.

b) Lösen Sie dieses Gleichungssystem und geben Sie so einen regulären Ausdruck an, der die von A_6 akzeptierte Sprache beschreibt.

Lösung:

a)
- $L_0 = aL_1 + bL_0$
- $L_1 = aL_2 + b_L1$
- $L_2 = aL_0 + bL_2 + \varepsilon$

b)
- $L_0 = b^*aL_1$ (Arden)
- $L_1 = b^*aL_2$ (Arden)
- $L_2 = aL_0 + bL_2 + \varepsilon = bL_2 + aL_0 + \varepsilon = bL_2 + b^*aL_1 + \varepsilon = bL_2 + b^*ab^*aL_2 + \varepsilon = (b + b^*ab^*a)L_2 + \varepsilon = (b + b * ab * a)^*$
- Einsetzen: $L_0 = b^*ab^*a(b + ab^*ab^*a)^*$

Aufgabe 5 (Fortsetzung)

Aufgabe 6 (2+4+2+3P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $G_7 = (\{S, T, U\}, \{a, b\}, \{S \to aTU, TU \to Sb, TU \to b\}, S)$. Bestimmen Sie:

a) den maximalen Typ der Grammatik in der Chomsky-Hierarchie,

b) die erzeugte Sprache $L(G_7)$,

c) den maximalen Typ der erzeugten Sprache in der Chomsky-Hierarchie.

d) Geben Sie eine zu G_7 äquivalente Grammatik mit dem maximal möglichen Typ an.

Lösung:

a) G_7 ist Typ 0, denn $TU \to b$ ist nicht kontext-frei, aber verkürzend.

b) $L(G_7) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$

c) Die Sprache ist kontext-frei (Typ 2).

d) $N = \{S\}$, $P = \{S \to aSb, S \to ab\}$, Rest wie gehabt.

Aufgabe 6 (Fortsetzung)

Aufgabe 7 (3+6P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $L_7 = \{(ab)^n(ba)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

a) Geben Sie eine Grammatik G_7 mit $L(G_7) = L_7$ an.

b) Geben Sie einen Kellerautomaten (PDA) A_7 mit $L(A_7) = L_7$ an.

Lösung:

a) $G_7 = (N, \Sigma, P, S)$ mit

- $N = \{S\}$
- $P = \{S \to abSba, S \to \varepsilon\}$

b) Ohne Gewähr: $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z)$ mit

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$, $\Gamma = \{A, Z\}$
- $$\Delta = \begin{array}{llllll} q_0 & \varepsilon & Z & \to & \varepsilon & q_0 \text{ Leeres Wort} \\ q_0 & a & Z & \to & AZ & q_1 \\ q_1 & b & A & \to & A & q_2 \text{ } (ab)^n \text{ gelesen} \\ q_2 & a & A & \to & AA & q_1 \text{ Weiteres } ab \\ q_2 & b & A & \to & A & q_3 \text{ Begin } (ba)^n \\ q_3 & a & A & \to & \varepsilon & q_4 \text{ } ba \text{ abgebaut} \\ q_4 & b & A & \to & A & q_3 \\ q_4 & \varepsilon & Z & \to & \varepsilon & q_5 \text{ Ende} \end{array}$$

Aufgabe 8 (2+2+4P)

Gegeben sei der Kellerautomat $A_8 = (\{q_0, q_f\}, \{a, b\}, \{Z_0, A, B\}, \Delta, q_0, Z_0)$, wobei Δ in der folgenden Tabelle angegeben ist.

q_0	a	Z_0	AZ_0	q_0
q_0	a	A	AA	q_0
q_0	a	B	ε	q_0
q_0	b	Z_0	BZ_0	q_0
q_0	b	A	ε	q_0
q_0	b	B	BB	q_0
q_0	ε	A	A	q_f
q_0	ε	B	B	q_f
q_f	ε	A	ε	q_f
q_f	ε	B	ε	q_f
q_f	ε	Z_0	ε	q_f

a) Geben Sie für die folgenden Wörter

- falls das Wort in $L(A_8)$ enthalten ist, eine akzeptierende Konfigurationsfolge,
- falls das Wort nicht in $L(A_8)$ enthalten ist, eine Konfigurationsfolge, bei der das gesamte Wort gelesen wird, an.

a1) $w_1 = aaabbb$

a2) $w_2 = aababbbb$

b) Beschreiben Sie formal die von A_8 akzeptierte Sprache als Menge.

Lösung:

a) Fleißaufgabe selber machen!

b) $L(A_8) = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \neq |w|_b\}$

Aufgabe 9 (6+4+3P)

Betrachten Sie die folgende Grammatik:

$$\begin{aligned} G_9 &= (\{S, A, B, C, D\}, \{a, b, c\}, P, S) \\ P &= \{S \to AD \\ & \quad A \to a \mid b \\ & \quad B \to b \mid a \\ & \quad C \to CS \mid c \\ & \quad D \to BC\} \end{aligned}$$

a) Überprüfen Sie mit Hilfe des CYK-Algorithmus, welche der folgenden Wörter von G_9 erzeugt werden:

a1) $w_1 = bbcabc$

a2) $w_2 = acbc$

b) Beschreiben Sie die von G_9 erzeugte Sprache $L(G_9)$ formal. Dies können Sie durch Angabe als Menge oder, falls $L(G_9)$ regulär ist, durch Angabe eines regulären Ausdrucks tun.

Tabelle für Teil a1)

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						
w =	b	b	c	a	b	c

Ist $w_1 \in L(G_{10})$? Ja □ Nein □

Lösung:

a) Nächste Seite

b) $L(G_9) = L((a + b)(a + b)c((a + b)(a + b)c)^*)$

Aufgabe 9 (Fortsetzung)

Tabelle für Teil a2)

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				
w =	a	c	b	c

Ist $w_2 \in L(G_{10})$? Ja □ Nein □

Lösung:

a1)

	1	2	3	4	5	6
1	A,B	-	S	-	-	S
2		A,B	D	-	-	D
3			C	-	-	C
4				A,B	-	S
5					A,B	D
6						C
w	b	b	c	a	b	c

bbcabc ist in L(G9)

a2)

	1	2	3	4
1	A,B	D	-	-
2		C	-	-
3			A,B	D
4				C
w	a	c	b	c

acbc ist nicht in L(G9)

Ende