Logik und Grundlagen derInformatik

Aufgabensammlung

Stephan Schulz

24. Februar 2015

1 Übungsaufgaben

1.1 Mengenlehre

1.1.1 Aufgabe: (2+2+2P)

Sei $A = \{a, b, c, d\}, B = \{1, 2\}$.

a) Geben Sie $A \times A$ an.

b) Geben Sie eine totale injektive Funktion $f : A \to 2^B$ an.

c) Wie viele binäre Relationen über $A \times B$ gibt es?

1.1.2 Aufgabe: (2+3+3P)

Seien $R_1, R_2 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $R_1 = \{(x, 3x) \mid x \in \mathbb{N}\}$ und $R_2 = \{(x + 2, x) \mid x \in \mathbb{N}\}$

a) Geben Sie $R_1 \circ R_1$ an.

b) Geben Sie $R_1 \circ R_2$ an.

c) Geben Sie die transitive Hülle von R_1 an.

1.2 Funktionale Programmierung

1.2.1 Aufgabe (3P+2P)

Betrachten Sie die folgenden Scheme-Funktionen

```
(define (test x y)
  (> x y))

(define (mystery fun l)
  (if (null? l)
      l
      (if (fun (car l))
          (cons (car l) (mystery fun (cdr l)))
          (mystery fun (cdr l)))))
```

a) Was ist der Rückgabewert des folgenden Ausdrucks?

```
(mystery (lambda (x) (test x 5))
         '(1 9 2 8 3 7 4 6))
```

b) Erklären Sie das Ergebnis!

1.3 Aussagenlogik

1.3.1 Aufgabe: (4+2P)

Der Schatz ist in genau einer von 4 Truhen. Mindestens 3 der folgenden Aussagen sind wahr.

1. Der Schatz ist in Truhe 2
2. Der Schatz ist in Truhe 1
3. Ausage 1 ist falsch
4. Der Schatz ist nicht in Truhe 3

a) Stellen Sie eine aussagenlogische Formel auf, die den Sachverhalt beschreibt.

b) In welcher Truhe ist der Schatz?

Eine Lösung zu a):
$(t_1 \wedge \neg t_2 \wedge \neg t_3)$
$\wedge (t_2 \wedge \neg t_2 \wedge \neg t_3)$
$\wedge (t_2 \wedge t_1 \wedge \neg t_3)$
$\wedge (t_2 \wedge t_1 \wedge \neg t_2)$
$\wedge (t_1 \vee t_2 \vee t_3 \vee t_4)$
$\wedge (t_1 \rightarrow \neg(t_2 \vee t_3 \vee t_4))$
$\wedge (t_2 \rightarrow \neg(t_1 \vee t_3 \vee t_4))$
$\wedge (t_3 \rightarrow \neg(t_1 \vee t_2 \vee t_4))$
$\wedge (t_4 \rightarrow \neg(t_1 \vee t_2 \vee t_3))$
Der Schatz ist in Truhe 1 (z.B. Wahrheitstabelle)

1.3.2 Aufgabe: (4+2P)

Sei $KB = \{((a \wedge b) \vee (a \wedge c)), (b \rightarrow (\neg b))\}$ und $A = ((b \vee c) \leftrightarrow (b \rightarrow c))$.

a) Zeigen oder widerlegen Sie: $KB \models A$

b) Geben Sie zu KB und A äquivalente Formulierungen, die nicht $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ enthalten.

1.3.3 Aufgabe: 1+2+3P)

Sei $F = a \wedge b \vee a \wedge c \vee b \wedge c$ und $G = a \wedge b \vee c \wedge \neg(a \leftrightarrow b)$.

a) Geben sie vollständig geklammerte Versionen von F und G an.

b) Gilt $F \equiv G$? Verwenden Sie die Wahrheitstafelmethode!

c) Gilt $\models F \leftrightarrow G$? Verwenden Sie die Tableaux-Methode!

1.3.4 Aufgabe: (6P)

Zeigen Sie: $\{\rightarrow, \perp\}$ ist eine Basis der Aussagenlogik. Sie können voraussetzen, dass $\{\neg, \vee, \wedge\}$ eine Basis ist.

Lösungsidee: Induktion über den Aufbau. Es gilt: $A \rightarrow \perp \equiv \neg A$ und damit $(A \rightarrow \perp) \rightarrow B \equiv A \vee B$. Mit De-Morgan gilt dann $A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B) \equiv \neg(A \rightarrow (B \rightarrow \perp)) \equiv (A \rightarrow (B \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp$

1.4 Prädikatenlogik

1.4.1 Aufgabe: (2+2+2+2P)

Betrachten Sie $P = \{eq/2, gt/2, even/1\}, F = \{add/2, neg/1, s/1, a/0, b/0\}, V = \{x, y, z\}$ und $\Sigma = (P, F, V)$. Wir betrachten Terme, Atome und Literale über dieser Signatur. Welche Objekte sind *korrekte* Terme, Atome, Literale, oder grund? Bitte vervollständigen Sie folgende Tabelle:

Objekt	Term?	Atom?	Literal?	Grund?
$s(x)$				
$\neg eq(s(a), s(s(a)))$				
$add(s(a), neg(x))$				
$eq(a, even(s(a)))$				

Lösung:

Objekt	Term?	Atom?	Literal?	Grund?
$s(x)$	Ja	Nein	Nein	Nein
$\neg eq(s(a), s(s(a)))$	Nein	Nein	Ja	Ja
$add(s(a), neg(x))$	Ja	Nein	Nein	Nein
$eq(a, even(s(a)))$	Nein	Nein	Nein	(Ja)

1.4.2 Aufgabe (2+2+2P):

Stellen Sie fest, welche der folgenden Paare von Termen unifizierbar sind. Geben Sie im positiven Fall einen Unifikator an. Alle Variablen fangen mit Großbuchstaben an.

1) $eq(X, j(g(e), j(V, e)))$ und $eq(j(j(Y, X), U), Z)$

2) $p(a, X, h(g(Z)))$ und $p(Z, h(Y), h(Y))$

3) $f(f(X, f(Y, g(X))), X)$ und $f(Z, f(g(a), Z))$

Lösung:

1. Nicht unifizierbar (occurs-check)
2. $\sigma = \{Z < -a, X < -h(g(a)), Y < -g(a)\}$
3. Nicht unifizierbar (occurs-check)