Klausur
Logik und Grundlagen der Informatik

Stephan Schulz

5. März 2015

Name:

Unterschrift:

Matrikelnummer:

Kurs:

Aufgabe Nr.	erreichbare Punkte	erreichte Punkte
1	7	
2	8	
3	9	
4	7	
5	7	
6	6	
7	8	
8	6	
9	10	
Summe	68	

Note:

Aufgabe 1: (1+3+2+1P)

Sei $A = \{a, b, c, d\}$ und $B = \{c, d, e\}$.

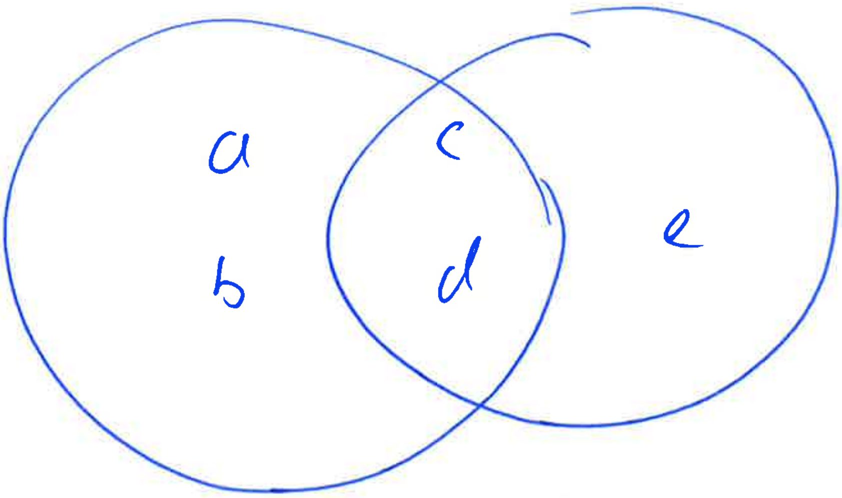
a) Visualisieren Sie $A \cap B$ in einem Venn-Diagramm.

b) Geben Sie $2^{A \triangle B}$ an.

c) Wie viele totale Funktionen von $A \to B$ gibt es?

d) Wie viele dieser Funktionen sind injektiv?

a)



b)

$A \triangle B = \{a, b, e\}$

$2^{A \triangle B} = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{e\}, \{a, b\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{a, b, e\}\}$

c) $3^4 = 81$

d) 0, da $|A| > |B|$

Aufgabe 2: (3+3+2P)

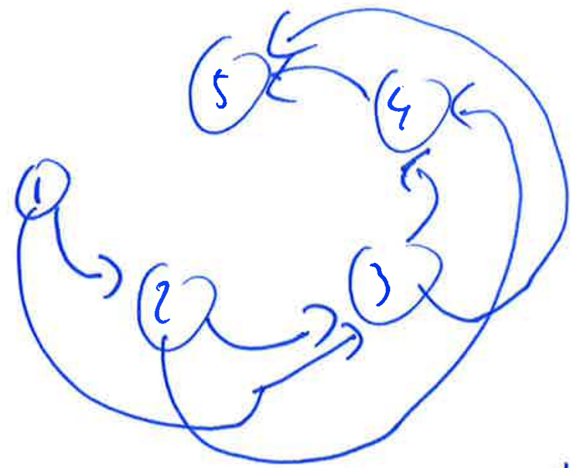
Sei $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $R = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$.

a) Berechnen Sie $R \cup R^2$ und stellen Sie das Ergebnis als Graph da!

b) Berechnen Sie R^+ und stellen Sie das Ergebnis als Tabelle da

c) Betrachten Sie nun $S = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Welche bekannte Relation entspricht S^*?

a)



b)

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1
3	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0

c) $S^* = \{ x, y \mid x, y \in \mathbb{N}, x \leq y \}$

$= \leq$

Aufgabe 3: (2+4+3P)

Betrachten Sie die folgenden Scheme-Funktionen

```
(define (basefun x)
  (* x x))


(define (mystery3 f u o)
  (if (= u o)
      (list 0)
      (cons (f u) (mystery3 f (+ u 1) o))))

(define (blackmagic lst)
  (cond ((not (null? lst))
         (set-car! lst (* 2 (car lst)))
         (blackmagic (cdr lst))))
  lst)
```

a) Was ist der Rückgabewert des folgenden Ausdrucks?

`(mystery3 basefun 10 10)` => (0)

b) Was ist der Rückgabewert des folgenden Ausdrucks?

`(apply + (mystery3 basefun 0 4))` (+ 0 1 4 9 0)

c) Was ist der Rückgabewert des folgenden Ausdrucks?

`(blackmagic '(1 1 2 2 3 3))` => 14

=> (2 2 4 4 6 6)

Aufgabe 4: (4+3P)

Betrachten Sie $F = \neg(p \to q) \vee (r \leftrightarrow p)$

a) Konvertieren Sie F in konjunktive Normalform.

b) Geben Sie *alle* Modelle von F an. Erstellen Sie dazu eine Wahrheitstafel.

a) $\neg(p \to q) \vee (r \leftrightarrow p)$

$\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee ((\neg r \vee p) \wedge (\neg p \vee r))$

$\equiv (p \wedge \neg q) \vee ((\neg r \vee p) \wedge (\neg p \vee r))$ NNF

$\equiv (p \vee ((\neg r \vee p) \wedge (\neg p \vee r))) \wedge$

$(\neg q \vee ((\neg r \vee p) \wedge (\neg p \vee r)))$

$\equiv (p \vee \neg r \vee p) \wedge (p \vee \neg p \vee r)$

$\wedge (\neg q \vee \neg r \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee r)$

$\equiv (\neg r \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee r)$

b)

p	q	r	F	Modell ?
0	0	0	1	✓
0	0	1	0	
0	1	0	1	✓
0	1	1	0	
1	0	0	1	✓
1	0	1	1	✓
1	1	0	0	
1	1	1	1	✓

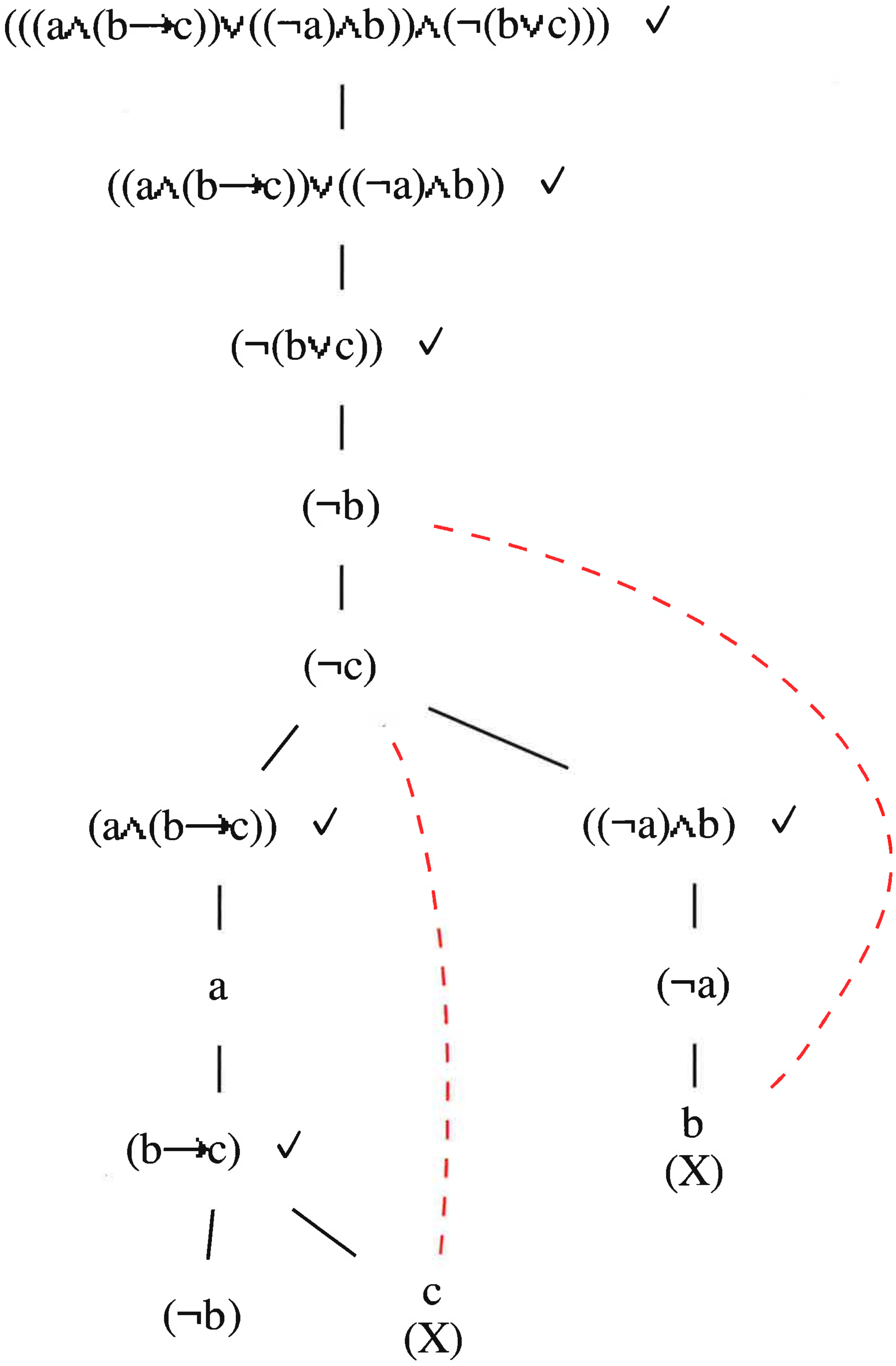
Aufgabe 5: (3+4P)

Untersuchen Sie die folgenden Formeln mit der Tableaux-Methode auf Unerfüllbarkeit. Wenn eine Formel erfüllbar ist, geben Sie mindestens ein explizites Modell an.

a) $(((a \wedge (b \rightarrow c)) \vee ((\neg a) \wedge b)) \wedge (\neg(b \vee c)))$ — a, $\neg b$, $\neg c$

b) $(p \wedge (((q \wedge (\neg r)) \vee (\neg p)) \wedge ((\neg(r \rightarrow p)) \vee (p \leftrightarrow (\neg q)))))$

A 5a)



$(((a \wedge (b \rightarrow c)) \vee ((\neg a) \wedge b)) \wedge (\neg (b \vee c)))$ ✓
$((a \wedge (b \rightarrow c)) \vee ((\neg a) \wedge b))$ ✓
$(\neg (b \vee c))$ ✓
$(\neg b)$
$(\neg c)$
$(a \wedge (b \rightarrow c))$ ✓
a
$(b \rightarrow c)$ ✓
$(\neg b)$
c
(X)
$((\neg a) \wedge b)$ ✓
$(\neg a)$
b
(X)

15b)

$(p\wedge(((q\wedge(\neg r))\vee(\neg p))\wedge((\neg(r\rightarrow p))\vee(p\leftrightarrow(\neg q)))))$ ✓

p

$(((q\wedge(\neg r))\vee(\neg p))\wedge((\neg(r\rightarrow p))\vee(p\leftrightarrow(\neg q))))$ ✓

$((q\wedge(\neg r))\vee(\neg p))$ ✓

$((\neg(r\rightarrow p))\vee(p\leftrightarrow(\neg q)))$ ✓

$(q\wedge(\neg r))$ ✓	$(\neg p)$ (X)

q

$(\neg r)$

$(p\leftrightarrow(\neg q))$ ✓	$(\neg(r\rightarrow p))$ ✓
$(p\rightarrow(\neg q))$ ✓	r (X)
$((\neg q)\rightarrow p)$ ✓	

$(\neg q)$ (X)	$(\neg p)$ (X)

Aufgabe 6: (3+3P)

a) Geben Sie eine unerfüllbare Klauselmenge an, bei der jede Klausel mindestens zwei (verschiedene) Literale hat!

b) Zeigen Sie per Resolution, dass die folgende Klauselmenge unerfüllbar ist:

1. $\neg p \vee q$
2. $\neg w \vee p \vee q$
3. $\neg q$
4. $\neg a \vee \neg w$
5. $a \vee w$
6. $\neg a$

a) $p \vee q$, $\neg p \vee q$, $p \vee \neg q$, $\neg p \vee \neg q$

b) 7) w (5+6)

8) $p \vee q$ (7+2

9) p (8 + 3)

10) $\neg q$ (1+5)

11) $\square$ 9 + 10

Aufgabe 7: (2+4+2P)

Betrachten Sie folgenden Sachverhalt: *Wir werfen eine Münze mit den Seiten Kopf und Zahl. Fällt Kopf, dann gewinne ich. Fällt Zahl, dann verlierst Du.* Machen Sie die notwendigen Annahmen (z.B. die Münze fällt nicht in den Gully).

a) Was sind die elementaren Aussagen?

b) Geben Sie eine Formelmenge an, die den Sachverhalt beschreibt.

c) Stellen Sie eine Formel auf, die genau dann allgemeingültig ist, wenn aus der Formalisierung folgt, dass ich gewinne.

a)
1) Kopf fällt : K
2) Zahl fällt : Z
3) Ich gewinne : I
4) Du verlierst : V

b)

$K \leftrightarrow \neg Z$

$V \leftrightarrow I$

$K \rightarrow I$

$Z \rightarrow V$

c)

$$((K \leftrightarrow \neg Z) \wedge (V \leftrightarrow I) \wedge (K \rightarrow I) \wedge (Z \rightarrow V)) \rightarrow I$$

Aufgabe 8: (6P)

Sei $\overline{\vee}$ ein neuer binärer aussagenlogischer Operator mit folgender Semantik:

$I(A)$	$I(B)$	$I(A\overline{\vee}B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Zeigen Sie: $\{\overline{\vee}\}$ ist eine Basis der Aussagenlogik. Sie können voraussetzen, dass $\{\neg, \vee, \wedge\}$ eine Basis ist.

$$\neg A \equiv A' \overline{\vee} A'$$

$$A \vee B \equiv (A' \overline{\vee} B') \overline{\vee} (A' \overline{\vee} B')$$

$$A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$\cancel{\equiv (\neg A \vee \neg B) \overline{\vee} (\neg A \vee \neg B)}$$

$$\equiv (\neg A \overline{\vee} \neg B) \overline{\vee} (\neg A \overline{\vee} \neg B)$$

$$\overline{\vee} (\neg A \overline{\vee} \neg B) \overline{\vee} (\neg A \overline{\vee} \neg B)$$

$$\equiv ((A \overline{\vee} A) \overline{\vee} (B \overline{\vee} B)) \overline{\vee} ((A \overline{\vee} A) \overline{\vee} (B \overline{\vee} B))$$

$$\cancel{\overline{\vee} ((A \overline{\vee} A) \overline{\vee} (B \overline{\vee} B)) \overline{\vee} ((A \overline{\vee} A) \overline{\vee} (B \overline{\vee} B))}$$

$$\equiv (A \overline{\vee} A) \overline{\vee} (B \overline{\vee} B)$$

Aufgabe 9: (4+2+2+2P)

a) Sei $\Sigma = (P, F, V)$ mit $P = \{p/2, q/1\}$, $F = \{a/0, b/0\}$, $V = \{X, Y, Z, \ldots\}$. Betrachten sie die Menge $K = \{q(X) \vee q(Y), p(X,Y) \vee \neg q(X)\}$ von Klauseln über Σ. Generieren Sie alle *Grundinstanzen* von Klauseln aus K.

b) Stellen Sie für die folgenden Paar von Termen fest, ob sie unifizierbar sind. Geben Sie im positiven Fall einen Unifikator an. Variablen beginnen mit Großbuchstaben.

b1) $f(f(g(X), a), X)$ und $f(Y, g(Y))$

b2) $f(f(g(X), a), g(X))$ und $f(Y, g(Z))$

b3) $p(X, g(a), f(a, f(a)))$ und $p(f(a), g(Y), f(Y, Z))$

a) $M =$

$\{\, q(a) \vee q(a), \quad p(a,b) \vee \neg q(a)$
$q(a) \vee q(b), \quad p(a,a) \vee \neg q(a)$
$q(b) \vee q(a), \quad p(b,a) \vee \neg q(b)$
$q(b) \vee q(b), \quad p(b,b) \vee \neg q(b) \,\}$

b) b1)
$$\frac{\begin{array}{rcl} f(g(X),a) & = & Y \\ X & = & g(Y) \end{array}}{f(g(g(Y)),Y) = g(Y)} \quad ↯$$

b2)
$$\frac{\begin{array}{rcl} f(g(X),a) & = & Y \\ g(X) & = & g(Z) \end{array}}{\begin{array}{l} Y \leftarrow f(g(X),a) \\ Z \leftarrow X \end{array}}$$

b3)
$X \leftarrow f(a)$
$Y \leftarrow a$
$Z \leftarrow f(a)$