Aufgabe: Eine Matrix $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist eine *obere Dreiecks-Matrix* genau dann, wenn alle Einträge der Matrix unterhalb der Diagonalen den Wert 0 haben, formal gilt

$$\forall i, j \in \{1, \cdots, n\} : i > j \to a_{i,j} = 0.$$

Zeigen Sie, dass für eine obere Dreiecks-Matrix $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Determinante nach der Formel

$$\texttt{det}(A) = \prod_{j=1}^{n} a_{j,j}$$

berechnet werden kann. $\diamond$

Bevor wir den eigentlichen Beweis liefern, zeigen wir zunächst einen Hilfssatz, der es uns später ermöglicht, die in der Aufgabe behauptete Formel mit Hilfe der von Leibniz gegebenen Definition der Determinante nachzuweisen.

Lemma 1 *Es sei $\sigma \in \mathcal{S}_n$ und es gelte $\sigma \neq \mathrm{id}_n$. Dann gilt:*

$$\exists i \in \{1, \cdots, n\} : \sigma(i) < i.$$

Beweis: Da $\sigma \neq \mathrm{id}_n$ ist, ist die Menge

$$M := \big\{i \in \{1, \cdots, n\} \mid \sigma(i) \neq i\big\}$$

nicht leer und da M außerdem nach oben durch n beschränkt ist, können wir

$$k := \max(M)$$

definieren. Nach Definition von M und k gilt dann

$$\sigma(i) = i \quad \text{für alle } i \in \{k + 1, \cdots, n\},$$

denn sonst wäre k nicht das Maximum von M. Da $\sigma(k) \neq k$ ist, gibt es zwei Fälle.

1. $k < \sigma(k)$.

   Dann gibt es ein $i \in \{k + 1, \cdots, n\}$, so dass $\sigma(k) = i$ gilt. Da aber andererseits für alle $i \in \{k + 1, \cdots, n\}$ die Gleichung $\sigma(i) = i$ gilt, hätten wir

   $$\sigma(i) = \sigma(k),$$

   woraus wegen der Injektivität von σ sofort $i = k$ folgt, was im Widerspruch zu

   $$i \in \{k + 1, \cdots, n\}$$

   steht. Damit ist der Fall $k < \sigma(k)$ ausgeschlossen.

2. $\sigma(k) < k$.

   In diesem Fall setzen wir $i := k$ und haben damit ein i gefunden, für das wie behauptet

   $$\sigma(i) < i$$

   gilt. $\square$

Lösung: Nun sind wir in der Lage, die in der Aufgabe formulierte Behauptung nachzuweisen. Nach Leibniz gilt

$$\texttt{det}(A) := \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \texttt{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma(j)}.$$

Ist $\sigma \in \mathcal{S}_n$ mit $\sigma \neq \mathrm{id}_n$, dann gibt es nach dem gerade bewiesenen Lemma ein $i \in \{1, \cdots, n\}$ mit $\sigma(i) < i$. Da A eine obere Dreiecks-Matrix ist, gilt für dieses i

$$a_{i,\sigma(i)} = 0.$$

Damit gilt für $\sigma \neq \mathrm{id}_n$, dass

$$\prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma(j)} = 0$$

ist, denn wenn einer der Faktoren den Wert 0 hat, dann ist auch das ganze Produkt 0. Von der ganzen Summe in der Definition von $\mathtt{det}(A)$ bleibt also nur der Summand σ mit $\sigma = \mathrm{id}_n$ übrig und wir haben

$$\mathtt{det}(A) = \prod_{j=1}^{n} a_{j,\mathrm{id}_n(j)} = \prod_{j=1}^{n} a_{j,j}. \qquad \square$$