Aufgabe 1: Es sei $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ gegeben als

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

und es gelte $a \cdot d \neq b \cdot c$. Zeigen Sie, dass die Matrix A ein Inverses hat und berechnen Sie dieses Inverse. Machen Sie dazu den Ansatz

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie die Zahlen e, f, g und h aus der Forderung, dass $A^{-1} \cdot A = E_2$ gelten muss.

Lösung: Wir machen den in der Aufgabe angegebenen Ansatz und haben dann die folgende Gleichung zu lösen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Führen wir die Matrix-Multiplikation aus, so erhalten wir die Gleichung

$$\begin{pmatrix} a \cdot e + b \cdot g & a \cdot f + b \cdot h \\ c \cdot e + d \cdot g & c \cdot f + d \cdot h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vergleichen wir jetzt die Komponenten der beiden Matrizen, so finden wir insgesamt vier Gleichungen für die Unbekannten e, f, g und h.

1. $a \cdot e + b \cdot g = 1$,
2. $a \cdot f + b \cdot h = 0$,
3. $c \cdot e + d \cdot g = 0$,
4. $c \cdot f + d \cdot h = 1$.

Wir stellen die zweite Gleichung nach $a \cdot f$ und die dritte Gleichung nach $c \cdot e$ um und erhalten

$$a \cdot f = -b \cdot h \quad \text{und} \quad c \cdot e = -d \cdot g.$$

Um diese Beziehungen ausnutzen zu können, multiplizieren wir die erste Gleichung mit c und die vierte Gleichung mit a. Wir erhalten:

$$a \cdot c \cdot e + b \cdot c \cdot g = c \quad \text{und} \quad a \cdot c \cdot f + a \cdot d \cdot h = a.$$

Wir ersetzen in der ersten dieser beiden Gleichungen $c \cdot e$ durch $-d \cdot g$ und in der zweiten Gleichung ersetzen wir $a \cdot f$ durch $-b \cdot h$. Das liefert

$$-a \cdot d \cdot g + b \cdot c \cdot g = c \quad \text{und} \quad -b \cdot c \cdot h + a \cdot d \cdot h = a,$$

was wir zu

$$(b \cdot c - a \cdot d) \cdot g = c \quad \text{und} \quad (a \cdot d - b \cdot c) \cdot h = a$$

umstellen. Nach Voraussetzung gilt $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$. Daher können wir die beiden Gleichungen durch diesen Wert teilen und erhalten

$$g = -\frac{c}{a \cdot d - b \cdot c} \quad \text{und} \quad h = \frac{a}{a \cdot d - b \cdot c}.$$

Um auch Formeln für e und f zu bestimmen, stellen wir die zweite der ursprünglich hergeleiteten Gleichungen nach $b \cdot h$ um und die dritte Gleichung stellen wir nach $d \cdot g$ um. Wir erhalten

$$b \cdot h = -a \cdot f \quad \text{und} \quad d \cdot g = -c \cdot e.$$

Nun multiplizieren wir die erste Gleichung mit d und die vierte Gleichung mit b. Das liefert

$$a \cdot d \cdot e + b \cdot d \cdot g = d \quad \text{und} \quad b \cdot c \cdot f + b \cdot d \cdot h = b.$$

Ersetzen wir in der ersten Gleichung $d \cdot g$ durch $-c \cdot e$ und in der zweiten Gleichung $b \cdot h$ durch $-a \cdot f$ so finden wir

$$a \cdot d \cdot e - b \cdot c \cdot e = d \quad \text{und} \quad b \cdot c \cdot f - a \cdot d \cdot f = b,$$

was wir zu

$$(a \cdot d - b \cdot c) \cdot e = d \quad \text{und} \quad (b \cdot c - a \cdot d) \cdot f = b$$

vereinfachen. Daraus folgt wie oben

$$e = \frac{d}{a \cdot d - b \cdot c} \quad \text{und} \quad f = \frac{-b}{a \cdot d - b \cdot c}.$$

Insgesamt haben wir also

$$A^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

gefunden und wenn wir zur Probe $A^{-1} \cdot A$ berechnen, so erhalten wir tatsächlich die Einheits-Matrix. $\square$