Aufgaben zur Vorlesung "*Mathematik I*"

Aufgabe 1: Für zwei Mengen A und B werde die *symmetrische Differenz* $A \oplus B$ durch die Gleichung

$$A \oplus B := (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

definiert. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der symmetrischen Differenz:

(a) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.

(b) $A \oplus B = A \oplus C \to B = C$.

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Gleichungen:

(c) $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$.

(d) $A \cup (B \oplus C) = (A \cup B) \oplus (A \cup C)$.

Aufgabe 2: Beweisen Sie die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot (i+1) = \frac{1}{3} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2).$$

Aufgabe 3: Es sei M eine beliebige Menge. Beweisen Sie die folgende Behauptung:

Wenn eine Relation $R \subseteq M \times M$ transitiv ist, dann ist auch die Relation $R \circ R$ transitiv.

Aufgabe 4: Welche Bedingungen müssen die Zahlen α, β, γ und δ erfüllen, damit das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha \cdot x + \beta \cdot y &= b_1 \\ \gamma \cdot x + \delta \cdot y &= b_2 \end{aligned}$$

in den Unbekannten x und y für beliebige Zahlen b_1 und b_2 eine eindeutige Lösung hat?

Aufgabe 5: Bestimmen Sie alle komplexe Zahlen z, für die die Gleichung $z^3 = -1$ gilt. Machen Sie dazu den Ansatz $z = a + b \cdot i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und bestimmen Sie a und b.

Aufgabe 6: Lösen Sie die Rekurrenz-Gleichung

$$a_{n+2} = 3 \cdot a_{n+1} - 2 \cdot a_n$$

für die Anfangs-Bedingungen $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$.

Aufgabe 7: Es sei $\mathcal{G} = \langle G, e, \circ \rangle$ eine kommutative Gruppe und es sei $a \in G$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass die Menge

$$U_a := \{a \circ g \mid g \in G\}$$

eine Untergruppe von $\mathcal{G}$ ist!

Aufgabe 8: Für welche Werte von p und q hat die Gleichung

$$x^3 - p \cdot x - q = 0$$

genau eine reelle Lösung?

Aufgabe 9: Es sei $G := \mathbb{Q}\backslash\{1\}$. Wir definieren auf G eine Operation

$$\circ : G \times G \to G$$

durch die Festlegung

$$a \circ b := a + b - a \cdot b.$$

Zeigen Sie, dass die Struktur $\langle G, 0, \circ \rangle$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 10: Es sei $\langle G, e, \cdot \rangle$ eine kommutative Gruppe, für welche die Menge G endlich ist. Weiter sei $n := \mathit{card}(G)$, G hat also die Form

$$G = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

Zeigen Sie, dass

$$g^n = e \quad \text{für alle } g \in G \text{ gilt.}$$

Hinweis 1: Betrachten Sie die beiden Produkte

$$p_1 := a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \quad \text{und} \quad p_2 := (a_1 \cdot g) \cdot (a_2 \cdot g) \cdot \ldots \cdot (a_n \cdot g)$$

und zeigen Sie, dass die beiden Produkte gleich sind. Überlegen Sie sich dazu, wie die Menge der Faktoren des Produkts p_2 aus der Menge der Faktoren des Produkts p_1 hervorgeht.

Hinweis 2: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für eine endliche Menge M jede injektive Funktion $f : M \to M$ auch surjektiv ist.

Aufgabe 11: Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \Big(n \geq 8 \to \exists a, b \in \mathbb{N} : 3 \cdot a + 5 \cdot b = n\Big).$$

Aufgabe 12: Es seien $\langle G, 1, \cdot \rangle$ und $\langle F, 0, + \rangle$ zwei kommutative Gruppen. Weiter sei eine Abbildung

$$\varphi : G \to F$$

gegeben, die folgende Eigenschaften hat:

$$\varphi(1) = 0, \quad \varphi(a^{-1}) = -\varphi(a), \quad \text{und} \quad \varphi(a \cdot b) := \varphi(a) + \varphi(b).$$

Weiter sei U eine Untergruppe von F. Wir definieren auf G eine Relation $=_\varphi$ durch die Festlegung

$$x =_\varphi y \quad \text{g.d.w.} \quad \varphi(x) - \varphi(y) \in U.$$

Zeigen Sie, dass die Relation $=_\varphi$ eine Äquivalenz-Relation auf G ist, die mit der auf G definierten Operation $\cdot$ verträglich ist.

Aufgabe 13: Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$