Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die Determinante von A mit der Determinanten der transponierten Matrix A^t übereinstimmt, zeigen Sie also

$$\mathtt{det}(A^t) = \mathtt{det}(A).$$

Lösung: Um den Beweis besser strukturieren zu können, weisen wir zunächst die folgenden Lemmata nach:

1. $\{\sigma^{-1} \mid \sigma \in \mathcal{S}_n\} = \mathcal{S}_n$.

   Beweis: Da wir hier die Gleichheit zweier Mengen zeigen müssen, spalten wir den Beweis in zwei Teile auf:

   "$\subseteq$" : Für jedes $\sigma \in \mathcal{S}_n$ gilt auch $\sigma^{-1} \in \mathcal{S}_n$. Daraus folgt schon

   $$\{\sigma^{-1} \mid \sigma \in \mathcal{S}_n\} \subseteq \mathcal{S}_n. \checkmark$$

   "$\supseteq$" : Sei nun $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Es gilt $\sigma = (\sigma^{-1})^{-1}$ und daraus folgt $\sigma \in \{\sigma^{-1} \mid \sigma \in \mathcal{S}_n\}$. Also haben wir auch

   $$\mathcal{S}_n \subseteq \{\sigma^{-1} \mid \sigma \in \mathcal{S}_n\}. \checkmark \qquad \diamond$$

2. $\big\{\langle i, \sigma(i)\rangle \mid i \in \{1, \cdots, n\}\big\} = \big\{\langle \sigma^{-1}(j), j\rangle \mid j \in \{1, \cdots, n\}\big\} \quad$ für alle $\sigma \in \mathcal{S}_n$,

   Beweis: Wieder spalten wir den Beweis in zwei Teile auf.

   "$\subseteq$" : Es sei $k \in \{1, \cdots, n\}$. Dann müssen wir zeigen, dass

   $$\langle k, \sigma(k)\rangle \in \big\{\langle \sigma^{-1}(j), j\rangle \mid j \in \{1, \cdots, n\}\big\}$$

   gilt. Wir definieren $l := \sigma(k)$, was $\sigma^{-1}(l) = k$ impliziert. Folglich gilt

   $$\langle k, \sigma(k)\rangle = \langle \sigma^{-1}(l), l\rangle \in \big\{\langle \sigma^{-1}(j), j\rangle \mid j \in \{1, \cdots, n\}\big\}. \checkmark$$

   "$\supseteq$" : Es sei $l \in \{1, \cdots, n\}$. Dann müssen wir zeigen, dass

   $$\langle \sigma^{-1}(l), l\rangle \in \big\{\langle j, \sigma(j)\rangle \mid j \in \{1, \cdots, n\}\big\}$$

   gilt. Wir definieren $k := \sigma^{-1}(l)$, was $\sigma(k) = l$ impliziert. Folglich gilt

   $$\langle \sigma^{-1}(l), l\rangle = \langle k, \sigma(k)\rangle \in \big\{\langle i, \sigma(i)\rangle \mid i \in \{1, \cdots, n\}\big\}. \checkmark \qquad \diamond$$

3. $\mathtt{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathtt{sgn}(\sigma) \quad$ für alle $\sigma \in \mathbb{S}_n$.

   Beweis: Es gilt $\sigma^{-1} \circ \sigma = \mathtt{id}_n$ und daraus folgt wegen $\mathtt{sgn}(\mathtt{id}_n) = 1$ und der Gleichung $\mathtt{sgn}(\alpha \circ \beta) = \mathtt{sgn}(\alpha) \cdot \mathtt{sgn}(\beta)$, dass

   $$\mathtt{sgn}(\sigma^{-1}) = \frac{1}{\mathtt{sgn}(\sigma)}$$

   gelten muss. Da $\mathtt{sgn}(\sigma)$ aber nur die Werte $+1$ oder -1 annehmen kann und da außerdem

   $$\frac{1}{1} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{-1} = -1$$

   gilt, haben wir in jedem Fall

   $$\mathtt{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathtt{sgn}(\sigma). \qquad \diamond$$

Damit haben wir alles für den Beweis der eigentlichen Behauptung vorbereitet. Nach Definition der Determinate gilt

$$
\begin{aligned}
\mathtt{det}(A^t) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathtt{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a^t_{i,\sigma(i)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathtt{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \\
&= \sum_{\sigma \in \{\mu^{-1} \mid \mu \in \mathcal{S}_n\}} \mathtt{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \\
&\quad \text{denn } \{\mu^{-1} \mid \mu \in \mathcal{S}_n\} = \mathcal{S}_n \\
&= \sum_{\mu \in \mathcal{S}_n} \mathtt{sgn}(\mu^{-1}) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{\mu^{-1}(i),i} \\
&= \sum_{\mu \in \mathcal{S}_n} \mathtt{sgn}(\mu) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{\mu^{-1}(i),i} \\
&\quad \text{denn } \mathtt{sgn}(\mu^{-1}) = \mathtt{sgn}(\mu) \\
&= \sum_{\mu \in \mathcal{S}_n} \mathtt{sgn}(\mu) \cdot \prod \big\{ a_{\mu^{-1}(i),i} \mid i \in \{1, \cdots, n\} \big\} \\
&= \sum_{\mu \in \mathcal{S}_n} \mathtt{sgn}(\mu) \cdot \prod \big\{ a_{i,\mu(i)} \mid i \in \{1, \cdots, n\} \big\} \\
&\quad \text{denn } \big\{ \langle i, \mu(i) \rangle \mid i \in \{1, \cdots, n\} \big\} = \big\{ \langle \mu^{-1}(i), i \rangle \mid i \in \{1, \cdots, n\} \big\} \\
&= \mathtt{det}(A). \qquad \square
\end{aligned}
$$