Aufgabe 1: Bestimmen Sie mit Hilfe der Cardanischen Formel alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Lösung: Die Cardanische Formel können wir anwenden, wenn wir eine Gleichung der Form

$$x^3 - p \cdot x - q = 0$$

lösen wollen. Um die in der Aufgabe gegebene Gleichung in diese Form zu transformieren, machen wir den Ansatz $z = x + c$. Aus der Gleichung für z wird dann die folgende Gleichung für x:

$$(x + c)^3 + (x + c)^2 + (x + c) + 1 = 0.$$

Lösen wir die Potenzen auf, so erhalten wir

$$x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot c + 3 \cdot x \cdot c^2 + c^3 + x^2 + 2 \cdot x \cdot c + c^2 + x + c + 1 = 0.$$

In dieser Gleichung ordnen wir die einzelnen Terme nach den Potenzen von x und finden

$$x^3 + (3 \cdot c + 1) \cdot x^2 + (3 \cdot c^2 + 2 \cdot c + 1) \cdot x + c^3 + c^2 + c + 1 = 0.$$

Der Term mit x^2 verschwindet, wenn

$$3 \cdot c + 1 = 0, \quad \text{also } c = -\frac{1}{3}$$

gilt. Setzen wir diesen Wert für c oben ein, so erhalten wir die Gleichung

$$x^3 + \Big(3 \cdot \frac{1}{9} - 2 \cdot \frac{1}{3} + 1\Big) \cdot x - \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 = 0,$$

was wir wegen

$$3 \cdot \frac{1}{9} - 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad -\frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{-1 + 3 - 9 + 27}{27} = \frac{20}{27}$$

zu

$$x^3 + \frac{2}{3} \cdot x + \frac{20}{27} = 0,$$

vereinfachen können. Wenn wir

$$p := -\frac{2}{3} \quad \text{und} \quad q := -\frac{20}{27}$$

definieren, dann hat diese Gleichung die Form

$$x^3 - p \cdot x - q = 0$$

und kann mit der Cardanischen Formel gelöst werden. Die Lösung x_1 hat die Form

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\Big(\frac{q}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{p}{3}\Big)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\Big(\frac{q}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{p}{3}\Big)^3}}.$$

Wir berechnen zunächst die Diskriminante D. Es gilt

$$D = \Big(\frac{q}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{p}{3}\Big)^3 = \frac{100}{3^6} + \frac{8}{3^6} = \frac{108}{3^6} = \frac{4}{27}.$$

Für $\sqrt{D}$ finden wir

$$\sqrt{D} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{9} \cdot \sqrt{3}.$$

Damit finden wir für x_1 den Wert

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{-\frac{10}{27}+\frac{2}{9}\cdot\sqrt{3}}+\sqrt[3]{-\frac{10}{27}-\frac{2}{9}\cdot\sqrt{3}}\;. \\
&= \frac{1}{3}\cdot\left(\sqrt[3]{-10+6\cdot\sqrt{3}}+\sqrt[3]{-10-6\cdot\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}
$$

Berechnen wir diesen Wert mit Hilfe eines Taschenrechners, so ergibt sich der Wert

$$x_1 \approx -0.6666666666666667,$$

was die Vermutung nahelegt, dass in Wahrheit $x_1 = -\frac{2}{3}$ gilt. Um dieser Vermutung nachzugehen, machen wir den Ansatz

$$-10+6\cdot\sqrt{3} = \big(a+b\cdot\sqrt{3}\big)^3, \qquad \text{(was } -10-6\cdot\sqrt{3} = \big(a-b\cdot\sqrt{3}\big)^3 \text{ impliziert)}$$

und versuchen, a und b so zu bestimmen, dass $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt. Mit diesem Ansatz erhalten wir für x_1 die Gleichung

$$x_1 = \frac{1}{3}\cdot\big(a+b\sqrt{3}+a-b\sqrt{3}\big) = \frac{2}{3}\cdot a.$$

Führen wir die Potenz in dem obigen Ansatz aus, so erhalten wir

$$-10+6\cdot\sqrt{3} = a^3+3\cdot a^2\cdot b\cdot\sqrt{3}+9\cdot a\cdot b^2+3\cdot b^3\cdot\sqrt{3},$$

was wir zu

$$-10+6\cdot\sqrt{3} = a^3+9\cdot a\cdot b^2+\big(3\cdot a^2\cdot b+3\cdot b^3\big)\cdot\sqrt{3}$$

umordnen. Da wir angenommen haben, das a und b ganze Zahlen sind, führt dies auf die beiden Gleichungen

$$
\begin{aligned}
-10 &= a^3+9\cdot a\cdot b^2 \quad \text{und} \quad 6 = 3\cdot(a^2+b^2)\cdot b. \\
-10 &= a\cdot\big(a^2+9\cdot b^2\big) \quad \text{und} \quad 2 = (a^2+b^2)\cdot b.
\end{aligned}
$$

Da es so aussieht, als ob $x_1 = -\frac{2}{3}$ gilt und wir andererseits oben gesehen haben, dass $x_1 = \dfrac{2}{3}\cdot a$ gilt, ist unsere Vermutung, dass $a = -1$ gilt. Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$-10 = -1\cdot\big(1+9\cdot b^2\big) \quad \text{und} \quad 2 = (1+b^2)\cdot b.$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen folgt zunächst $10 = 1+9\cdot b^2$ und dann $9 = 9\cdot b^2$. Damit muss $b = 1$ oder $b = -1$ gelten. Setzen wir diese beiden Möglichkeiten für b in die zweite Gleichung ein, so sehen wir, dass die zweite Gleichung für $b = 1$ richtig ist. Damit haben wir insgesamt

$$-10+6\cdot\sqrt{3} = \big(-1+\sqrt{3}\big)^3$$

gefunden. Dann ist klar, dass auch

$$-10-6\cdot\sqrt{3} = \big(-1-\sqrt{3}\big)^3$$

gelten muss und damit haben wir

$$x_1 = \frac{1}{3}\cdot\big(-1+\sqrt{3}+-1-\sqrt{3}\big) = -\frac{2}{3}.$$

Für die zweite Lösung x_2 finden wir nach der Cardanischen Formel

$$x_2 = \zeta_3\cdot\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\zeta_3^2\cdot\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\;,$$

wobei für die dritte Einheitswurzel ζ_3 die Formeln

$$\zeta_3 = -\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad \zeta_3^2 = -\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

gelten. Damit erhalten wir für x_2 den Wert

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1}{6} \cdot \big((-1 + i \cdot \sqrt{3}) \cdot (-1 + \sqrt{3}) + (-1 - i \cdot \sqrt{3}) \cdot (-1 - \sqrt{3})\big) \\
&= \frac{1}{6} \cdot \big(1 - \sqrt{3} - i \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot i + 1 + \sqrt{3} + i \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot i\big) \\
&= \frac{1}{3} + i.
\end{aligned}
$$

Für x_3 gilt schließlich

$$
x_3 = \zeta_3^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \zeta_3 \cdot \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}},
$$

Setzen wir hier die Werte ein, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
x_3 &= \frac{1}{6} \cdot \big((-1 - i \cdot \sqrt{3}) \cdot (-1 + \sqrt{3}) + (-1 + i \cdot \sqrt{3}) \cdot (-1 - \sqrt{3})\big) \\
&= \frac{1}{6} \cdot \big(1 - \sqrt{3} + i \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot i + 1 + \sqrt{3} - i \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot i\big) \\
&= \frac{1}{3} - i.
\end{aligned}
$$

Da $z = x - \frac{1}{3}$ ist, haben wir insgesamt die Lösungen $z_1 = -1$, $z_2 = +i$ und $z_3 = -i$ erhalten.