

Logik und Komplexität Aufgabensammlung

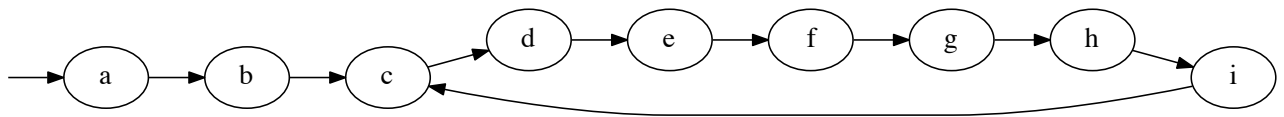
Jan Hladik & Stephan Schulz

2015

1 Übungen

Aufgabe 1 (3+3P)

- a) Simulieren Sie den Hase/Igel-Algorithmus auf der folgenden zyklischen Liste. Schreiben Sie zu jedem Schritt auf, wo sich Hase und Igel jeweils befinden. Nach wie vielen Schritten treffen sich Hase und Igel?



Schritt	Hase	Igel	Schritt	Hase	Igel
Start			10.		
1.			11.		
2.			12.		
3.			13.		
4.			14.		
5.			15.		
6.			16.		
7.			17.		
8.			18.		
9.			19.		

- b) Entwerfen Sie eine zyklische Liste mit 6 Knoten, die den Worst-Case für Hase/Igel demonstriert. Nach wie vielen Schritten treffen sich Hase und Igel in Ihrem Beispiel?

Aufgabe 2 (3+3)

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \sin(x)^2$

- a) Zeigen Sie: $f \in O(1)$
- b) Können Sie den Nachweis mit dem Grenzwertkriterium und der Regel von l'Hôpital führen? Warum oder warum nicht?

Aufgabe 3 (3+3)

- Zeigen Sie: $x \log_2 x \in O(x^2)$
- Zeigen Sie: $\log x \in O(x^2)$

Aufgabe 4 (1+1+1+6 Punkte)

Betrachten Sie die folgende C-Funktion:

```
int machwas(int n)
{
    int k = n;
    sum = 0;
    for (i=0; i < n; i++)
    {
        for (j=0; j < k; j++)
        {
            sum++;
        }
        k = k/2;
    }
    return sum;
}
```

- Bestimmen Sie den Rückgabewert für die Eingaben $n = 4, n = 8, n = 12$.
- Bestimmen Sie das kleinste $k \in \mathbb{N}$ so dass die Laufzeitkomplexität von `machwas()` in $\mathcal{O}(n^k)$ ist.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Sortieren Sie die Folge S mit dem Bubble-Sort-Algorithmus. Geben Sie hierzu den Zustand von S nach jeder Vertauschungsoperation an.

$$S = \{3, 8, 17, 5, 15, 2, 1, 12, 4, 9\}$$

Wieviele Vertauschungen benötigen Sie?

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Sortieren Sie die Folge S mit dem in der Vorlesung besprochenen LL-Quicksort-Algorithmus. Verwenden Sie dabei jeweils das *letzte* Element einer (Teil-) Folge als Pivot.

Geben Sie hierzu jeweils an, wo sich die Pointer befinden, wenn eine Vertauschung von Elementen stattfindet, und was das Resultat der Vertauschung ist.

$$S = \{3, 8, 17, 5, 15, 2, 1, 12, 4, 9\}$$

Wieviele Vertauschungen benötigen Sie?

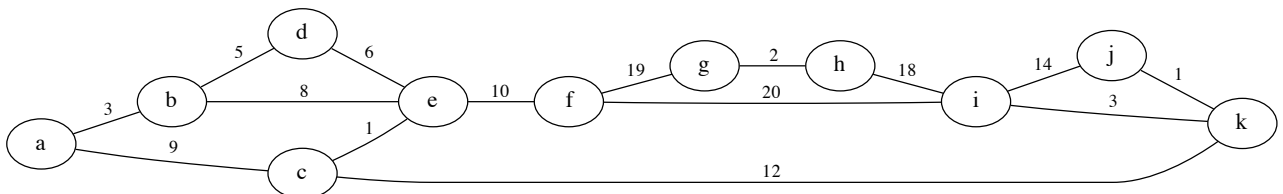
Aufgabe 7

6+1P Bestimmen Sie die Komplexität (\mathcal{O} -Notation) des (hypothetischen) *Perfect-Quicksort-Algorithmus*, der im folgenden Punkt vom Standard-Quicksort Algorithmus abweicht: Perfect QS findet immer das perfekte Pivot-Element, aber benötigt hierfür bei n Elementen zusätzliche Zeit der Größenordnung $\mathcal{O}(n^2)$.

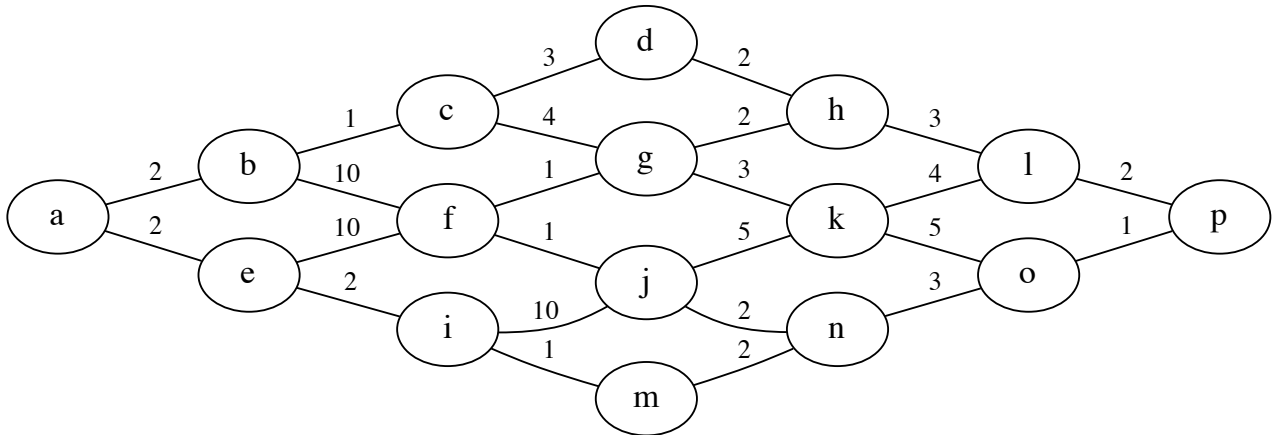
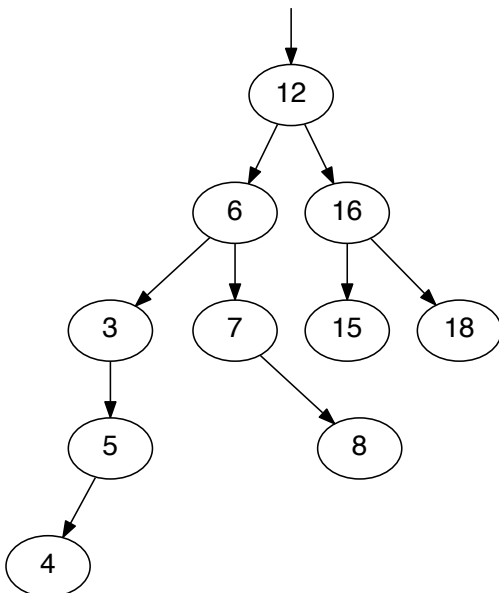
Würden Sie diesen Algorithmus gegenüber dem normalen Quicksort bevorzugen?

Aufgabe 8 (3+2+2P)

Gegeben sei der Graph G :



- Bestimmen Sie für G einen minimalen Spannbaum mit Hilfe des Prim-Algorithmus.
- Wie viele Kanten enthält der MSB für einen Graphen mit n Kanten? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Begründen Sie anhand von G , warum es zur Bestimmung des MSB eines Graphen im Allgemeinen nicht ausreicht, die günstigsten Kanten zu verwenden.

Aufgabe 9 (6 Punkte)Gegeben Sei der Graph H .Bestimmen Sie für alle Knoten die minimale Entfernung zum Knoten a mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus.**Aufgabe 10 (3+3+3P)**Gegeben sei der binäre Suchbaum B .

- Fügen Sie zu B Knoten für die Schlüssel 9, 14 und 8 hinzu.
- Entfernen Sie aus B (Achtung: dem ursprünglichen Baum, nicht dem Resultat von Aufgabenteil a) die Knoten 3, 12 und 7.
- Bestimmen Sie eine möglichst kleine Anzahl von Rotationen, durch die B die Bedingung erfüllt, dass für jeden Knoten der Höhenunterschied der beiden Kinder maximal 1 beträgt.