Matrikelnummer:	
ÜBUNGSKLAUSUR	Fakultät **Technik** Studiengang: **Angewandte Informatik** Jahrgang / Kurs : **2016 / B/C/K** Studienhalbjahr: **2. Semester**
Datum: **21./22. Juli 2016**	Bearbeitungszeit: **90 Minuten**
Modul: **T2INF1003.1** Unit: **Algorithmen**	Dozent: **Jan Hladik** **Stephan Schulz**
Hilfsmittel: **Vorlesungsskript, eigene Notizen**	
Punkte:	Note:

Aufgabe	erreichbar	erreicht
1	7	
2	9	
3	9	
4	7	
5	8	
6	11	
7	12	
Summe	63	

1. Sind Sie gesund und prüfungsfähig?
2. Sind Ihre Taschen und sämtliche Unterlagen, insbesondere alle nicht erlaubten Hilfsmittel, seitlich an der Wand zum Gang hin abgestellt und nicht in Reichweite des Arbeitsplatzes?
3. Haben Sie auch außerhalb des Klausurraumes im Gebäude keine unerlaubten Hilfsmittel oder ähnliche Unterlagen liegen lassen?
4. Haben Sie Ihr Handy ausgeschaltet und abgegeben?

(Falls Ziff. 2 oder 3 nicht erfüllt sind, liegt ein Täuschungsversuch vor, der die Note „nicht ausreichend“ zur Folge hat.)

Aufgabe 1 (5+2 Punkte)
Betrachten Sie die Folge

$$S = [6, 4, 10, 12, 2, 15, 19, 5, 14, 9]$$

a) Sortieren Sie die Folge S mit dem Insertion-Sort-Verfahren. Geben Sie hierzu den Zustand von S nach jeder Einfügeoperation (also nach jedem Durchlauf der äußersten Schleife) an.

b) Wie viele Vergleiche von Elementen aus S benötigen Sie?

Lösung

a)

Original :	6	4	10	12	2	15	19	5	14	9	–
Iteration 1:	4	6	10	12	2	15	19	5	14	9	Comparisons: 1
Iteration 2:	4	6	10	12	2	15	19	5	14	9	Comparisons: 1
Iteration 3:	4	6	10	12	2	15	19	5	14	9	Comparisons: 1
Iteration 4:	2	4	6	10	12	15	19	5	14	9	Comparisons: 4
Iteration 5:	2	4	6	10	12	15	19	5	14	9	Comparisons: 1
Iteration 6:	2	4	6	10	12	15	19	5	14	9	Comparisons: 1
Iteration 7:	2	4	5	6	10	12	15	19	14	9	Comparisons: 6
Iteration 8:	2	4	5	6	10	12	14	15	19	9	Comparisons: 3
Iteration 9:	2	4	5	6	9	10	12	14	15	19	Comparisons: 6

b) 24 Vergleiche

Aufgabe 2 (3+3+3 Punkte)

a) Betrachten Sie folgende Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$f(n) = \begin{cases} 2^n & \text{falls } n \leq 3 \\ 8 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen oder widerlegen Sie: $f \in \mathcal{O}(1)$

b) Zeigen oder widerlegen Sie: $\ln(n) \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$

c) Zeigen oder widerlegen Sie: $e^n + 3n^2 \in \Theta(e^n)$
Zur Erinnerung: $g \in \Theta(f)$, falls $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c \in \mathbb{R}^{>0}$

Lösung

a) $f \in \mathcal{O}(1)$. Betrachte $c = 8$, $k = 4$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}, n > k : f(n) = 8 \leq 8 = c * 1$ und damit die Behauptung per Definition von $\mathcal{O}$.

b) $\ln(n) \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$ mit l'Hopital: $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0 \in \mathbb{R}$

c) $e^n + 3n^2 \in \Theta(e^n)$ mit l'Hopital: $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n+3n^2}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n+6n}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n+6}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{e^n} = 1 \in \mathbb{R}^{\geq 0}$

Fortsetzung

Aufgabe 3 (1+1+1+6 Punkte)
Betrachten Sie die folgende C-Funktion:

```
int machwasanderes(int n)
{
    int sum, i, j;
    sum = 0;
    for(i=0; i< n; i++)
    {
        for(j=i; j<n; j++)
        {
            sum++;
        }
    }
    return sum;
}
```

a) Bestimmmen Sie den Rückgabwert für die Eingaben $n = 2, n = 4, n = 8$.

b) Bestimmen Sie das kleinste $k \in \mathbb{N}$ so dass die Laufzeitkomplexität von `machwasanderes()` in $\mathcal{O}(n^k)$ ist. Begründen Sie Ihre Aussage.

Lösung

a) $2 \mapsto 3, 4 \mapsto 10, 8 \mapsto 36$

b) *machwasanderes* $\in \mathcal{O}(n^2)$. Die äußere Scheife läuft von 0 bis $n-1$, also n Durchläufe. Die innere Schleife läuft jeweils von i bis n, also im Schnitt $n/2$ Schritte. Damit haben wir insgesamt ca. $n \cdot n/2$ Durchläufe, also $\frac{1}{2}n^2$.

Aufgabe 4 (4+3 Punkte)
Betrachten Sie die Folge

$$S = (6, 4, 10, 12, 2, 15, 19, 5, 14, 9, 12)$$

a) Sortieren Sie die Folge mit dem Verfahren *Bottom-Up Mergesort*. Geben Sie das Ergebnis nach jeder Iteration der Hauptschleife (also nach jedem Merge-Schritt über die volle Sequenz) an.

b) Wie viele Iterationen braucht *Bottom-Up Mergesort* für eine Sequenz mit

b1) 11 Elementen?

b2) 42 Elementen?

b3) 499 Elementen?

Lösung

a)

0	6	4	10	12	2	15	19	5	14	9	12
1	4	6	10	12	2	15	5	19	9	14	12
2	4	6	10	12	2	5	15	19	9	12	14
3	2	4	5	6	10	12	15	19	9	12	14
4	2	4	5	6	9	10	12	12	14	15	19

b1) 4

b1) 6

b1) 9

Fortsetzung

Aufgabe 5 (2+3+3 Punkte)

a) Betrachten Sie folgende Rekurrenzrelation: $F(n) = F(n-1) + 2n$ mit $F(0) = 0$.

   a1) Berechnen Sie die Werte $F(2), F(4), F(6), F(8)$

   a2) Lösen Sie Rekurrenzrelation durch Angabe einer expliziten Funktion (also nicht nur $\mathcal{O}$-Notation).

b) Betrachten Sie folgende Rekurrenzrelation und lösen Sie diese (mindestens durch Angabe einer möglichst kleinen $\mathcal{O}()$-Schranke). Sie können davon ausgehen, dass $G(0) = 0$ gilt:

$$G(n) = 8 \cdot G(\frac{n}{2}) + 4n^2 - n$$

Lösung

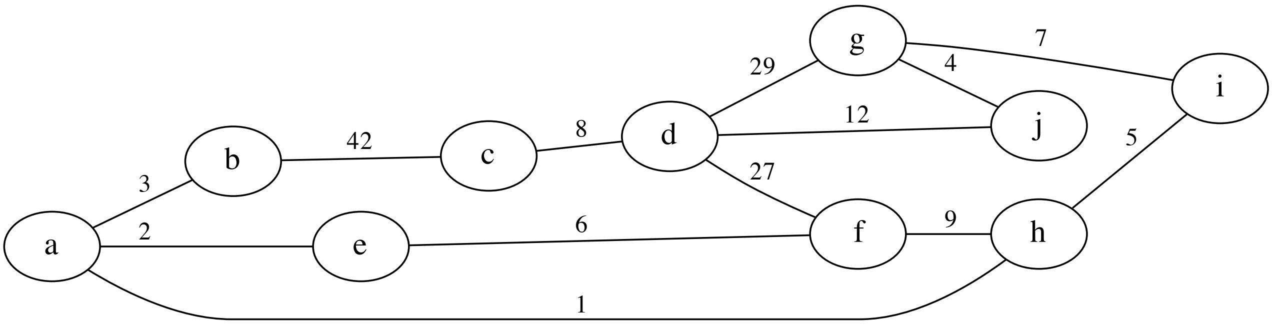
a1) $F(2) = 6, F(4) = 20, F(6) = 42, F(8) = 72$

a2) $F(n) = \Sigma_{i=0}^{n} 2i = 2\Sigma_{i=0}^{n} i = 2(n \cdot (n+1))/2 = n \cdot (n+1) = n^2 + n$

b) Master-Theorem mit $a = 8, b = 2, d = 2$, also Fall 3, $G \in O(n^{\log_2 8}) = O(n^3)$

Fortsetzung

Aufgabe 6 (4+2+5 Punkte)
Gegeben sei der Graph G:

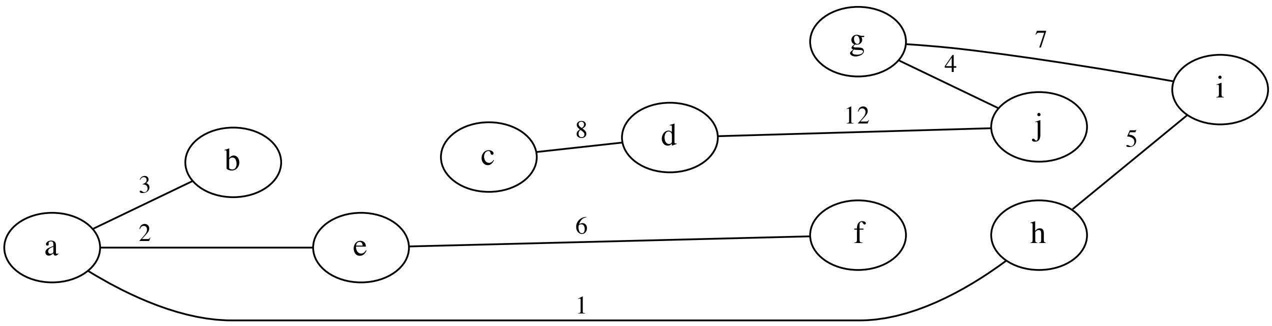


a) Bestimmen Sie für G einen minimalen Spannbaum mit Hilfe des Prim-Algorithmus. Sie können die benutzten Kanten im Bild *sauber* markieren oder eine Liste der verwendeten Kanten angeben. Wie hoch ist das Gesamtgewicht des minimalen Spannbaums?

b) Sei $H = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| = n$ und mit der Eigenschaft, dass für alle $a \in V : (a, a) \notin E$ gilt. Wie viele Kanten hat H maximal? Begründen Sie Ihre Aussage.

c) Verwenden Sie den Algorithmus von Dijkstra, um die minimale Entfernung aller Knoten in G vom Knoten **a** zu bestimmen. Auf der nächsten Seite finden Sie eine Kopie des Graphen und eine Tabelle für das Ergebnis.

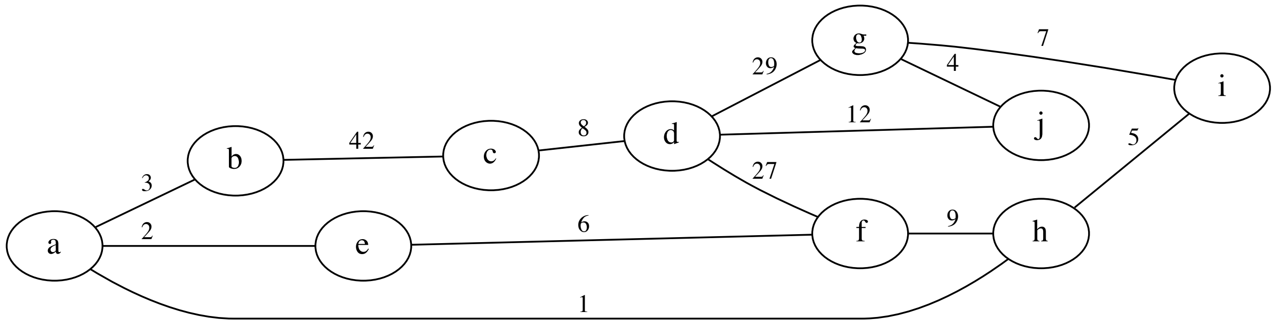
Lösung

a) 

Gewicht 48

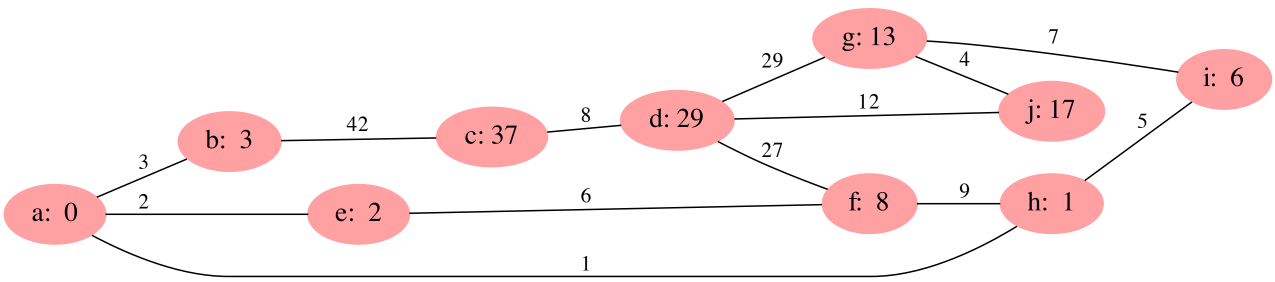
b) Der erste Knoten hat $n-1$ Partner, der zweite noch $n-2$, usw. Also $|E| = \Sigma_{i=1}^{n}(i-1) = -n + \Sigma_{i=1}^{n} i = -n + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{-2n+n^2+n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$

Fortsetzung



Knoten	Abstand
a	0
b	
c	
d	
e	
f	
g	
h	
i	
j	

Lösung

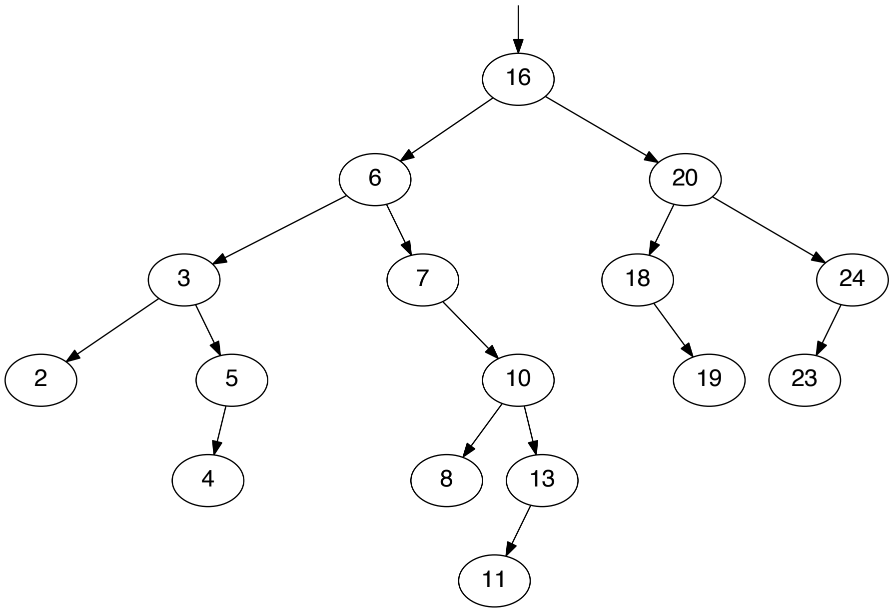


c)

Knoten	Abstand
a	0
b	3
c	37
d	29
e	2
f	8
g	13
h	1
i	6
j	17

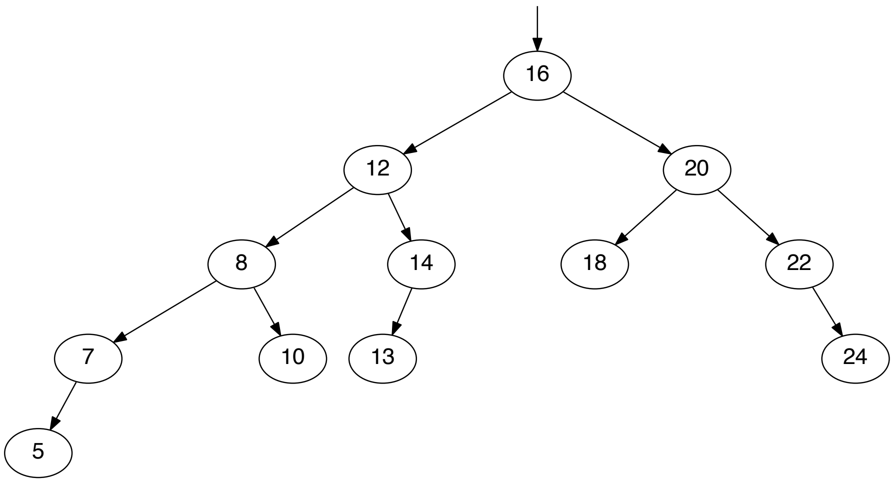
Aufgabe 7 (4+4+4 Punkte)

a) Gegeben sei der binäre Suchbaum B.



Bestimmen Sie an allen Knoten von B die Höhenbalance. Sie können die Balance einfach an die Knoten im Baum schreiben. Ist B ein AVL-Baum?

b) Betrachten Sie den AVL-Baum C:

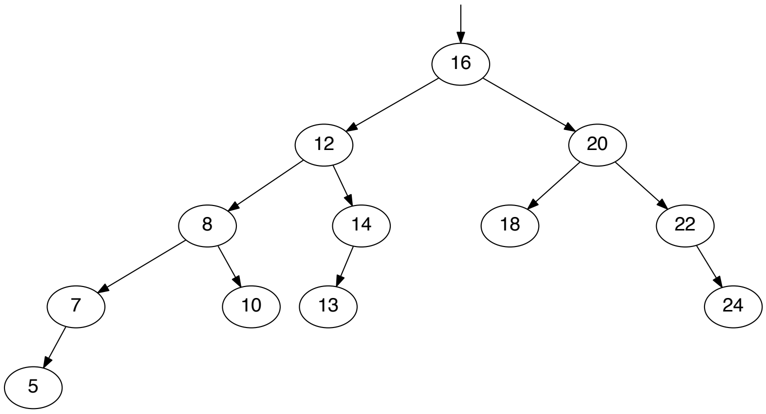


b1) Entfernen Sie aus C den Knoten 18 und stellen Sie die AVL-Eigenschaft mit dem in der Vorlesung gezeigten Verfahren wieder her. Zeichnen Sie den entstehenden Baum.

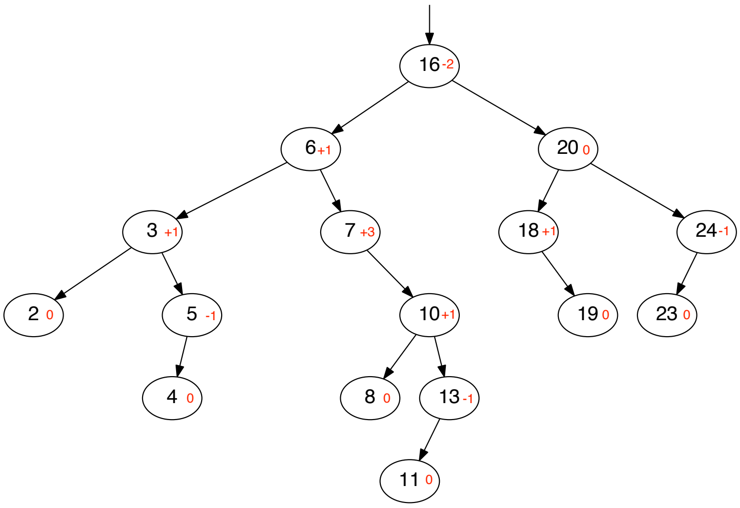
b2) Entfernen Sie aus C (nicht aus dem Ergebnis von b1!) den Knoten 12 und stellen Sie die AVL-Eigenschaft mit dem in der Vorlesung gezeigten Verfahren wieder her. Zeichnen Sie den entstehenden Baum.

Der Baum C ist auf den nächsten beiden Seiten noch einmal abgebildet.

Fortsetzung (1)

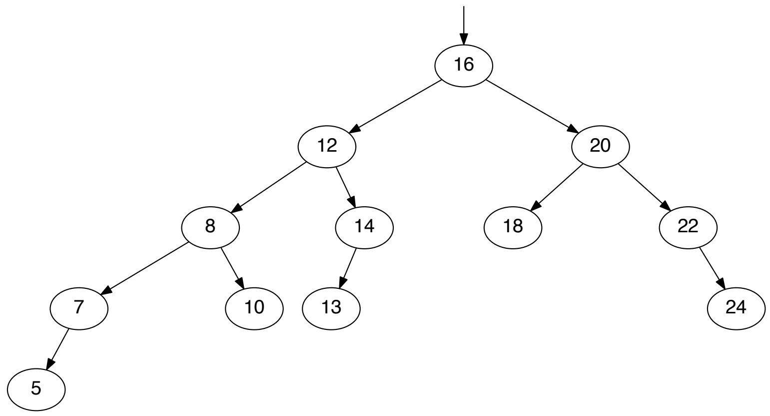


Lösung

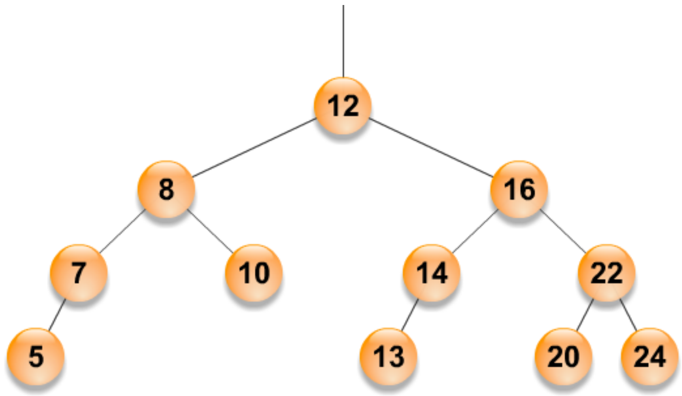


a)

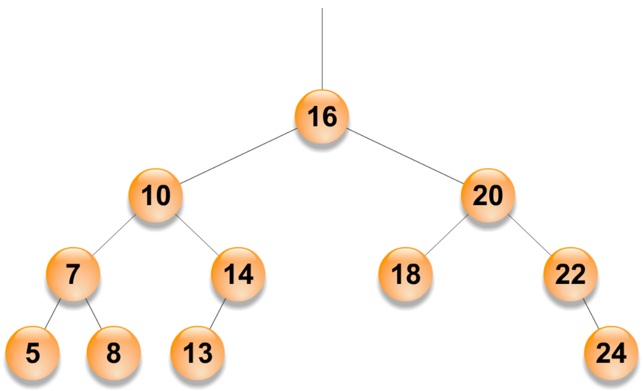
Nein, kein AVL-Baum, da Balancebetrag an einigen Knoten größer 1, Fortsetzung (2)



Lösung



b1)



b2)

– Ende der Klausur –