Bitte die Blätter nicht trennen!

Matrikelnummer:			
DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Stuttgart		Fakultät	**Technik**
		Studiengang:	**Angewandte Informatik**
		Jahrgang / Kurs :	**2016 B/K/ITA**
ÜBUNGSKLAUSUR		Studienhalbjahr:	**3. Semester**
Datum:	**15.11.2017**	Bearbeitungszeit:	**90 Minuten**
Modul:	**T2INF2002**	Dozent:	**Stephan Schulz**
Unit:	**Formale Sprachen**		**Jan Hladik**
Hilfsmittel:	**Vorlesungsskript, eigene Notizen**		

Aufgabe	erreichbar	erreicht
1	12	
2	8	
3	11	
4	10	
5	12	
6	10	
7	7	
8	10	
9	10	
Summe	90	

1. Sind Sie gesund und prüfungsfähig?
2. Sind Ihre Taschen und sämtliche Unterlagen, insbesondere alle nicht erlaubten Hilfsmittel, seitlich an der Wand zum Gang hin abgestellt und nicht in Reichweite des Arbeitsplatzes?
3. Haben Sie auch außerhalb des Klausurraumes im Gebäude keine unerlaubten Hilfsmittel oder ähnliche Unterlagen liegen lassen?
4. Haben Sie Ihr Handy ausgeschaltet und abgegeben?

(Falls Ziff. 2 oder 3 nicht erfüllt sind, liegt ein Täuschungsversuch vor, der die Note „nicht ausreichend“ zur Folge hat.)

Aufgabe 1 (2+2+2+6P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie (in grafischer Darstellung) vollständige deterministische endliche Automaten (*DFAs*) an, die die folgenden Sprachen erkennen.

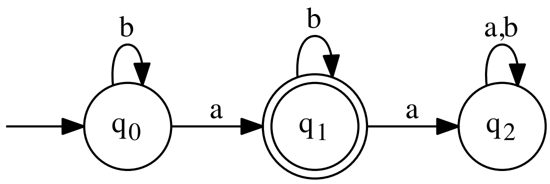
a) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = 1\}$

b) $L_2 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

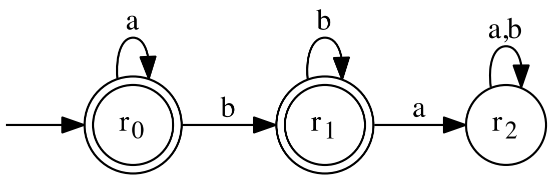
c) Verwenden Sie das in der Vorlesung gezeigten Verfahren, um aus dem Automaten A_1 für Aufgabenteil a) einen DEA für die Sprache $L_3 = \overline{L_1}$ (*complement*) zu erzeugen.

d) Verwenden Sie die bisher erzeugten Automaten, um den Produktautomaten (*product automaton*) für die Sprache $L_4 = L_2 \cap \overline{L_1} = L_2 \backslash L_1$ zu erzeugen.

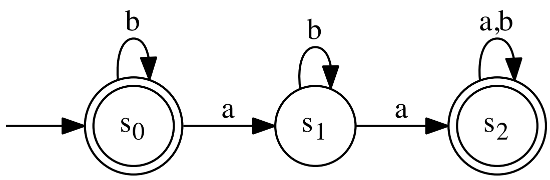
Lösung:



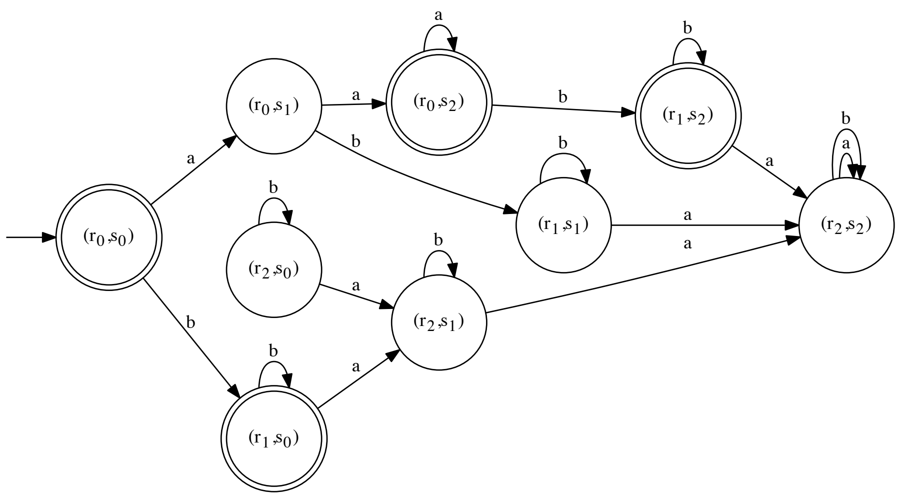
a)



b)



c)



d)

Aufgabe 1 (Fortsetzung)

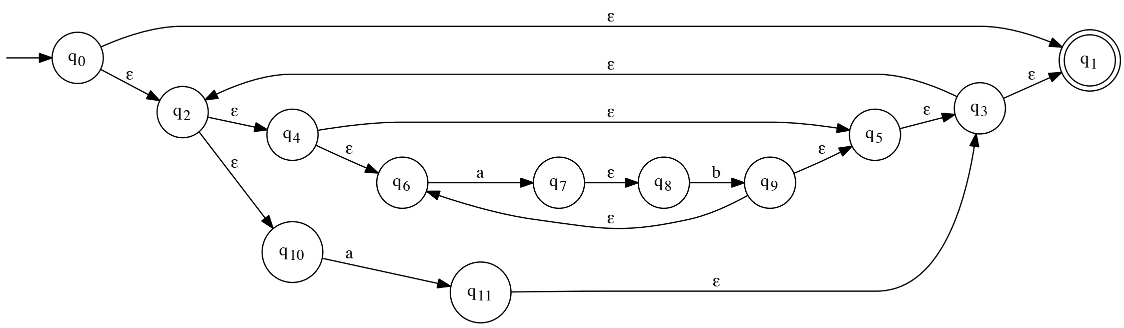
Aufgabe 2 (6+2P)

Gegeben sei die Sprache $L_2 = L(((ab)^* + a)^*)$.

a) Verwenden Sie *exakt* das in der Vorlesung gezeigte Verfahren, um einen nichtdeterministischen endlichen Automaten zu erzeugen, der L_2 erkennt. Berücksichtigen Sie insbesondere alle ε-Übergänge.

b) Zeigen Sie (mit Hilfe der algebraischen Äquivalenzen aus der Vorlesung) oder widerlegen Sie (durch Angabe eines geeigneten Wortes): $L_2 = L((aba^*)^*)$.

Lösung:



a)

b) $L_2 \neq L((aba^*)^*)$. Betrachte das Wort a. Es gilt: $a \in L_2$, aber $a \notin L((aba^*)^*)$

Aufgabe 3 (3+8P)

Betrachten Sie den deterministischen endlichen Automaten A_3.

a) Geben Sie den Lauf (*run*) des Automaten auf dem Wort $w = ababab$ an. Gilt $w \in L(A_3)$?

b) Minimieren Sie den Automaten mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren und zeichnen Sie das Ergebnis. Eine Tabelle finden Sie auf der nächsten Seite.

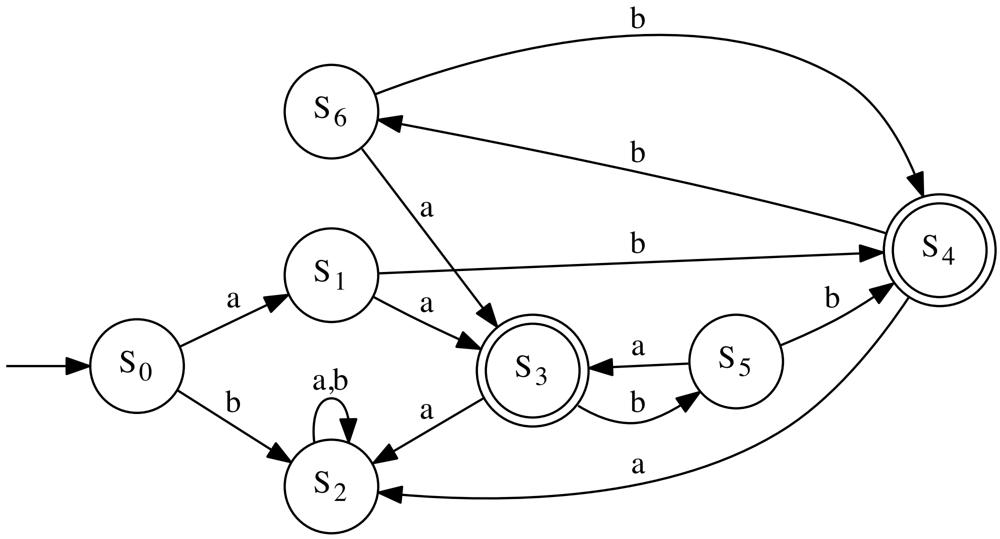


Abbildung 1: Automat A_3

Lösung:

a)
$$\begin{array}{ll} (S_0, & ababab) \\ (S_1, & babab) \\ (S_4, & abab) \\ (S_2, & bab) \\ (S_2, & ab) \\ (S_2, & b) \\ (S_2, & \varepsilon) \end{array}$$

$w \notin L(A3)$

Aufgabe 3 (Fortsetzung)

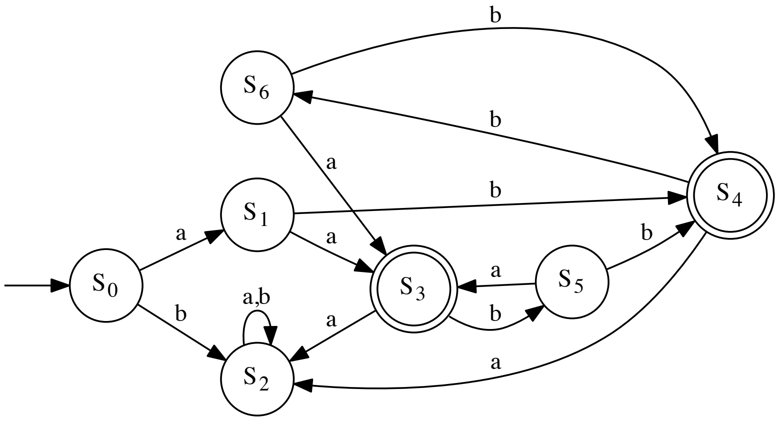


Tabelle für Aufgabe 3b)

	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
S_0	o						
S_1		o					
S_2			o				
S_3				o			
S_4					o		
S_5						o	
S_6							o

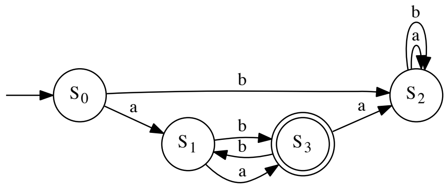
Lösung:

b)

```
# +---+---+---+---+---+---+---+---+
# |   | S0| S1| S2| S3| S4| S5| S6|
# +---+---+---+---+---+---+---+---+
# | S0| o | X | X | X | X | X | X |
# +---+---+---+---+---+---+---+---+
# | S1| X | o | X | X | X | o | o |
# +---+---+---+---+---+---+---+---+
# | S2| X | X | o | X | X | X | X |
# +---+---+---+---+---+---+---+---+
# | S3| X | X | X | o | o | X | X |
# +---+---+---+---+---+---+---+---+
# | S4| X | X | X | o | o | X | X |
# +---+---+---+---+---+---+---+---+
# | S5| X | o | X | X | X | o | o |
# +---+---+---+---+---+---+---+---+
# | S6| X | o | X | X | X | o | o |
# +---+---+---+---+---+---+---+---+
```

```
# Merging S6 into S1
# Merging S5 into S1
# Merging S4 into S3

          |    a    b
--------------------
->    S0  |   S1   S2
      S1  |   S3   S3
      S2  |   S2   S2
   *  S3  |   S2   S1
```


b
a
S_0
b
S_2
a
a
S_1
b
b
S_3
a

Aufgabe 4 (4+2+4P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_4 = \{w_1 w_2 \mid w_1 = a^{|w_2|} \text{ oder } w_2 = b^{|w_1|}\}$, d.h. Wörter in L_4 können in zwei gleichlange Teile zerlegt werden, wobei der erste Teil nur aus a oder der zweite nur aus b besteht.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_4$ an.

b) Bestimmen Sie, welche der folgenden Wörter in L_4 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.

  b1) ε

  b2) $ababbbb$

  b3) $abbb$

c) Zeigen Sie (durch Angabe eines geeigneten endlichen Automaten oder regulären Ausdrucks) oder widerlegen Sie (mittels Pumping-Lemma): L_4 ist regulär.

Lösung

a) $G = (N, \Sigma, P, S)$ mit

  - $N = \{S, R, T, C\}$
  - $P = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \to & R \mid T \\ R & \to & aRC \mid \varepsilon \\ T & \to & CTb \mid \varepsilon \\ C & \to & a \mid b \end{array} \right\}$

b1) $S \Rightarrow R \Rightarrow \varepsilon \in L_4$

b2) $ababbbb \notin L_4$

b3) $S \Rightarrow T \Rightarrow CTb \Rightarrow CCTbb \Rightarrow CCbb \Rightarrow aCbb \Rightarrow abbb \in L_4$

c) L_4 ist nicht regulär. Sonst gibt es ein k, so dass alle Wörter mit Länge k und größer gepumpt werden können. Betrachte $x = a^{2k}(ba)^k \in L_4$ (mit $w_1 = a^{2k}, w_2 = (ba)^k$). Dann wäre x zerlegbar in u, v, w mit $u = a^i v = a^j w = a^l (ba)^k$ und $i + j + l = 2k$.

Abpumpen mit $h = 0$ ergibt $x' = a^i a^l (ba)^k$ mit $i + l = 2k - j \neq 2k$. Damit ist x' von keiner der für L_4 erlaubten Formen, also $w' \notin L_4$. Widerspruch, also ist L_4 nicht regulär.

Aufgabe 4 (Fortsetzung)

Aufgabe 5 (3+3+6P)

Betrachten Sie den nichtdeterministischen endlichen Automaten A_5 in Abbildung 2.

a) Geben Sie drei verschiedene Läufe (*runs*) des Automaten A_5 auf der Eingabe $abbba$ an, von denen mindestens einer akzeptierend und einer nicht akzeptierend ist.

b) Beschreiben Sie $L(A_5)$ formal als Menge.

c) Konvertieren Sie A_5 mit dem in der Vorlesung angegebenen Verfahren in einen deterministischen endlichen Automaten. Geben Sie das Ergebnis als Tabelle an.

(Der Automat ist auf der nächsten Seite noch einmal abgebildet, falls Sie mehr als eine Seite benötigen.)

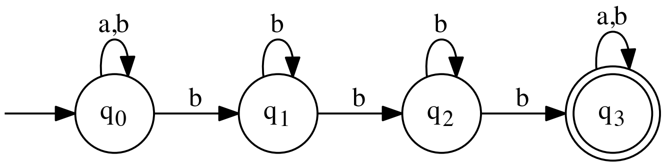


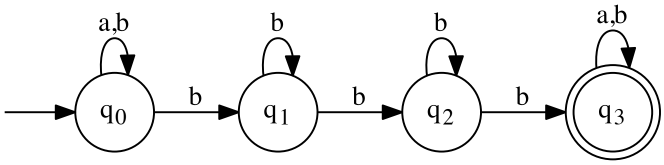
Abbildung 2: Automat A_5

Lösung

a)
- $(q_0, a, q_0), (q_0, b, q_0), (q_0, b, q_0), (q_0, b, q_0), (q_0, a, q_0)$ (nicht akzeptierend)
- $(q_0, a, q_0), (q_0, b, q_0), (q_0, b, q_0), (q_0, b, q_1)$ (nicht akzeptierend)
- $(q_0, a, q_0), (q_0, b, q_1), (q_1, b, q_2), (q_2, b, q_3), (q_3, a, q_3)$ (akzeptierend)

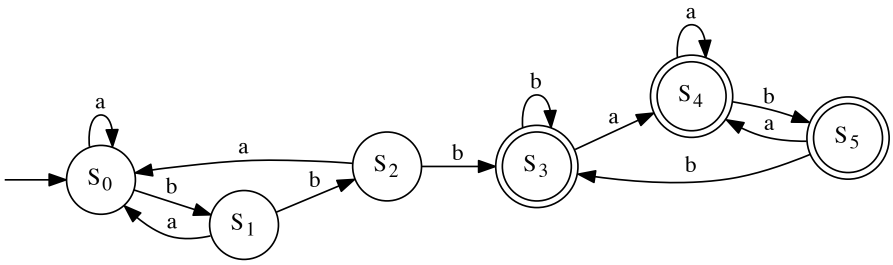
b) $L(A_5) = \{ubbbv \mid u, v \in \Sigma^*\}$

Aufgabe 5 (Fortsetzung)



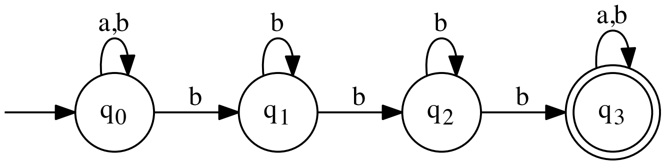
Lösung

c)
```
# S0 = frozenset(['q0'])
# Delta(S0, a) =  frozenset(['q0'])
# State is equal to  S0
# Delta(S0, b) =  frozenset(['q1', 'q0'])
# S1  =  frozenset(['q1', 'q0'])
# Delta(S1, a) =  frozenset(['q0'])
# State is equal to  S0
# Delta(S1, b) =  frozenset(['q1', 'q0', 'q2'])
# S2  =  frozenset(['q1', 'q0', 'q2'])
# Delta(S2, a) =  frozenset(['q0'])
# State is equal to  S0
# Delta(S2, b) =  frozenset(['q1', 'q0', 'q3', 'q2'])
# S3  =  frozenset(['q1', 'q0', 'q3', 'q2'])
# Delta(S3, a) =  frozenset(['q0', 'q3'])
# S4  =  frozenset(['q0', 'q3'])
# Delta(S3, b) =  frozenset(['q1', 'q0', 'q3', 'q2'])
# State is equal to  S3
# Delta(S4, a) =  frozenset(['q0', 'q3'])
# State is equal to  S4
# Delta(S4, b) =  frozenset(['q1', 'q0', 'q3'])
# S5  =  frozenset(['q1', 'q0', 'q3'])
# Delta(S5, a) =  frozenset(['q0', 'q3'])
# State is equal to  S4
# Delta(S5, b) =  frozenset(['q1', 'q0', 'q3', 'q2'])
# State is equal to  S3
         |    a    b
---------------------
->     S0 |   S0   S1
       S1 |   S0   S2
       S2 |   S0   S3
    *  S3 |   S4   S3
    *  S4 |   S4   S5
    *  S5 |   S4   S3
```



(Bild nur zur Info, nicht verlangt)

Aufgabe 5 (Fortsetzung)



Aufgabe 6 (4+6P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Betrachten Sie den Automaten A_6 in Abbildung 3.

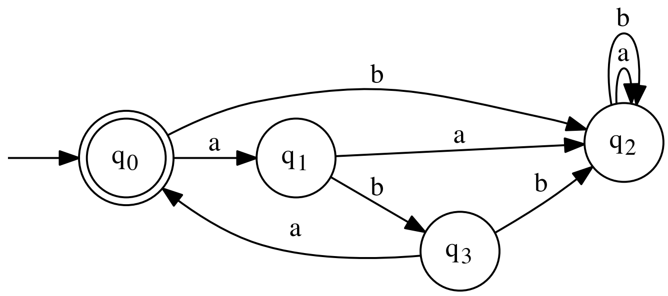


Abbildung 3: Automat A_6

a) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, das die an den verschiedenen Zuständen akzeptierten Sprachen beschreibt.

b) Lösen Sie dieses Gleichungssystem und geben Sie so einen regulären Ausdruck an, der die von A_6 akzeptierte Sprache beschreibt.

Lösung:

a)
- $L_0 = aL_1 + bL_2 + \varepsilon$
- $L_1 = aL_2 + bL_3$
- $L_2 = aL_2 + bL_2$
- $L_3 = aL_0 + bL_2$

b)

$$\begin{aligned}
L_2 &= aL_2 + bL_2 \\
&= (a+b)L_2 \\
&= (a+b)L_2 + \emptyset \\
&= (a+b)^*\emptyset \\
&= \emptyset \\
L_1 &= bL_3 \\
L_3 &= aL_0 \\
L_0 &= aL_1 + \varepsilon \\
&= abL_3 + \varepsilon \\
&= abaL_0 + \varepsilon \\
&= (aba)^*\varepsilon \\
&= (aba)^*
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 (Fortsetzung)

Aufgabe 7 (5+2P)

Sei $L_7 = \{a^n b^m a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G_7 an, die die Sprache L_7 erzeugt.

b) Geben Sie Ableitungen in G_7 für die folgenden Wörter an:

   b1) $abbaab$

   b2) $aabb$

Lösung:

a) $G_7 = (N, \Sigma, P, S)$ mit $N = \{S, T\}$, $\Sigma = \{a, b\}$,
$$P = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aSb \mid T \\ T & \rightarrow & bTa \mid \varepsilon \end{array} \right\}$$

b1) $S \Rightarrow aSb \Rightarrow aTb \Rightarrow abTab \Rightarrow abbTaab \Rightarrow abbaab$

b2) $S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaTbb \Rightarrow aabb$

Aufgabe 8 (6+2+2P)

Sei $L_8 = \{a^n b^m a^m b^n \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^+\}$ (also wie in Aufgabe 7, aber mit mindestens einem ba-Paar in der Mitte).

a) Geben Sie einen Kellerautomaten (PDA) A_8 mit $L(A_8) = L_8$ an.

b) Geben Sie jeweils eine vollständige Konfigurationsfolge von A_8 auf den folgenen Wörtern an, d.h. eine Folge, bei der die letzte Konfiguration keine mögliche Nachfolgekonfiguration hat. Wenn das Wort in L_8 ist, muss die Konfigurationsfolge akzeptierend sein.

b1) $abbaab$

b2) $aabb$

Lösung:

a) $A_8 = (\{0,1,2\}, \{a,b\}, \{Z,A,B\}, \Delta, 0, Z)$

Übergangsrelation Δ:

Q	Σ	Γ	Γ^*	Q	Kommentar
0	a	Z	AZ	0	a lesen (1. Block)
0	a	A	AA	0	
0	b	Z	BZ	1	erstes b lesen (2. Block)
0	b	A	BA	1	
1	b	B	BB	1	weitere b lesen
1	a	B	ε	2	erstes a in zweiter Hälfte lesen (3. Block)
2	a	B	ε	2	weitere a lesen
2	b	A	ε	2	weitere b lesen (4. Block)
2	ε	Z	ε	2	akzeptieren

b1) $(0, abbaab, Z) \to (0, bbaab, AZ) \to (1, baab, BAZ) \to (1, aab, BBAZ) \to (2, ab, BAZ) \to (2, b, AZ) \to (2, \varepsilon, Z) \to (2, \varepsilon, \varepsilon)$ (akzeptiert)

b2) $(0, aabb, Z) \to (0, abb, AZ) \to (0, bb, AAZ) \to (1, b, BAAZ) \to (1, \varepsilon, BBAAZ)$ (nicht akzeptiert)

Aufgabe 9 (5+5P)

Betrachten Sie die Grammatik $G_9 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$$P = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \to & AS \mid a \\ A & \to & BB \mid a \\ B & \to & AS \mid BS \mid b \end{array} \right\}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des CYK-Algorithmus, ob die folgenden Worte in $L(G_9)$ enthalten sind:

a) $w_1 = babaa$

b) $w_2 = aaabb$

Tabelle für Teil a)

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					
$w_1 =$	b	a	b	a	a

Ist $w_1 \in L(G_9)$? Ja □ Nein □

Lösung:

a)

```
+-------+-------+-------+-------+-------+-------+
|       |     1 |     2 |     3 |     4 |     5 |
+-------+-------+-------+-------+-------+-------+
|     1 |     B |     B |     A | A,S,B | A,S,B |
+-------+-------+-------+-------+-------+-------+
|     2 |       |   A,S |     - |     - |     - |
+-------+-------+-------+-------+-------+-------+
|     3 |       |       |     B |     B |   A,B |
+-------+-------+-------+-------+-------+-------+
|     4 |       |       |       |   A,S |   S,B |
+-------+-------+-------+-------+-------+-------+
|     5 |       |       |       |       |   A,S |
+-------+-------+-------+-------+-------+-------+
|     w |     b |     a |     b |     a |     a |
+-------+-------+-------+-------+-------+-------+
```

Also:
babaa ist in
L(G9)

Aufgabe 9 (Fortsetzung)

$$P = \left\{ \begin{array}{lll} S & \rightarrow & AS \mid a \\ A & \rightarrow & BB \mid a \\ B & \rightarrow & AS \mid BS \mid b \end{array} \right\}$$

Tabelle für Teil b)

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					
$w_2 =$	a	a	a	b	b

Ist $w_2 \in L(G_9)$? Ja □ Nein □

Lösung:

b)

	1	2	3	4	5
1	A,S	S,B	S,B	A	-
2		A,S	S,B	A	-
3			A,S	-	-
4				B	A
5					B
w	a	a	a	b	b

Also:
aaabb ist nicht in
L(G9)

Ende