

Formal Languages and Automata

Aufgabensammlung

Jan Hladik und Stephan Schulz

2. November 2016

1 Übungsaufgaben

1.1 Endliche Automaten

1.1.1 Aufgabe

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie für die folgenden Sprachen einen DFA an

- $L_0 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a + |w|_b = 5\}$
- $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \cdot |w|_b = 4\}$
- $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \geq 2 \text{ und } w[|w| - 1] = w[2]\}$

1.1.2 Aufgabe

Betrachten Sie den deterministischen endlichen Automaten A_2 in Abbildung 1.

1. Welche Konfigurationsfolge durchläuft der Automat beim Bearbeiten des Wortes *ababab*?
2. Welche Konfigurationsfolge durchläuft der Automat beim Bearbeiten des Wortes *aaabbb*?
3. Geben Sie den Automaten in tabellarischer Form an.
4. Geben Sie eine formale Beschreibung von $L(A_2)$

1.1.3 Aufgabe

Betrachten Sie den deterministischen endlichen Automaten A_3 in Abbildung 2.

1. Welche Konfigurationsfolge durchläuft der Automat beim Bearbeiten des Wortes *ababab*?
2. Welche Konfigurationsfolge durchläuft der Automat beim Bearbeiten des Wortes *aaabbb*?
3. Geben Sie den Automaten in tabellarischer Form an.
4. Geben Sie eine formale Beschreibung von $L(A_2)$
5. Minimieren Sie den Automaten mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren.

1.1.4 Aufgabe

Betrachten Sie den NFA A_4 in Abbildung 3.

- a) Welche möglichen Ableitungen durchläuft der Automat auf dem Wort *abbba*?
- b) Beschreiben Sie $L(A_4)$ als Menge.
- c) Konvertieren Sie A_4 mit dem in der Vorlesung angegebenen Verfahren in einen deterministischen endlichen Automaten.

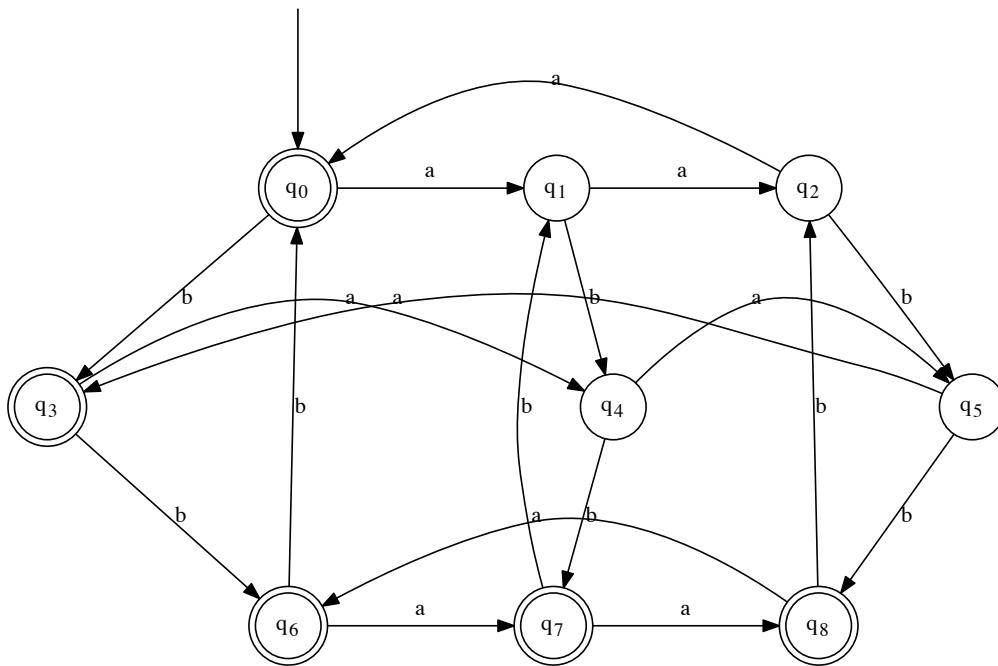


Abbildung 1: Automat A_2

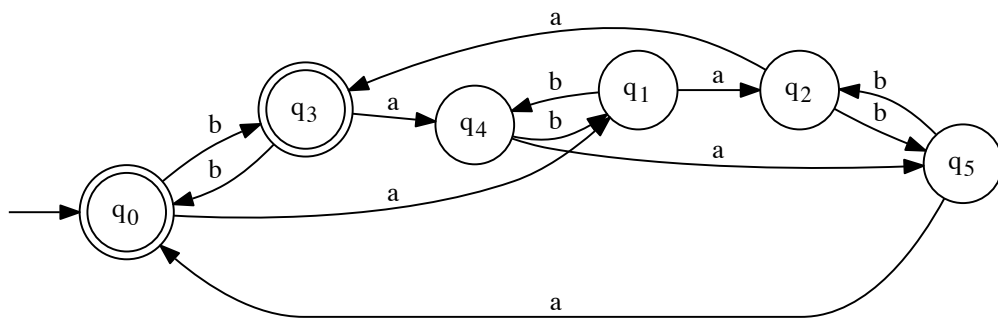


Abbildung 2: Automat A_3

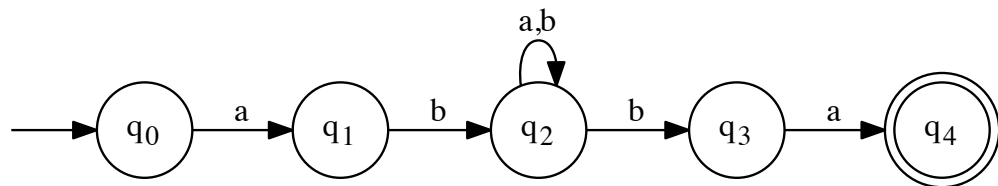


Abbildung 3: Automat A_4

1.2 Aufgabe

Betrachten Sie die folgende Tabelle:

Σ	$\{a\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b, c\}$	\dots
$\{w \mid a \text{ ist Teilwort von } w\}$	aa^*			
$\{w \mid a \text{ ist kein Teilwort von } w\}$	ϵ		$(b+c)^*$	
$\{w \mid ab \text{ ist Teilwort von } w\}$	\emptyset			
$\{w \mid ab \text{ ist kein Teilwort von } w\}$				
$\{w \mid abc \text{ ist Teilwort von } w\}$				
$\{w \mid abc \text{ ist kein Teilwort von } w\}$				
\dots				

Geben Sie für jede Kombination von Alphabet und Sprache folgendes an:

- Einen regulären Ausdruck an, der die Sprache erzeugt (falls möglich). Einige REs sind als Beispiel eingetragen.
- Einen DFA, der die Sprache akzeptiert.
- Einen (möglichst einfachen) NFA, der die Sprache akzeptiert.
 - Konvertieren Sie diesen NFA in einen DFA und vergleichen Sie ihn mit dem Automaten aus Teil c).

1.3 Reguläre und nichtreguläre Sprachen

1.3.1 Aufgabe

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_0 = \{a^n b b a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

- Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_0$ an.
- Überprüfen Sie, welche die folgenden Worte in L_0 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.
 - bb
 - aba
 - $aabbaa$
- Zeigen oder widerlegen Sie: L_0 ist regulär.

1.3.2 Aufgabe

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_1 = \{a^n w a^n \mid n \in \mathbb{N}, w \in \Sigma^*\}$.

- Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_1$ an.
- Überprüfen Sie, welche die folgenden Worte in L_1 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.
 - ϵ
 - $babab$
 - $aabbaaa$
- Zeigen oder widerlegen Sie: L_1 ist regulär.

1.3.3 Aufgabe

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_2 = \{a^n b a^n \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 2\}$.

- a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_2$ an.
- b) Überprüfen Sie, welche die folgenden Worte in L_2 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.
 - a1) ε
 - a2) b
 - a2) $aabaa$
- c) Zeigen oder widerlegen Sie: L_2 ist regulär.

1.3.4 Aufgabe

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_3 = \{a^n b^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

- a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_3$ an.
- b) Überprüfen Sie, welche die folgenden Worte in L_3 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.
 - a1) ε
 - a2) $aabbbb$
 - a3) $aaabbb$
- c) Zeigen oder widerlegen Sie: L_3 ist regulär.

1.3.5 Aufgabe

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_4 = \{a^n b b a^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.

- a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_4$ an.
- b) Überprüfen Sie, welche die folgenden Worte in L_4 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.
 - a1) bba
 - a2) $ababba$
 - a3) $aabbaa$
- c) Zeigen oder widerlegen Sie: L_4 ist regulär.

1.3.6 Aufgabe

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_8 = \{a^n b w a^n \mid w \in \Sigma^*, n \in \mathbb{N}\}$.

- a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_8$ an.
- b) Überprüfen Sie, welche die folgenden Worte in L_8 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.
 - a1) $abba$
 - a2) $ababaa$
 - a3) $aababa$
- c) Zeigen oder widerlegen Sie: L_8 ist regulär.

1.4 Grammatiken und Sprachen

1.4.1 Aufgabe

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $G_2 = (\{S, T, U, X\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aTU, U \rightarrow X, TX \rightarrow T, T \rightarrow bS, T \rightarrow b\}, S)$. Bestimmen Sie:

1. den maximalen Typ der Grammatik in der Chomsky-Hierarchie
2. die erzeugte Sprache
3. den maximalen Typ der erzeugten Sprache in der Chomsky-Hierarchie
4. falls Sprache und Grammatik unterschiedliche Typen haben, geben Sie eine äquivalente Grammatik mit dem maximal möglichen Typ an.

1.4.2 Aufgabe

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $G_3 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow \varepsilon, S \rightarrow aSb\}, S)$. Bestimmen Sie:

1. den maximalen Typ der Grammatik in der Chomsky-Hierarchie
2. die erzeugte Sprache
3. den maximalen Typ der erzeugten Sprache in der Chomsky-Hierarchie
4. falls Sprache und Grammatik unterschiedliche Typen haben, geben Sie eine äquivalente Grammatik mit dem maximal möglichen Typ an.

1.4.3 Aufgabe

Sei $L = \{a^n b^m c^p d^q \mid m, n, p, q \in \mathbb{N} \text{ und } m + n = p + q\}$.

- a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, die die Sprache L erzeugt
- b) Geben Sie Ableitungen in G für die folgenden Worte an:
 - b1) $aabbccdd$
 - b2) $abdd$

1.4.4 Aufgabe

Transformieren Sie die folgende Grammatik mit dem in der Vorlesung gezeigten Verfahren in Chomsky-Normalform.

$G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ mit

- $V_N = \{S, A, B, C, D, E\}$
- $V_T = \{a, b, c\}$
- $P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow Ac \\ A \rightarrow aAc \\ A \rightarrow ac \\ A \rightarrow B \\ B \rightarrow BE \\ A \rightarrow D \\ D \rightarrow bDc \\ D \rightarrow bc \\ D \rightarrow C \\ C \rightarrow c \\ C \rightarrow Cc \\ E \rightarrow a \mid b \mid c \end{array} \right\}$

1.4.5 Aufgabe

Betrachten Sie die Grammatik $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ mit

- $V_N = \{S, A, B, R, T\}$
- $V_T = \{a, b\}$
- $P = \{$
 - $S \rightarrow AR$
 - $S \rightarrow AT$
 - $S \rightarrow AA$
 - $R \rightarrow SA$
 - $T \rightarrow SB$
 - $T \rightarrow b$
 - $B \rightarrow b$
 - $A \rightarrow a$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des CYK-Algorithmus, welche der folgenden Wörter in $L(G)$ sind.

- a1) $aaabb$
- a2) $aaaaab$

b) Geben Sie eine Charakterisierung von $L(G)$ an

1.4.6 Aufgabe

Gegeben sei der Kellerautomat $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_f\}, \{a, b, c, d\}, \{Z_0, X\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\})$, wobei δ in der folgenden Tabelle angegeben ist.

q_0	a	Z_0	XZ_0	q_0
q_0	a	X	XX	q_0
q_0	b	Z_0	XZ_0	q_1
q_0	b	X	XX	q_1
q_0	c	X	ε	q_2
q_0	d	X	ε	q_3
q_0	ε	Z_0	ε	q_f
q_1	b	X	XX	q_1
q_1	c	X	ε	q_2
q_1	d	X	ε	q_3
q_2	c	X	ε	q_2
q_2	d	X	ε	q_3
q_2	ε	Z_0	ε	q_f
q_3	d	X	ε	q_3
q_3	ε	Z_0	ε	q_f

a) Geben Sie für die folgenden Wörter

- falls das Wort in $L(A_{11})$ enthalten ist, eine akzeptierende Konfigurationsfolge,
- falls das Wort nicht in $L(A_{11})$ enthalten ist, eine Konfigurationsfolge, bei der das gesamte Wort gelesen wird, an.

- a1) $w_1 = abc cd$
- a2) $w_2 = abc$

b) Beschreiben Sie formal die von A akzeptierte Sprache als Menge.

2 Ideensammlung

- DFA minimieren
- NFA in DFA umwandeln
- RE in NFA umwandeln
- DFA in rechts-lineare Grammatik umwandeln
- DFA in RE umwandeln (?)
- Algebra auf REs?
- Rechts-lineare Grammatik in NFA umwandeln
- DFA für gegebene Sprache angeben
- Sprache für NFA, DFA, RE, Grammatik bestimmen
- Pumping-Lemma
- Produktautomaten konstruieren
- Abschlusseigenschaften nutzen (?)
- Was zu flex/bison?
- Typ einer Grammatik bestimmen
- Typ einer Sprache bestimmen
- CNF einer Grammatik berechnen - eventuell einzelne Stufen einzeln?
- Parsen mit CYK