Formal Languages and Automata

Übungsklausur

Jan Hladik und Stephan Schulz

20. November 2015

Aufgabe 1: (2+4+4P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie für die folgenden Sprachen einen DFA an

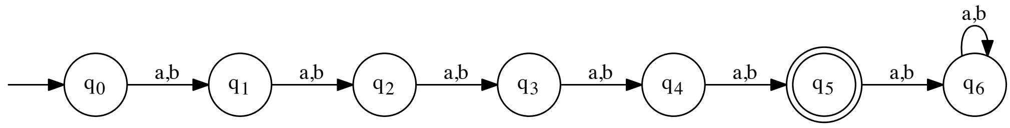
a) $L_0 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a + |w|_b = 5\}$

b) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \cdot |w|_b = 4\}$

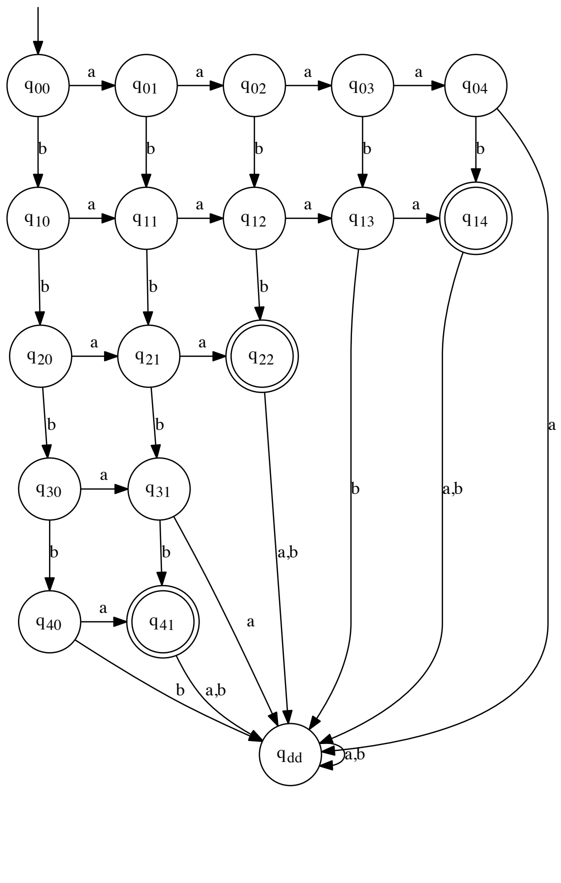
c) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \geq 2$ und $w[|w| - 1] = w[2]\}$

Lösung:

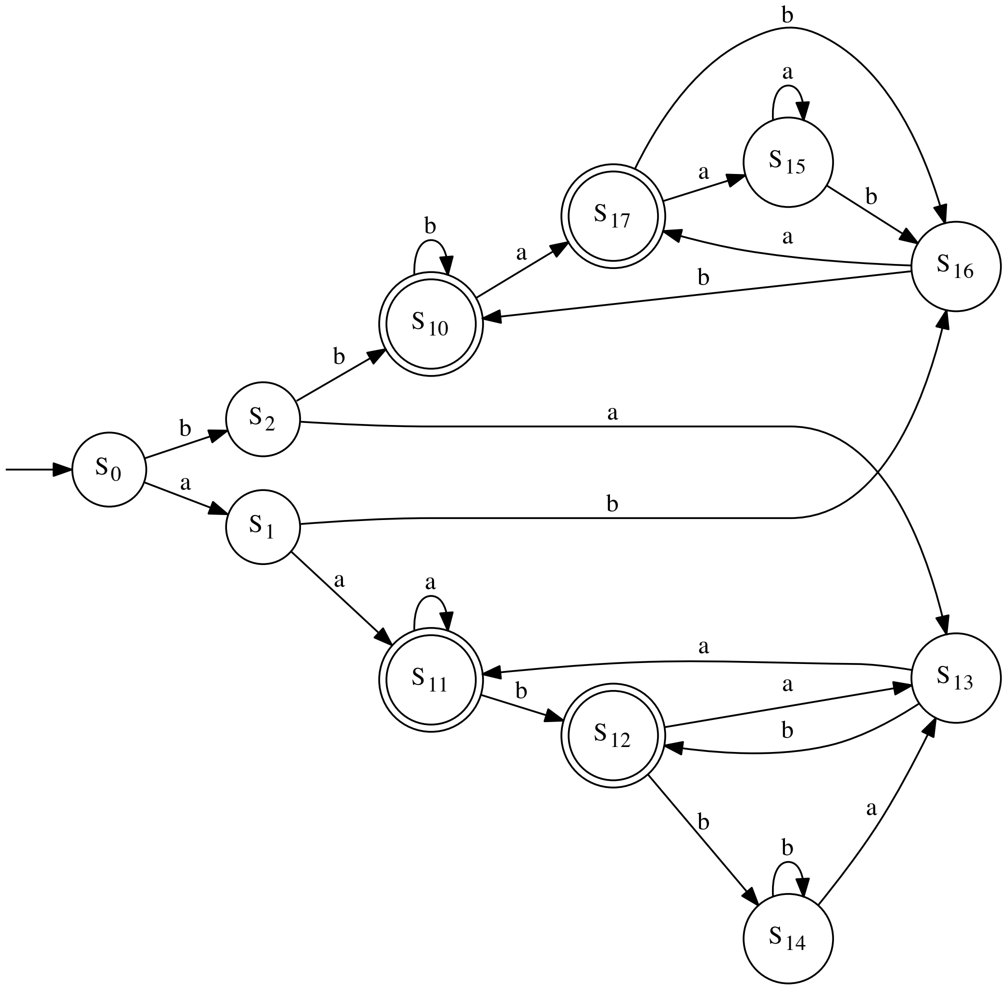
a) Idee: Zustand zählt die Anzahl der gelesenen Zeichen. Bei 5 wird akzeptiert, bei mehr ist Ende.



b) Idee: Nach rechts zählt der Automat das Vorkommen von a, nach unten Vorkommen von b. Erfolg bei $4 \cdot 1$, $1 \cdot 4$, $2 \cdot 2$. Junk-Zustant ist q_{dd}



c) Idee: Der Teilautomat rechts oben (ab S10) akzeptiert Worte, deren vorletztes Zeichen ein b ist. Der Teilautomat unten (ab S11) akzeptiert Worte, deren vorletztes Zeichen ein a ist. Die Logik davor sorgt dafür, dass erstens richtig in diese Automaten eingestiegen wird, und das zweitens auch die Spezialfälle aa und bb richtig erkannt werden.



Aufgabe 2: (2+2+2+3+5P)

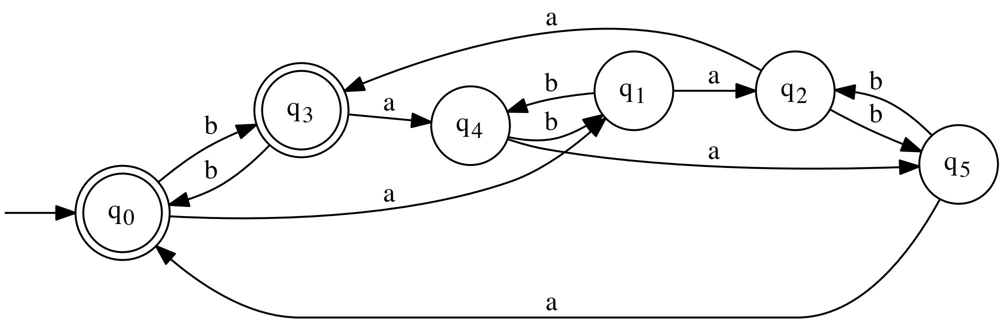


Abbildung 1: Automat A_3

Betrachten Sie den deterministischen endlichen Automaten A_3 in Abbildung 1.

a) Welche Konfigurationsfolge durchläuft der Automat beim Bearbeiten des Wortes $ababab$?

b) Welche Konfigurationsfolge durchläuft der Automat beim Bearbeiten des Wortes $aaabbb$?

c) Geben Sie den Automaten in tabellarischer Form an.

d) Geben Sie eine formale Beschreibung von $L(A_3)$

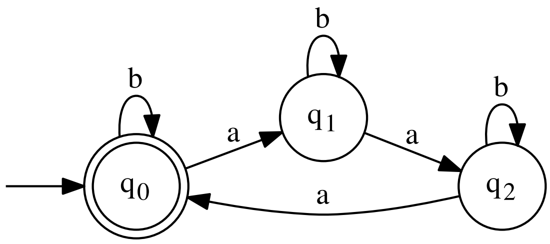
e) Minimieren Sie den Automaten mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren.

Lösung:

c)
```
          |    a    b
----------------------
-> *   q0 |    q1   q3
       q1 |    q2   q4
       q2 |    q3   q5
   *   q3 |    q4   q0
       q4 |    q5   q1
       q5 |    q0   q2
```

d) $L(A_3) = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \bmod 3 = 0\}$

e)
```
# Adding (q4, q5) to V because delta(q4,a)=q5, delta(q5,a)=q0, and (q5,q0) in V
# Adding (q1, q5) to V because delta(q1,a)=q2, delta(q5,a)=q0, and (q2,q0) in V
# Adding (q1, q2) to V because delta(q1,a)=q2, delta(q2,a)=q3, and (q2,q3) in V
# Adding (q2, q4) to V because delta(q2,a)=q3, delta(q4,a)=q5, and (q3,q5) in V
# +---+---+---+---+---+---+---+
# |   | q1| q0| q3| q2| q5| q4|
# +---+---+---+---+---+---+---+
# | q1| o | X | X | X | X | o |
# +---+---+---+---+---+---+---+
# | q0| X | o | o | X | X | X |
# +---+---+---+---+---+---+---+
# | q3| X | o | o | X | X | X |
# +---+---+---+---+---+---+---+
# | q2| X | X | X | o | o | X |
# +---+---+---+---+---+---+---+
# | q5| X | X | X | o | o | X |
# +---+---+---+---+---+---+---+
# | q4| o | X | X | X | X | o |
# +---+---+---+---+---+---+---+
# Merging q3 into q0
# Merging q4 into q1
# Merging q5 into q2
```



Aufgabe 3: (3+2+5P)

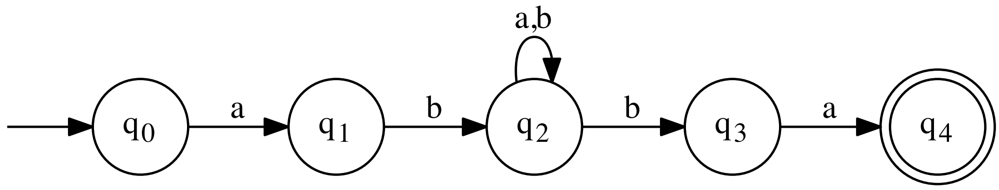


Abbildung 2: Automat A_4

Betrachten Sie den NFA A_4 in Abbildung 2.

a) Welche möglichen Ableitungen durchläuft der Automat auf dem Wort $abbbba$?

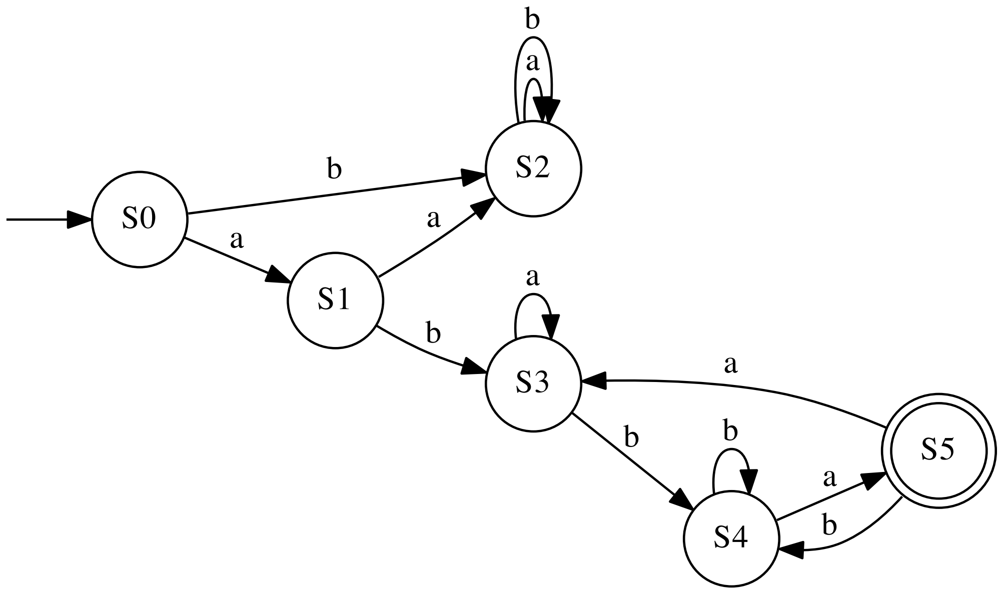
b) Beschreiben Sie $L(A_4)$ als Menge.

c) Konvertieren Sie A_4 mit dem in der Vorlesung angegebenen Verfahren in einen deterministischen endlichen Automaten.

Lösung:

b) $L(A_4) = \{abwba \mid |w \in \Sigma^*\}$

c)
```
S0 = frozenset(['q0'])
Delta(S0, a) =  frozenset(['q1'])
S1  =  frozenset(['q1'])
Delta(S0, b) =  frozenset([])
S2  =  frozenset([])
Delta(S1, a) =  frozenset([])
State is equal to  S2
Delta(S1, b) =  frozenset(['q2'])
S3  =  frozenset(['q2'])
Delta(S2, a) =  frozenset([])
State is equal to  S2
Delta(S2, b) =  frozenset([])
State is equal to  S2
Delta(S3, a) =  frozenset(['q2'])
State is equal to  S3
Delta(S3, b) =  frozenset(['q3', 'q2'])
S4  =  frozenset(['q3', 'q2'])
Delta(S4, a) =  frozenset(['q2', 'q4'])
S5  =  frozenset(['q2', 'q4'])
Delta(S4, b) =  frozenset(['q3', 'q2'])
State is equal to  S4
Delta(S5, a) =  frozenset(['q2'])
State is equal to  S3
Delta(S5, b) =  frozenset(['q3', 'q2'])
State is equal to  S4
```


S0
S1
S2
S3
S4
S5
a
b

Aufgabe 4: (3+3+3P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_1 = \{a^n w a^n | n \in \mathbb{N}, w \in \Sigma^*\}$.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_1$ an.

b) Überprüfen Sie, welche die folgenden Worte in L_1 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.

  b1) ε

  b2) $babab$

  b3) $aabbaaa$

c) Zeigen oder widerlegen Sie: L_1 ist regulär.

Lösung: Wichtige Idee: $0 \in \mathbb{N}$, d.h. $L_1 \supseteq \{a^0 w a^0 \mid w \in \Sigma^*\}$ und damit $L_1 = \Sigma^*$

a) $P = \{S \to aS, S \to bS, S \to \varepsilon\}$. Formal ist das 4-Tuplen anzugeben!

c) L_1 wird von der in a) angegebenen rechts-linearen Grammatik erzeugt. Damit ist L_1 regulär. Alternativ: $L_1 = L((a + b)^*)$

Aufgabe 5: (3+3+4P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_8 = \{a^n bwa^n | w \in \Sigma^*, n \in \mathbb{N}\}$.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_8$ an.

b) Überprüfen Sie, welche die folgenden Worte in L_8 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.

   a1) $abba$

   a2) $ababaa$

   a3) $aababa$

c) Zeigen oder widerlegen Sie: L_8 ist regulär.

Lösung: Idee: Jedes Wort aus L_8 hat vor dem ersten b höchstens so viele a, wie am Ende (aber aus dem w können weitere a hinten dazu kommen).

a) $P = \{S \rightarrow aSa, S \rightarrow bB, B \rightarrow aB, B \rightarrow bB, B \rightarrow \varepsilon\}$. Formal ist das 4-Tuplen anzugeben!

c) L_8 ist nicht regulär. Beweis per Pumping-Lemma. Ein geeignetes Wort ist $a^k ba^k \in L_8$ - wenn man da pumpt, stehen vorne mehr as als hinten, und das Wort ist nicht mehr in L_8. In der Klausur wird ein vollständiger Beweis erwartet, nicht nur die Idee!

Aufgabe 6: (2+2+3P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $G_3 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to \varepsilon, S \to aSb\}, S)$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Typ der Grammatik in der Chomsky-Hierarchie

b) Geben Sie eine formale Beschreibung der erzeugten Sprache

c) Bestimmen Sie den maximalen Typ der Sprache in der Chomsky-Hierarchie. Falls Sprache und Grammatik unterschiedliche Typen haben, geben Sie eine äquivalente Grammatik mit dem maximal möglichen Typ an.

Aufgabe 7: (5+2+1P)

Sei $L = \{a^n b^m c^p d^q \mid m, n, p, q \in N$ und $m + n = p + q\}$.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, die die Sprache L erzeugt

b) Geben Sie Ableitungen in G für die folgenden Worte an:

   b1) $aabbccdd$

   b2) $abdd$

Aufgabe 8: (5+3P)

Betrachten Sie die folgende Grammatik G:

$G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ mit

- $V_N = \{S, A, B, C, D, E\}$
- $V_T = \{a, b, c\}$
- $$P = \{ \begin{array}{lll} S & \to & Ac \\ A & \to & aAc \\ A & \to & ac \\ A & \to & B \\ B & \to & BE \\ A & \to & D \\ D & \to & bDc \\ D & \to & bc \\ D & \to & C \\ C & \to & c \\ C & \to & Cc \\ E & \to & a \mid b \mid c \quad \} \end{array}$$

a) Transformieren Sie G mit dem in der Vorlesung gezeigten Verfahren in Chomsky-Normalform.

b) Geben Sie eine formale Beschreibung von $L(G)$.

Lösung:

a) 1. Remove $A \to B, A \to D, D \to C$: Add
   - $A \to BE$
   - $A \to bDc$
   - $A \to bc$
   - $A \to c$
   - $A \to Cc$
   - $D \to c$
   - $D \to Cc$

   2. Find terminating symbols: $\{a, b, c, E, C, D, A, S\}$. Intermediate result:

$$P = \{ \begin{array}{lll} S & \to & Ac \\ A & \to & aAc \\ A & \to & ac \\ D & \to & bDc \\ D & \to & bc \\ C & \to & c \\ C & \to & Cc \\ E & \to & a \mid b \mid c \\ A & \to & bDc \\ A & \to & bc \\ A & \to & c \\ A & \to & Cc \\ D & \to & c \\ D & \to & Cc \quad \} \end{array}$$

3. Find reachable symbols: $\{S, A, c, a, D, b, C\}$ Intermediate result:
$$P = \{ \begin{array}{lll} S & \rightarrow & Ac \\ A & \rightarrow & aAc \\ A & \rightarrow & ac \\ D & \rightarrow & bDc \\ D & \rightarrow & bc \\ C & \rightarrow & c \\ C & \rightarrow & Cc \\ A & \rightarrow & bDc \\ A & \rightarrow & bc \\ A & \rightarrow & c \\ A & \rightarrow & Cc \\ D & \rightarrow & c \\ D & \rightarrow & Cc \end{array} \}$$
4. Add new NTS for a, b, c: Intermediate result:
$$P = \{ \begin{array}{lll} S & \rightarrow & AV \\ A & \rightarrow & TAV \\ A & \rightarrow & TV \\ D & \rightarrow & UDV \\ D & \rightarrow & UV \\ C & \rightarrow & c \\ C & \rightarrow & CV \\ A & \rightarrow & UDV \\ A & \rightarrow & UV \\ A & \rightarrow & c \\ A & \rightarrow & CV \\ D & \rightarrow & c \\ D & \rightarrow & CV \\ T & \rightarrow & a \\ U & \rightarrow & b \\ V & \rightarrow & c \end{array} \}$$
5. Expand TAV, UDV Final result:
$$P = \{ \begin{array}{lll} S & \rightarrow & AV \\ A & \rightarrow & TQ \\ A & \rightarrow & TV \\ D & \rightarrow & UR \\ D & \rightarrow & UV \\ C & \rightarrow & c \\ C & \rightarrow & CV \\ A & \rightarrow & UR \\ A & \rightarrow & UV \\ A & \rightarrow & c \\ A & \rightarrow & CV \\ D & \rightarrow & c \\ D & \rightarrow & CV \\ T & \rightarrow & a \\ U & \rightarrow & b \\ V & \rightarrow & c \\ R & \rightarrow & DV \\ Q & \rightarrow & AV \end{array} \}$$

- b) $L(G) = \{a^n b^m c^o \mid m, n, o \in \mathbb{N}, o > n + m\}$

Aufgabe 9: (3+3+3P)

Betrachten Sie die Grammatik $G = \langle V_N, V_T, P, S\rangle$ mit

- $V_N = \{S, A, B, R, T\}$
- $V_T = \{a, b\}$
- $P = \{ \; S \to AR$
  $S \to AT$
  $S \to AA$
  $R \to SA$
  $T \to SB$
  $T \to b$
  $B \to b$
  $A \to a$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des CYK-Algorithmus, welche der folgenden Wörter in $L(G)$ sind.

a1) $aaabb$

a2) $aaaaab$

b) Geben Sie eine Charakterisierung von $L(G)$ an

Lösung:

a1)
```
Processing word aaabb

Table initialized
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|     |   1 |   2 |   3 |   4 |   5 |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   1 |   A |     |     |     |     |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   2 |     |   A |     |     |     |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   3 |     |     |   A |     |     |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   4 |     |     |     | B,T |     |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   5 |     |     |     |     | B,T |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   w |   a |   a |   a |   b |   b |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
Checking words of length 2
  Subword from 1 to 2 : aa
  Subword from 2 to 3 : aa
  Subword from 3 to 4 : ab
  Subword from 4 to 5 : bb
Checking words of length 3
  Subword from 1 to 3 : aaa
  Subword from 2 to 4 : aab
  Subword from 3 to 5 : abb
Checking words of length 4
  Subword from 1 to 4 : aaab
  Subword from 2 to 5 : aabb
```

```
Checking words of length 5
  Subword from 1 to 5 : aaabb
Final table:
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|     |  1  |  2  |  3  |  4  |  5  |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   1 |   A |   S |   R |   S |   T |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   2 |     |   A |   S |   T |   S |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   3 |     |     |   A |   S |   T |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   4 |     |     |     | B,T |   - |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   5 |     |     |     |     | B,T |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   w |   a |   a |   a |   b |   b |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
```

Das Wort ist nicht in der Sprache!

a2)
```
Processing word aaaaab

Table initialized
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|     |  1  |  2  |  3  |  4  |  5  |  6  |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   1 |   A |     |     |     |     |     |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   2 |     |   A |     |     |     |     |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   3 |     |     |   A |     |     |     |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   4 |     |     |     |   A |     |     |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   5 |     |     |     |     |   A |     |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   6 |     |     |     |     |     | B,T |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   w |   a |   a |   a |   a |   a |   b |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
Checking words of length 2
  Subword from 1 to 2 : aa
  Subword from 2 to 3 : aa
  Subword from 3 to 4 : aa
  Subword from 4 to 5 : aa
  Subword from 5 to 6 : ab
Checking words of length 3
  Subword from 1 to 3 : aaa
  Subword from 2 to 4 : aaa
  Subword from 3 to 5 : aaa
  Subword from 4 to 6 : aab
Checking words of length 4
  Subword from 1 to 4 : aaaa
  Subword from 2 to 5 : aaaa
```

```
  Subword from 3 to 6 : aaab
Checking words of length 5
  Subword from 1 to 5 : aaaaa
  Subword from 2 to 6 : aaaab
Checking words of length 6
  Subword from 1 to 6 : aaaaab
Final table:
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|     |   1 |   2 |   3 |   4 |   5 |   6 |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   1 |   A |   S |   R |   S |   R |   S |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   2 |     |   A |   S |   R |   S |   T |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   3 |     |     |   A |   S |   R |   S |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   4 |     |     |     |   A |   S |   T |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   5 |     |     |     |     |   A |   S |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   6 |     |     |     |     |     | B,T |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   w |   a |   a |   a |   a |   a |   b |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
```

Das Wort ist in der Sprache.

Aufgabe 10: (3+3+4P)

Gegeben sei der Kellerautomat $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_f\}, \{a, b, c, d\}, \{Z_0, X\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\})$, wobei δ in der folgenden Tabelle angegeben ist.

q_0	a	Z_0	XZ_0	q_0
q_0	a	X	XX	q_0
q_0	b	Z_0	XZ_0	q_1
q_0	b	X	XX	q_1
q_0	c	X	ε	q_2
q_0	d	X	ε	q_3
q_0	ε	Z_0	ε	q_f
q_1	b	X	XX	q_1
q_1	c	X	ε	q_2
q_1	d	X	ε	q_3
q_2	c	X	ε	q_2
q_2	d	X	ε	q_3
q_2	ε	Z_0	ε	q_f
q_3	d	X	ε	q_3
q_3	ε	Z_0	ε	q_f

a) Geben Sie, falls möglich, für die folgenden Wörter akzeptierende Konfigurationsfolgen an.

   a1) $w_1 = aaacdd$

   a2) $w_2 = abaccd$

b) Beschreiben Sie formal die von A akzeptierte Sprache als Menge.

Ende des Klausurumfangs

– Bonusaufgaben –

Aufgabe B1: (2+2+2+4P)

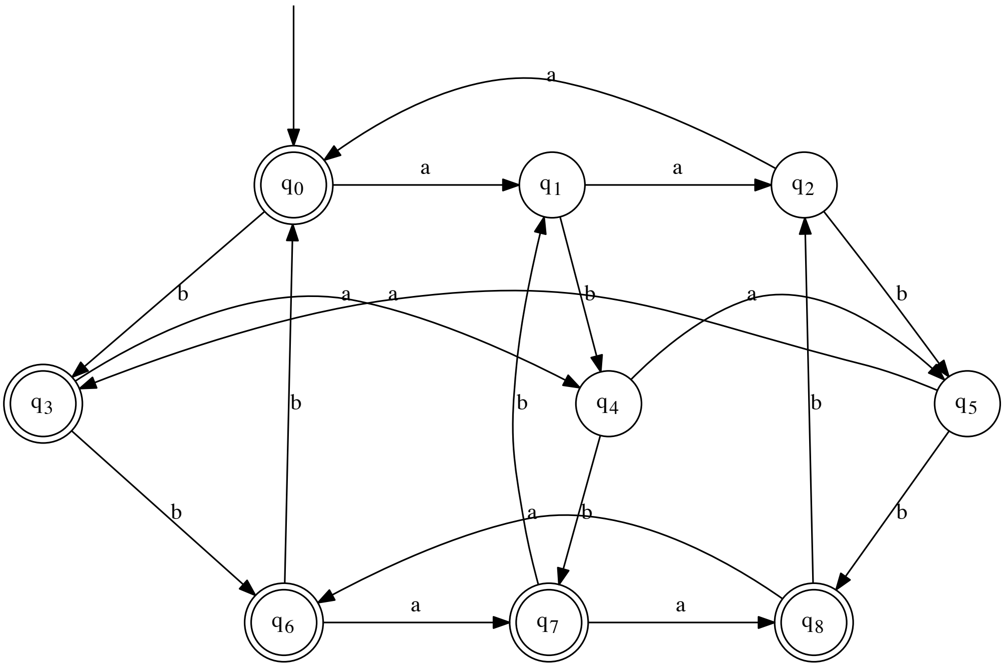


Abbildung 3: Automat A_2

Betrachten Sie den deterministischen endlichen Automaten A_2 in Abbildung 3.

a) Welche Konfigurationsfolge durchläuft der Automat beim Bearbeiten des Wortes $ababab$?

b) Welche Konfigurationsfolge durchläuft der Automat beim Bearbeiten des Wortes $aaabbb$?

c) Geben Sie den Automaten in tabellarischer Form an.

d) Geben Sie eine formale Beschreibung von $L(A_2)$

Aufgabe B2: (3+3+4P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_0 = \{a^n bba^n | n \in \mathbb{N}\}$.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_0$ an.

b) Überprüfen Sie, welche die folgenden Worte in L_0 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.

   a1) bb

   a2) aba

   a3) $aabbaa$

c) Zeigen oder widerlegen Sie: L_0 ist regulär.

Aufgabe B3: (1+1+2P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_2 = \{a^n b a^n | n \in \mathbb{N}, n \leq 2\}$.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_2$ an.

b) Überprüfen Sie, welche die folgenden Worte in L_2 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.

   a1) ε

   a2) b

   a2) $aabaa$

c) Zeigen oder widerlegen Sie: L_2 ist regulär.

Aufgabe B4: (3+3+4P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_3 = \{a^n b^{2n} | n \in \mathbb{N}\}$.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_3$ an.

b) Überprüfen Sie, welche die folgenden Worte in L_3 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.

   a1) ε

   a2) $aabbbb$

   a3) $aaabbb$

c) Zeigen oder widerlegen Sie: L_3 ist regulär.

Aufgabe B5: (3+3+2P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_4 = \{a^n bba^m | n, m \in \mathbb{N}\}$.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_4$ an.

b) Überprüfen Sie, welche die folgenden Worte in L_4 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.

   a1) bba

   a2) $ababba$

   a3) $aabbaa$

c) Zeigen oder widerlegen Sie: L_4 ist regulär.

Aufgabe B6: (2+3+5P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $G_2 = (\{S, T, U, X\}, \{a, b\}, \{S \to aTU, U \to X, TX \to T, T \to bS, T \to b\}, S)$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Typ der Grammatik in der Chomsky-Hierarchie

b) Geben Sie eine formale Beschreibung der erzeugten Sprache

c) Bestimmen Sie den maximalen Typ der Sprache in der Chomsky-Hierarchie. Falls Sprache und Grammatik unterschiedliche Typen haben, geben Sie eine äquivalente Grammatik mit dem maximal möglichen Typ an.