Bitte die Blätter nicht trennen!

Matrikelnummer:			
ÜBUNGSKLAUSUR		Fakultät	**Technik**
		Studiengang:	**Angewandte Informatik**
		Jahrgang / Kurs :	**2018 ITA**
		Studienhalbjahr:	**3. Semester**
Datum:	**13.11.2019**	Bearbeitungszeit:	**90 Minuten**
Modul:	**T2INF2002**	Dozent:	**Stephan Schulz**
Unit:	**Formale Sprachen**		**Jan Hladik**
Hilfsmittel:	**Vorlesungsskript, eigene Notizen**		

Aufgabe	erreichbar	erreicht
1	12	
2	10	
3	8	
4	10	
5	11	
6	10	
7	10	
8	9	
9	10	
Summe	90	

1. Sind Sie gesund und prüfungsfähig?
2. Sind Ihre Taschen und sämtliche Unterlagen, insbesondere alle nicht erlaubten Hilfsmittel, seitlich an der Wand zum Gang hin abgestellt und nicht in Reichweite des Arbeitsplatzes?
3. Haben Sie auch außerhalb des Klausurraumes im Gebäude keine unerlaubten Hilfsmittel oder ähnliche Unterlagen liegen lassen?
4. Haben Sie Ihr Handy ausgeschaltet und abgegeben?

(Falls Ziff. 2 oder 3 nicht erfüllt sind, liegt ein Täuschungsversuch vor, der die Note „nicht ausreichend" zur Folge hat.)

Aufgabe 1 (2+2+2+6P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie (in grafischer Darstellung) *vollständige* deterministische endliche Automaten (*DFAs*) an, die die folgenden Sprachen erkennen.

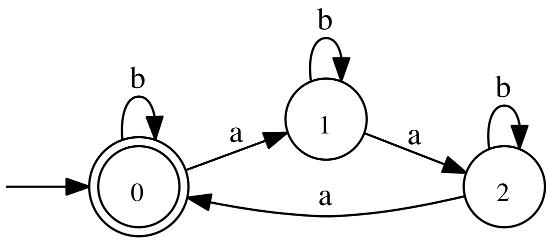
a) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \bmod 3 = 0\}$

b) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w = va, v \in \Sigma^*, |v| \geq 1\}$ (d.h. w hat mindestens zwei Zeichen und endet mit a)

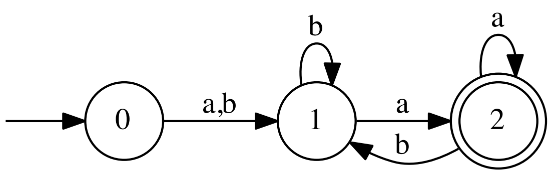
c) Verwenden Sie das in der Vorlesung gezeigte Verfahren, um aus dem Automaten A_2 für Aufgabenteil b) einen deterministischen endlichen Automaten (DFA) für die Sprache $L_3 = \overline{L_2}$ (*complement*) zu erzeugen.

d) Verwenden Sie die bisher erzeugten Automaten, um den Produktautomaten (*product automaton*) für die Sprache $L_4 = L_1 \cap \overline{L_2} = L_1 \backslash L_2$ zu erzeugen.

Lösung:



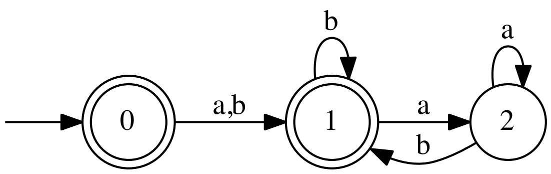
a)



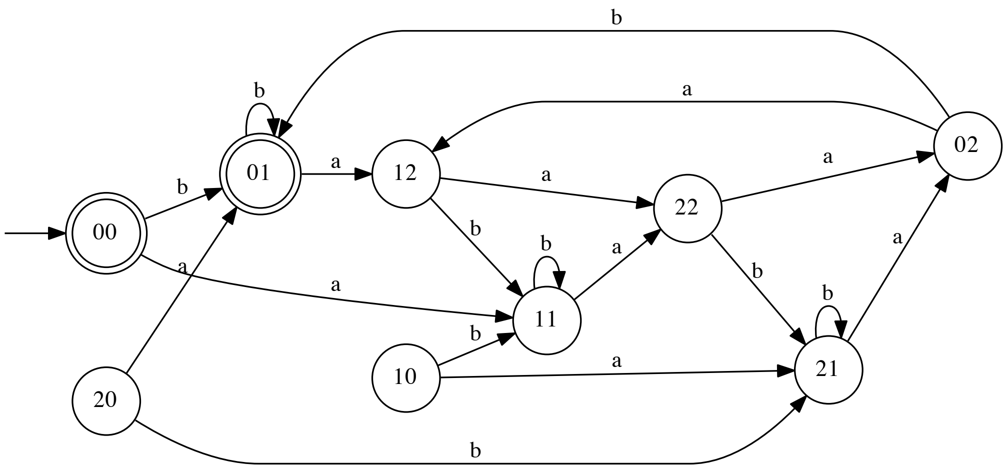
b)

(Platz für Aufgabe 1)

Lösung:



c)



d)

Aufgabe 2 (6+4P)

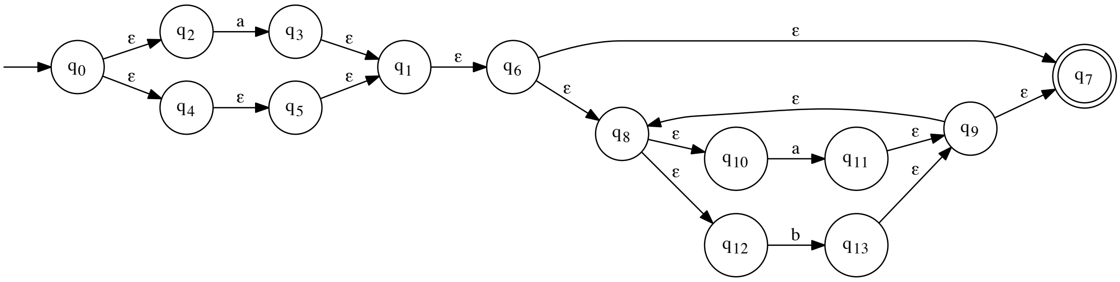
Gegeben seien der reguläre Ausdruck $r_2 = (a+\varepsilon)(a+b)^*$ und die Sprache $L_2 = L(r_2)$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

a) Verwenden Sie *exakt* das in der Vorlesung gezeigte Verfahren, um aus dem regulären Ausdruck r_2 einen nichtdeterministischen endlichen Automaten (NFA), der L_2 erkennt. Berücksichtigen Sie insbesondere alle ε-Übergänge. Es reicht die Darstellung des Ergebnisses in graphischer Form.

b) Zeigen Sie (mit Hilfe der algebraischen Äquivalenzen aus der Vorlesung) oder widerlegen Sie (durch Angabe eines geeigneten Wortes): $L_2 = L((a(a+b)^* + (b+a)(b+a)^* + \varepsilon))$

Lösung:

a)



b)

$$
\begin{array}{rcll}
r_2 & = & (a+\varepsilon)(a+b)^* & \text{(Definition)} \\
 & \doteq & (a(a+b)^* + \varepsilon(a+b)^* & (7) \\
 & \doteq & (a(a+b)^* + (a+b)^* & (5) \\
 & \doteq & (a(a+b)^* + (b+a)^* & (1) \\
 & \doteq & (a(a+b)^* + \varepsilon + (b+a)^*(b+a) & (13) \\
 & \doteq & (a(a+b)^* + (b+a)(b+a)^* + \varepsilon & (1)
\end{array}
$$

Also gilt $L_2 = L((a(a+b)^* + (b+a)(b+a)^* + \varepsilon))$.

(Platz für Aufgabe 2)

Aufgabe 3 (8P)

Betrachten Sie den deterministischen endlichen Automaten A_3. Minimieren Sie den Automaten mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren und zeichnen Sie das Ergebnis. Sie können die unten stehende Tabelle verwenden.

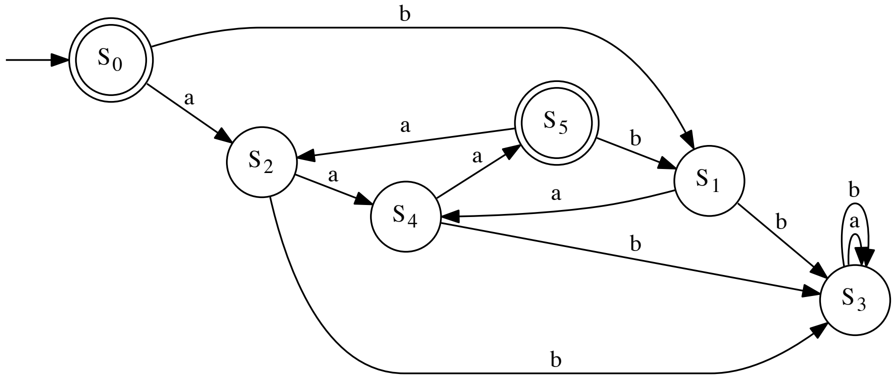


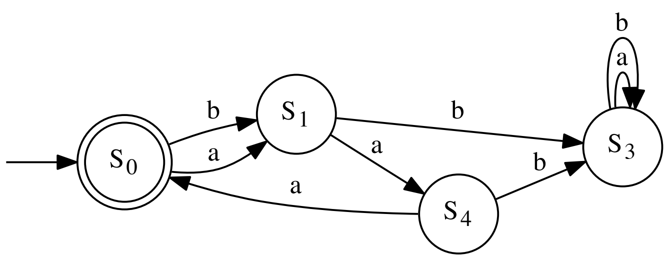
Abbildung 1: Automat A_3

	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_0	o					
S_1		o				
S_2			o			
S_3				o		
S_4					o	
S_5						o

(Platz für Aufgabe 3)

Lösung:

```
# Adding (S2, S4) to V because delta(S2,a)=S4, delta(S4,a)=S5, and (S4,S5) in V
# Adding (S1, S4) to V because delta(S1,a)=S4, delta(S4,a)=S5, and (S4,S5) in V
# Adding (S3, S4) to V because delta(S3,a)=S3, delta(S4,a)=S5, and (S3,S5) in V
# Adding (S1, S3) to V because delta(S1,a)=S4, delta(S3,a)=S3, and (S4,S3) in V
# Adding (S2, S3) to V because delta(S2,a)=S4, delta(S3,a)=S3, and (S4,S3) in V
# Merging S5 into S0
# Merging S2 into S1
# +---+---+---+---+---+---+---+
# |   | S0| S1| S2| S3| S4| S5|
# +---+---+---+---+---+---+---+
# | S0| o | X | X | X | X | o |
# +---+---+---+---+---+---+---+
# | S1| X | o | o | X | X | X |
# +---+---+---+---+---+---+---+
# | S2| X | o | o | X | X | X |
# +---+---+---+---+---+---+---+
# | S3| X | X | X | o | X | X |
# +---+---+---+---+---+---+---+
# | S4| X | X | X | X | o | X |
# +---+---+---+---+---+---+---+
# | S5| o | X | X | X | X | o |
# +---+---+---+---+---+---+---+
```



Aufgabe 4 (4+2+4P)

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Sei $L_4 = \{a^n b^m c^{2n} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_4$ an.

b) Bestimmen Sie, welche der folgenden Wörter in L_4 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.

   b1) bb

   b2) abc

   b3) $aaacccccc$

c) Zeigen Sie (durch Angabe eines geeigneten endlichen Automaten oder regulären Ausdrucks) oder widerlegen Sie (mittels Pumping-Lemma): L_4 ist regulär.

Lösung:

a) $G = (N, \Sigma, P, S)$ mit

   – $N = \{S, B\}$

   – $P = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aScc \mid B \\ B & \rightarrow & bB \mid \varepsilon \end{array} \right\}$

b1) $S \Rightarrow B \Rightarrow bB \Rightarrow bbB \Rightarrow bb \in L_4$

b2) $abc \notin L_4$

b3) $S \Rightarrow aScc \Rightarrow aaScccc \Rightarrow aaaScccccc \Rightarrow aaaBcccccc \Rightarrow aaacccccc \in L_4$

c) L_4 ist nicht regulär. Sonst gibt es ein k, so dass alle Wörter mit Länge k und größer gepumpt werden können. Betrachte $x = a^k c^{2k} \in L_4$. Dann wäre x zerlegbar in u, v, w mit $u = a^i, v = a^j, w = a^l c^{2k}$ und $i + j + l = k$.

   Abpumpen mit $h = 0$ ergibt $x' = a^i a^l c^{2k}$ mit $i + l = k - j \neq k$. Damit ist x' von keiner der für L_4 erlaubten Formen, also $x' \notin L_4$. Widerspruch, also ist L_4 nicht regulär.

(Platz für Aufgabe 4)

Aufgabe 5 (2+3+6P)

Betrachten Sie den nichtdeterministischen endlichen Automaten A_5 in Abbildung 2.

a) Geben Sie zwei Läufe (*runs*) des Automaten A_5 auf der Eingabe $abbba$ an, von denen einer akzeptierend und einer nicht akzeptierend ist.

b) Beschreiben Sie $L(A_5)$ formal als Menge.

c) Konvertieren Sie A_5 mit dem in der Vorlesung angegebenen Verfahren in einen deterministischen endlichen Automaten. Geben Sie das Ergebnis als Tabelle an und zeichnen Sie die graphische Darstellung.

(Der Automat ist auf der nächsten Seite noch einmal abgebildet, falls Sie mehr als eine Seite benötigen.)

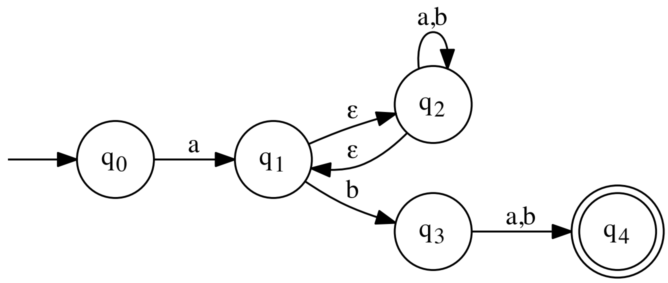
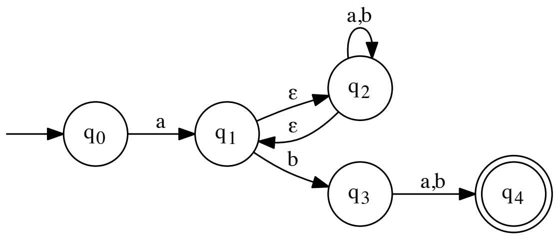


Abbildung 2: Automat A_5

Lösung

a)
- $(q_0, a, q_1), (q_1, \varepsilon, q_2), (q_2, b, q_2)(q_2, b, q_2), (q_2, b, q_2), (q_2, a, q_2)$ (nicht akzeptierend)
- $(q_0, a, q_1), (q_1, \varepsilon, q_2), (q_2, b, q_2)(q_2, b, q_2), (q_2, \varepsilon, q_1), (q_1, b, q_3), (q_3, a, q_4)$ (akzeptierend)

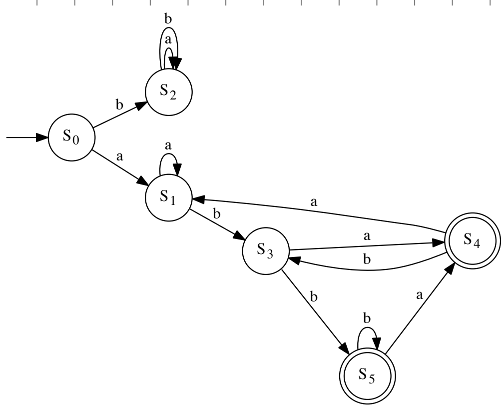
b) $L(A_5) = \{avbw \mid v \in \Sigma^*, w \in \Sigma\}$

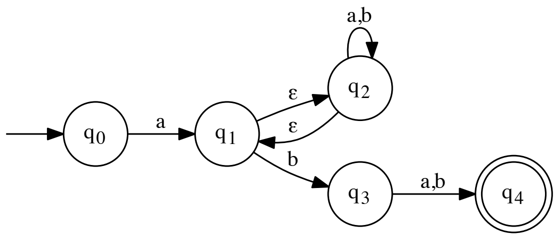


(Platz für Aufgabe 5)

Lösung

c)
```
# S0 = frozenset(['q0'])
# Delta(S0, a) =  frozenset(['q1', 'q2'])
# S1  =  frozenset(['q1', 'q2'])
# Delta(S0, b) =  frozenset([])
# S2  =  frozenset([])
# Delta(S1, a) =  frozenset(['q1', 'q2'])
# State is equal to  S1
# Delta(S1, b) =  frozenset(['q1', 'q3', 'q2'])
# S3  =  frozenset(['q1', 'q3', 'q2'])
# Delta(S2, a) =  frozenset([])
# State is equal to  S2
# Delta(S2, b) =  frozenset([])
# State is equal to  S2
# Delta(S3, a) =  frozenset(['q1', 'q2', 'q4'])
# S4  =  frozenset(['q1', 'q2', 'q4'])
# Delta(S3, b) =  frozenset(['q1', 'q3', 'q2', 'q4'])
# S5  =  frozenset(['q1', 'q3', 'q2', 'q4'])
# Delta(S4, a) =  frozenset(['q1', 'q2'])
# State is equal to  S1
# Delta(S4, b) =  frozenset(['q1', 'q3', 'q2'])
# State is equal to  S3
# Delta(S5, a) =  frozenset(['q1', 'q2', 'q4'])
# State is equal to  S4
# Delta(S5, b) =  frozenset(['q1', 'q3', 'q2', 'q4'])
# State is equal to  S5
          |    a    b
---------------------
->    S0 |    S1   S2
      S1 |    S1   S3
      S2 |    S2   S2
      S3 |    S4   S5
   *  S4 |    S1   S3
   *  S5 |    S4   S5
```





(Platz für Aufgabe 5)

Aufgabe 6 (4+6P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Betrachten Sie den Automaten A_6 in Abbildung 3.

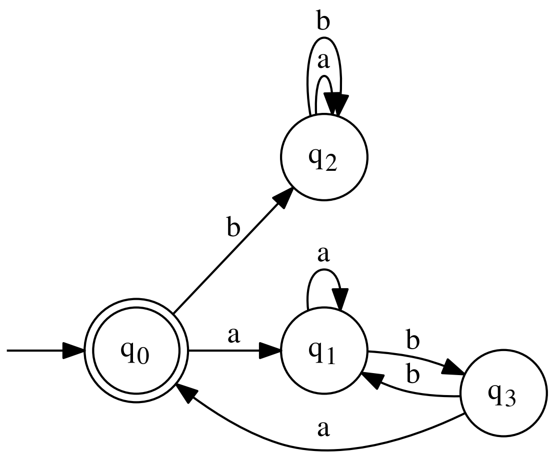


Abbildung 3: Automat A_6

a) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, das die an den verschiedenen Zuständen akzeptierten Sprachen beschreibt.

b) Lösen Sie dieses Gleichungssystem und geben Sie so einen regulären Ausdruck an, der die von A_6 akzeptierte Sprache beschreibt.

Lösung:

a)
- $L_0 = aL_1 + bL_2 + \varepsilon$
- $L_1 = aL_1 + bL_3$
- $L_2 = aL_2 + bL_2$
- $L_3 = aL_0 + bL_1$

b)

$$\begin{aligned}
L_2 &= aL_2 + bL_2 \\
&= (a+b)L_2 \\
&= (a+b)L_2 + \emptyset \\
&= (a+b)^*\emptyset \\
&= \emptyset \\
L_1 &= aL_1 + bL_3 \\
&= a^*bL_3 \text{ (Arden)} \\
L_3 &= aL_0 + bL_1 \\
&= aL_0 + ba^*bL_3 \text{ (Einsetzen } L_1\text{)} \\
&= ba^*bL_3 + aL_0 \text{ (Kommutativität)} \\
&= (ba^*b)^*aL_0 \text{ (Arden)} \\
L_1 &= a^*b(ba^*b)^*aL_0 \text{ (Einsetzen } L_3\text{)} \\
L_0 &= aa^*b(ba^*b)^*aL_0 + \varepsilon \text{ (Einsetzen } L_1, L_2\text{)} \\
&= (aa^*b(ba^*b)^*a)^*
\end{aligned}$$

(Platz für Aufgabe 6)

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Grammatik $G_7 = (N, \Sigma, P, R)$ mit $\Sigma = \{a, b, o, c, d, s, e\}$, $N = \{R, L, X\}$, Startsymbol R, und P mit den folgenden Produktionen:

1. $R \to L$
2. $R \to RdR$
3. $R \to oRc$
4. $R \to Rs$
5. $R \to XL$
6. $R \to e$
7. $L \to a$
8. $L \to b$

Konvertieren Sie G_7 mit dem Verfahren aus der Vorlesung in Chomsky-Normalform. Geben Sie nach jedem wesentlichen Zwischenschritt den Zustand der Regelmengen (*productions*) an, am Ende die gesamte entstandene Grammatik in CNF.

Lösung (1):

- Schritt 1: Entferne ε-Produktionen (1P)
  - G_7 enthält keine ε-Produktionen
- Schritt 2: Kettenregeln entfernen (2P)
  - Einzige Kettenregel ist Regel 1. $N(R) = \{L\}$
    - Streiche Regel 1.
    - Neue Regeln $R \to w$ für alle w, für die es $L \to w$ gibt:
      9. $R \to a$
      10. $R \to b$
- Ergebnis: $P' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- Schritt 3: Berechne reduzierte Grammatik (2P)
  - R terminiert wegen Regel 6. L terminiert wegen Regel 8. X kann nicht terminieren, da es keine Regel gibt, in der X links vorkommt. Also: Regel 5 kann gestrichen werden.
  - R ist als Startsymbol erreichbar. L ist nicht mehr erreichbar (Alle Terminalsymbole sind mit den Regeln 3, 4, 6, 9, 10 erreichbar.) Also: Regeln 7, 8 können gestrichen werden
  - Reduzierte Grammatik: $G_7' = (\{R\}, \Sigma, \{2, 3, 4, 9, 10\}, R)$

(Platz für Aufgabe 7)

Lösung (2):

- Schritt 4: Bereinige rechte Seiten (2P)
  - Neue Regeln
    11. $X_d \to d$
    12. $X_o \to o$
    13. $X_c \to c$
    14. $X_s \to s$
  - Veränderte Regeln:
    2'. $R \to RX_dR$
    3'. $R \to X_oRX_c$
    4'. $R \to RX_s$
- Schritt 5: Definitionen einführen: (2P)

  2". $R \to RC_1$
  15. $C_1 \to X_dR$
  3". $R \to X_oC_2$
  16. $C_2 \to RX_c$
- Endergebnis: $G'_7 = (N', \Sigma, P', R)$ mit (1P)
  - $N' = \{R, X_d, X_o, X_c, X_s, C_1, C_2\}$
  - P' wie folgt:
    1. $R \to RC_1$ (war 2")
    2. $C_1 \to X_dR$ (war 15)
    3. $R \to X_oC_2$ (war 3")
    4. $C_2 \to RX_c$ (war 16)
    5. $R \to RX_s$ (war 4')
    6. $R \to e$ (war 6)
    7. $R \to a$ (war 9)
    8. $R \to b$ (war 10)
    9. $X_d \to d$ (war 11)
    10. $X_o \to o$ (war 12)
    11. $X_c \to c$ (war 13)
    12. $X_s \to s$ (war 14)

Aufgabe 8 (1+3+4+1P)

Gegeben sei der Kellerautomat (PDA) $A_8 = (\{0,1,2\}, \{a,b,c\}, \{Z,A,B\}, \Delta, 0, Z)$ mit der Übergangsrelation Δ in der folgenden Tabelle:

Q (Ausgangszustand)	Σ (Alphabetsymbol)	Γ (gelesenes Stacksymbol)	Γ* (geschriebene Stacksymbole)	Q (Zielzustand)
0	ε	Z	ε	0
0	a	Z	AZ	0
0	a	A	AA	0
0	b	Z	BZ	1
0	b	A	ε	1
1	b	A	ε	1
1	b	Z	BZ	1
1	b	B	BB	1
1	ε	Z	ε	1
1	c	B	ε	2
2	c	B	ε	2
2	ε	Z	ε	2

a) Ist A_8 deterministisch? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Geben Sie jeweils eine vollständige Konfigurationsfolge von A_8 auf den folgenen Wörtern an, d.h. eine Folge, bei der die letzte Konfiguration keine mögliche Nachfolgekonfiguration hat. Wenn das Wort in $L(A_8)$ ist, muss die Konfigurationsfolge akzeptierend sein.

b1) $abbbcc$

b2) $aabbcc$

b3) $bbcc$

c) Beschreiben Sie die von A_8 akzeptierte Sprache formal als Menge.

d) Geben Sie, falls möglich, einen regulären Ausdruck für $L(A_8)$ an. Anderenfalls begründen Sie, warum dies nicht möglich ist (ohne Beweis).

Lösung:

a) Nicht deterministisch, weil es z.B. von der Konfiguration $(0, a, Z)$ Übergänge mit Zeile 0 und Zeile 1 gibt.

b1) $(0, abbbcc, Z) \to (0, bbbcc, AZ) \to (0, bbcc, Z) \to (1, bcc, BZ) \to (1, cc, BBZ) \to (2, c, BZ) \to (2, \varepsilon, Z) \to (2, \varepsilon, \varepsilon)$ (akzeptiert)

b2) $(0, aabbcc, Z) \to (0, abbcc, AZ) \to (0, bbcc, AAZ) \to (1, bcc, AZ) \to (1, cc, Z) \to (1, cc, \varepsilon)$ (nicht akzeptiert)

b3) $(0, bbcc, Z) \to (1, bcc, BZ) \to (1, cc, BBZ) \to (2, c, BZ) \to (2, \varepsilon, Z) \to (2, \varepsilon, \varepsilon)$ (akzeptiert)

c) $L(A_8) = \{a^n b^m c^\ell \mid m = n + \ell\}$.

d) Die Sprache $L(A_8)$ ist nicht regulär (sonst wäre z.B. $a^n b^n$ als Schnittmenge von $L(a^*b^*)$ und $L(A_8)$ auch regulär), also kann es auch keinen regulären Ausdruck geben, der Sie beschreibt.

(Platz für Aufgabe 8)

Aufgabe 9 (5+5P)

Betrachten Sie die Grammatik $G_9 = (\{C, D, K, F, S, X, Y\}, \{a, b, c, d, e, k, f\}, P, S)$ mit

$$P = \left\{ \begin{array}{lll} S & \to & SX \\ X & \to & DS \\ S & \to & FY \\ Y & \to & SC \\ S & \to & SK \\ S & \to & a \\ S & \to & b \\ D & \to & d \\ F & \to & f \\ C & \to & c \\ K & \to & k \end{array} \right\}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des CYK-Algorithmus, ob die folgenden Wörter in $L(G_9)$ enthalten sind:

a) $w_1 = fadbck$

b) $w_2 = addbkf$

Tabelle für Teil a)

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						
$w_1 =$	f	a	d	b	c	k

Ist $w_1 \in L(G_9)$? Ja □ Nein □

Lösung:

a)

```
+---+---+---+---+---+---+---+
|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Also:
+---+---+---+---+---+---+---+ fadbck is in L(G9)
| 1 | F | - | - | - | S | S |
+---+---+---+---+---+---+---+
| 2 |   | S | - | S | Y | - |
+---+---+---+---+---+---+---+
| 3 |   |   | D | X | - | - |
+---+---+---+---+---+---+---+
| 4 |   |   |   | S | Y | - |
+---+---+---+---+---+---+---+
| 5 |   |   |   |   | C | - |
+---+---+---+---+---+---+---+
| 6 |   |   |   |   |   | K |
+---+---+---+---+---+---+---+
| w | f | a | d | b | c | k |
+---+---+---+---+---+---+---+
```

(Platz für Aufgabe 9)

$$P = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \to & SX \\ X & \to & DS \\ S & \to & FY \\ Y & \to & SC \\ S & \to & SK \\ S & \to & a \\ S & \to & b \\ D & \to & d \\ F & \to & f \\ C & \to & c \\ K & \to & k \end{array} \right\}$$

Tabelle für Teil b)

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						
$w_1 =$	a	d	d	b	k	f

Ist $w_2 \in L(G_9)$? Ja □ Nein □

Lösung:

b)

```
+---+---+---+---+---+---+---+
|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |  Also:
+---+---+---+---+---+---+---+  addbkf ist nicht in L(G9)
| 1 | S | - | - | - | - | - |
+---+---+---+---+---+---+---+
| 2 |   | D | - | - | - | - |
+---+---+---+---+---+---+---+
| 3 |   |   | D | X | X | - |
+---+---+---+---+---+---+---+
| 4 |   |   |   | S | S | - |
+---+---+---+---+---+---+---+
| 5 |   |   |   |   | K | - |
+---+---+---+---+---+---+---+
| 6 |   |   |   |   |   | F |
+---+---+---+---+---+---+---+
| w | a | d | d | b | k | f |
+---+---+---+---+---+---+---+
```

Ende