

Formal Languages and Automata

Übungsklausur

Jan Hladik und Stephan Schulz

14. November 2014

Aufgabe 1: (2+4+4P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie für die folgenden Sprachen einen DFA an

a) $L_0 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a + |w|_b = 5\}$

b) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \cdot |w|_b = 4\}$

c) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \geq 2 \text{ und } w[|w| - 1] = w[2]\}$

Aufgabe 2: (2+2+2+3+5P)

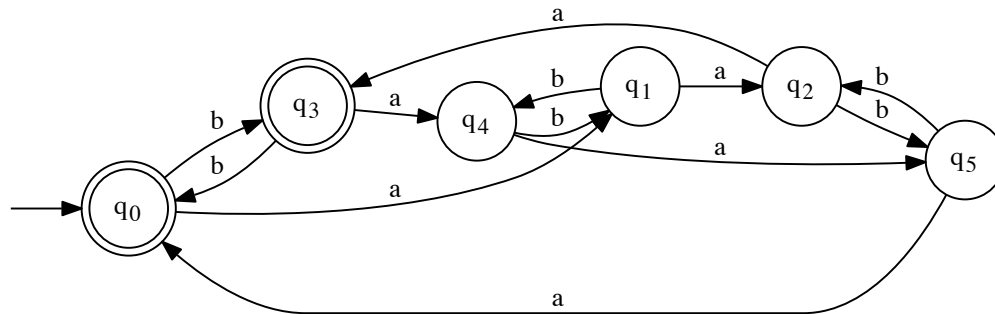


Abbildung 1: Automat A_3

Betrachten Sie den deterministischen endlichen Automaten A_3 in Abbildung 1.

- Welche Konfigurationsfolge durchläuft der Automat beim Bearbeiten des Wortes $ababab$?
- Welche Konfigurationsfolge durchläuft der Automat beim Bearbeiten des Wortes $aaabbb$?
- Geben Sie den Automaten in tabellarischer Form an.
- Geben Sie eine formale Beschreibung von $L(A_3)$
- Minimieren Sie den Automaten mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren.

Aufgabe 3: (3+2+5P)

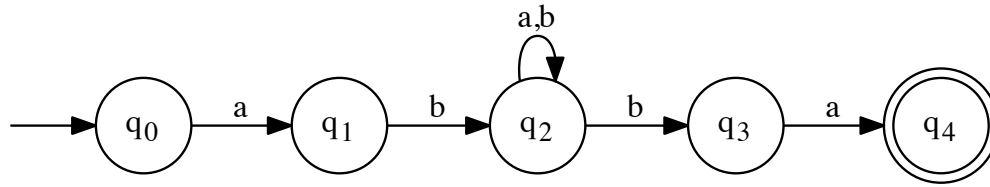


Abbildung 2: Automat A_4

Betrachten Sie den NFA A_4 in Abbildung 2.

- Welche möglichen Ableitungen durchläuft der Automat auf dem Wort $abbba$?
- Beschreiben Sie $L(A_4)$ als Menge.
- Konvertieren Sie A_4 mit dem in der Vorlesung angegebenen Verfahren in einen deterministischen endlichen Automaten.

Aufgabe 4: (3+3+3P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_1 = \{a^n w a^n \mid n \in \mathbb{N}, w \in \Sigma^*\}$.

- a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_1$ an.
- b) Überprüfen Sie, welche die folgenden Worte in L_1 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.
 - b1) ε
 - b2) $babab$
 - b3) $aabbaaa$
- c) Zeigen oder widerlegen Sie: L_1 ist regulär.

Aufgabe 5: (3+3+4P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_8 = \{a^n b w a^n \mid w \in \Sigma^*, n \in \mathbb{N}\}$.

- a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_8$ an.
- b) Überprüfen Sie, welche die folgenden Worte in L_8 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.
 - a1) *abba*
 - a2) *ababaa*
 - a3) *aababa*
- c) Zeigen oder widerlegen Sie: L_8 ist regulär.

Aufgabe 6: (2+2+3P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $G_3 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow \varepsilon, S \rightarrow aSb\}, S)$.

- a) Bestimmen Sie den maximalen Typ der Grammatik in der Chomsky-Hierarchie
- b) Geben Sie eine formale Beschreibung der erzeugten Sprache
- c) Bestimmen Sie den maximalen Typ der Sprache in der Chomsky-Hierarchie. Falls Sprache und Grammatik unterschiedliche Typen haben, geben Sie eine äquivalente Grammatik mit dem maximal möglichen Typ an.

Aufgabe 7: (5+2+1P)

Sei $L = \{a^n b^m c^p d^q \mid m, n, p, q \in \mathbb{N} \text{ und } m + n = p + q\}$.

- a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, die die Sprache L erzeugt
- b) Geben Sie Ableitungen in G für die folgenden Worte an:
 - b1) $abbccdd$
 - b2) $abdd$

Aufgabe 8: (5+3P)

Betrachten Sie die folgende Grammatik G :

$G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ mit

- $V_N = \{S, A, B, C, D, E\}$
- $V_T = \{a, b, c\}$
- $P = \{ \begin{array}{l} S \rightarrow Ac \\ A \rightarrow aAc \\ A \rightarrow ac \\ A \rightarrow B \\ B \rightarrow BE \\ A \rightarrow D \\ D \rightarrow bDc \\ D \rightarrow bc \\ D \rightarrow C \\ C \rightarrow c \\ C \rightarrow Cc \\ E \rightarrow a | b | c \end{array} \}$

- a) Transformieren Sie G mit dem in der Vorlesung gezeigten Verfahren in Chomsky-Normalform.
- b) Geben Sie eine formale Beschreibung von $L(G)$.

Aufgabe 9: (3+3+3P)

Betrachten Sie die Grammatik $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ mit

- $V_N = \{S, A, B, R, T\}$
- $V_T = \{a, b\}$
- $P = \{$
 - $S \rightarrow AR$
 - $S \rightarrow AT$
 - $S \rightarrow AA$
 - $R \rightarrow SA$
 - $T \rightarrow SB$
 - $T \rightarrow b$
 - $B \rightarrow b$
 - $A \rightarrow a$ $\}$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des CYK-Algorithmus, welche der folgenden Wörter in $L(G)$ sind.

a1) $aaabb$

a2) $aaaaab$

b) Geben Sie eine Charakterisierung von $L(G)$ an

Aufgabe 10: (3+3+4P)

Gegeben sei der Kellerautomat $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_f\}, \{a, b, c, d\}, \{Z_0, X\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\})$, wobei δ in der folgenden Tabelle angegeben ist.

q_0	a	Z_0	XZ_0	q_0
q_0	a	X	XX	q_0
q_0	b	Z_0	XZ_0	q_1
q_0	b	X	XX	q_1
q_0	c	X	ε	q_2
q_0	d	X	ε	q_3
q_0	ε	Z_0	ε	q_f
q_1	b	X	XX	q_1
q_1	c	X	ε	q_2
q_1	d	X	ε	q_3
q_2	c	X	ε	q_2
q_2	d	X	ε	q_3
q_2	ε	Z_0	ε	q_f
q_3	d	X	ε	q_3
q_3	ε	Z_0	ε	q_f

a) Geben Sie, falls möglich, für die folgenden Wörter akzeptierende Konfigurationsfolgen an.

a1) $w_1 = aaacdd$

a2) $w_2 = abaccd$

b) Beschreiben Sie formal die von A akzeptierte Sprache als Menge.

Ende des Klausurumfangs

– Bonusaufgaben –

Aufgabe B1: (2+2+2+4P)

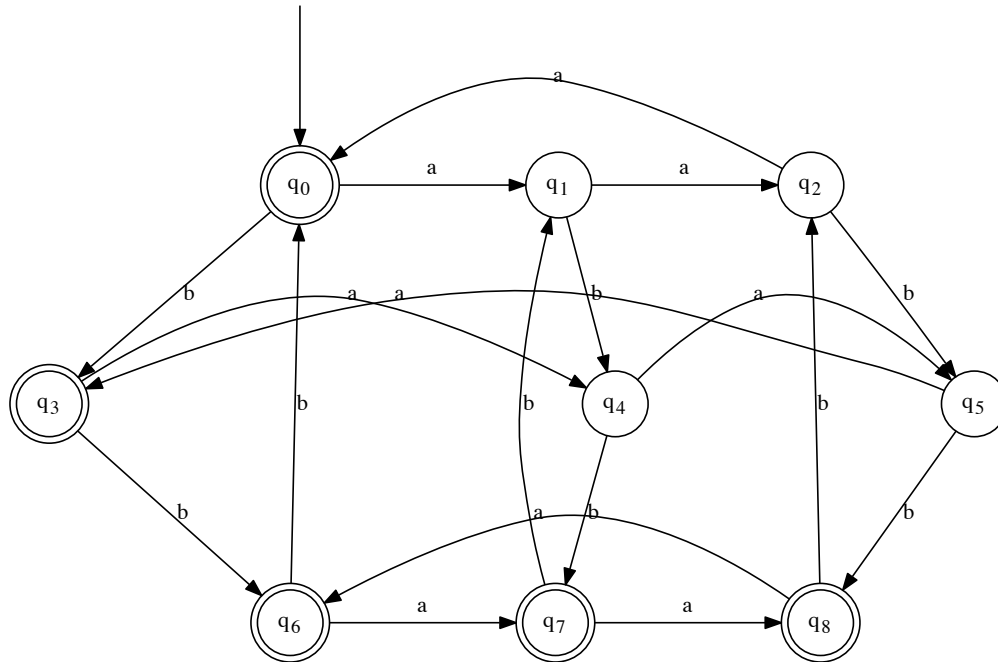


Abbildung 3: Automat A_2

Betrachten Sie den deterministischen endlichen Automaten A_2 in Abbildung 3.

- Welche Konfigurationsfolge durchläuft der Automat beim Bearbeiten des Wortes $ababab$?
- Welche Konfigurationsfolge durchläuft der Automat beim Bearbeiten des Wortes $aaabbb$?
- Geben Sie den Automaten in tabellarischer Form an.
- Geben Sie eine formale Beschreibung von $L(A_2)$

Aufgabe B2: (3+3+4P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_0 = \{a^n b b a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

- a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_0$ an.
- b) Überprüfen Sie, welche die folgenden Worte in L_0 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.
 - a1) bb
 - a2) aba
 - a3) $aabbaa$
- c) Zeigen oder widerlegen Sie: L_0 ist regulär.

Aufgabe B3: (1+1+2P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_2 = \{a^n b a^n \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 2\}$.

- a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_2$ an.
- b) Überprüfen Sie, welche die folgenden Worte in L_2 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.
 - a1) ε
 - a2) b
 - a2) $aabaa$
- c) Zeigen oder widerlegen Sie: L_2 ist regulär.

Aufgabe B4: (3+3+4P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_3 = \{a^n b^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

- a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_3$ an.
- b) Überprüfen Sie, welche die folgenden Worte in L_3 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.
 - a1) ε
 - a2) $aabbbb$
 - a3) $aaabbb$
- c) Zeigen oder widerlegen Sie: L_3 ist regulär.

Aufgabe B5: (3+3+2P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_4 = \{a^n b b a^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.

- a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_4$ an.
- b) Überprüfen Sie, welche die folgenden Worte in L_4 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.
 - a1) ba
 - a2) $ababba$
 - a3) $aabbaa$
- c) Zeigen oder widerlegen Sie: L_4 ist regulär.

Aufgabe B6: (2+3+5P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $G_2 = (\{S, T, U, X\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aTU, U \rightarrow X, TX \rightarrow T, T \rightarrow bS, T \rightarrow b\}, S)$.

- a) Bestimmen Sie den maximalen Typ der Grammatik in der Chomsky-Hierarchie
- b) Geben Sie eine formale Beschreibung der erzeugten Sprache
- c) Bestimmen Sie den maximalen Typ der Sprache in der Chomsky-Hierarchie. Falls Sprache und Grammatik unterschiedliche Typen haben, geben Sie eine äquivalente Grammatik mit dem maximal möglichen Typ an.