Bitte die Blätter nicht trennen!

Matrikelnummer:			
DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Stuttgart		Fakultät	**Technik**
		Studiengang:	**Angewandte Informatik**
		Jahrgang / Kurs :	**TINF22ITA**
ÜBUNGSKLAUSUR		Studienhalbjahr:	**3. Semester**
Datum:	**9. November 2023**	Bearbeitungszeit:	**90 Minuten**
Modul:	**T3INF2002**	Dozent:	**Stephan Schulz**
Unit:	**Formale Sprachen und Automaten**		
Hilfsmittel:	**Open-Book-Klausur, beliebige Papier-Dokumente, Skript auf Tablet**		

Aufgabe	Thema	erreichbar	erreicht
1	RE und NFA	10	
2	Chomsky-Hierarchie	11	
3	Produktautomat	9	
4	KFG und PL-1	10	
5	NFA und DFA	10	
6	REs aus DFA	11	
7	Chomsky-NF	9	
8	Stackautomat	10	
9	CYK	9	
Summe		89	

1. Sind Sie gesund und prüfungsfähig?
2. Sind Ihre Taschen und sämtliche Unterlagen, insbesondere alle nicht erlaubten Hilfsmittel, seitlich an der Wand zum Gang hin abgestellt und nicht in Reichweite des Arbeitsplatzes?
3. Haben Sie auch außerhalb des Klausurraumes im Gebäude keine unerlaubten Hilfsmittel oder ähnliche Unterlagen liegen lassen?
4. Haben Sie Ihr Handy ausgeschaltet und abgegeben?

(Falls Ziff. 2 oder 3 nicht erfüllt sind, liegt ein Täuschungsversuch vor, der die Note „nicht ausreichend“ zur Folge hat.)

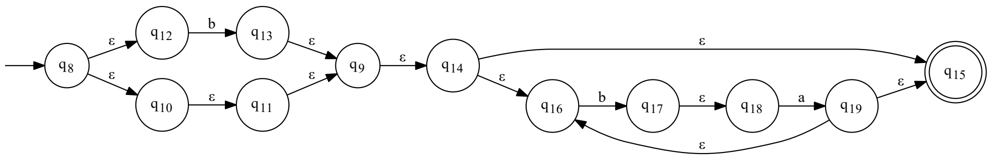
Aufgabe 1 (7+3P)

Gegeben seien der reguläre Ausdruck $r = (\varepsilon + b)(ba)^*$ und die Sprache $L = L(r)$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

a) Verwenden Sie *exakt* das in der Vorlesung gezeigte Verfahren, um aus dem regulären Ausdruck r einen nichtdeterministischen endlichen Automaten (NFA), der L erkennt, zu konstruieren. Berücksichtigen Sie insbesondere alle ε-Übergänge. Es reicht die Darstellung des Ergebnisses in graphischer Form.

b) Zeigen Sie (mit Hilfe der algebraischen Äquivalenzen aus der Vorlesung) oder widerlegen Sie (durch Angabe eines geeigneten Wortes): $L((\varepsilon + b)a(ba + a)^*) = L((ba + a)^*(\varepsilon + b)a)$

Lösung:



a)

b) 1P für Behauptung, 2 P für Beweis.

Behauptung: $L = L((ba + a)^*(\varepsilon + b)a)$.

$$\begin{aligned}
(ba + a)^*(\varepsilon + b)a &\doteq (ba + a)^*(a + ba) \\
&\doteq (ba + a)^*(ba + a) \\
&\doteq (ba + a)(ba + a)^* \\
&\doteq (b + \varepsilon)a(ba + a)^* \\
&\doteq (\varepsilon + b)a(ba + a)^*
\end{aligned}$$

(Platz für Aufgabe 1)

$$r = (\varepsilon + b)(ba)^*$$

Aufgabe 2 ((1+2+2+1)+(1+1+2+1)P

Gegeben seien die Grammatiken G_1 und G_2:

$$\begin{aligned} G_1 &= (\{S, A\}, \{a, b, c\}, P_1, S) \\ P_1 &= \{S \to bSc|bS|Sc|ASA|A, \\ & \quad A \to a|\varepsilon\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2 &= (\{T, B\}, \{a, b\}, P_2, T) \\ P_2 &= \{T \to aBBa, \\ & \quad BB \to BBBB|\varepsilon, \\ & \quad B \to b\} \end{aligned}$$

a) Beantworten Sie die folgenden Fragen für G_1.

  a1) Welcher ist der maximale Typ der *Grammatik* (in der Chomsky-Hierarchie)? Begründen Sie Ihre Antwort.

  a2) Geben Sie die von der Grammatik erzeugte Sprache formal als Menge an.

  a3) Welcher ist der maximale Typ dieser *Sprache* (in der Chomsky-Hierarchie)? Falls dieser sich vom Typ der Grammatik unterscheidet, geben Sie eine äquivalente Grammatik mit dem maximal möglichen Typ an.

  a4) Ist die Sprache vom Typ 3? Geben Sie im positiven Fall einen regulären Ausdruck für die Sprache an.

b) Beantworten Sie die folgenden Fragen für G_2.

  b1) Welcher ist der maximale Typ der *Grammatik* (in der Chomsky-Hierarchie)? Begründen Sie Ihre Antwort.

  b2) Geben Sie die von der Grammatik erzeugte Sprache formal als Menge an.

  b3) Welcher ist der maximale Typ dieser *Sprache* (in der Chomsky-Hierarchie)? Falls dieser sich vom Typ der Grammatik unterscheidet, geben Sie eine äquivalente Grammatik mit dem maximal möglichen Typ an.

  b4) Ist die Sprache vom Typ 3? Geben Sie im positiven Fall einen regulären Ausdruck für die Sprache an.

Lösung:

a1) Typ 2, da alle Regeln von der Form $N \to \gamma$ sind (also kontext-frei). Nicht Typ 3, da $S \to bSc$ nicht rechts-linear ist. (1P)

a2) $\{w \in \Sigma^* \mid \nexists i, j : i < j \wedge w_i = c \wedge w_j = b\}$ das erste c im Wort folgt nach dem letzten b - oder $\{w_1 w_2 \mid w_1 \in \{a, b\}^* \wedge w_2 \in \{a, c\}^*\}$ explizite Beschreibung der beiden Hälften (2P)

a3) Typ 3. $\{S \to aS|bS|F, F \to aF|cF|\varepsilon\}$ (2P)

a4) $(a + b)^*(a + c)^*$ (1P)

b1) Typ 0, da kontextsensitive und verkürzende Regeln. (1P)

b2) $\{a \cdot b^{2n} \cdot a \mid n \in \mathbb{N}\}$ (1P)

b3) Typ 3. $\{T \to aB, B \to bC|a, C \to bB\}$ (2P)

b4) $a(bb)^*a$ (1P)

(Platz für Aufgabe 2)

Aufgabe 3 (2+6+1P)

Betrachten Sie die deterministischen endlichen Automaten (DFAs) A_1 und A_2.

a) Geben Sie beide Automaten in Tabellenschreibweise an.

b) Erzeugen Sie einen Produktautomaten A_p mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren und stellen Sie das Ergebnis in graphischer Form dar.

c) Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die von A_p akzeptierte Sprache beschreibt.

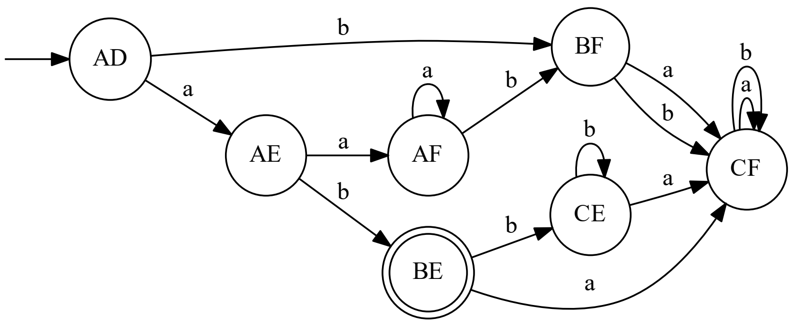
Abbildung 1: Automat A_1 und A_2

(Platz für Aufgabe 3)

Lösung:

a)
```
A1     | a b
---------------------
-> A | A B
*  B | C C
   C | C C

A2     | a b
---------------------
-> D | E F
*  E | F E
   F | F F
```



b)

c) ab (A_p akzeptiert nur ein Wort)

Aufgabe 4 (3+3+4P)

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Sei $L_4 = \{a^n w \mid n \in \mathbb{N}, w \in \Sigma^*, |w| = n\}$.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $\mathcal{L}(G) = L_4$ an. Verwenden Sie hierzu möglichst wenige Nichtterminalsymbole.

b) Bestimmen Sie, welche der folgenden Wörter in L_4 sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.

  b1) $aacb$

  b2) $aacca$

  b3) $abab$

  b4) $aaaaaaaa$

c) Zeigen Sie (durch Angabe eines geeigneten endlichen Automaten oder regulären Ausdrucks) oder widerlegen Sie (mittels Pumping-Lemma): L_4 ist regulär.

Lösung:

a) $G = (N, \Sigma, P, S)$ mit

  - $N = \{S\}$
  - $P = \{\ S \quad \rightarrow \quad aSa|aSb|aSc|\varepsilon\ \}$

b1) $S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaScb \Rightarrow aacb \in L_4$

b2) $aacca \notin L_4$

b3) $abab \notin L_4$

b4) $S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aaaSaaa \Rightarrow aaaaSaaaa \Rightarrow aaaaaaaa \in L_4$

c) L_4 ist nicht regulär.
Sei $k \in \mathbb{N}$. Wähle $s = a^k b^k$. Weiter wie bei $a^n b^n$.

(Platz für Aufgabe 4)

Aufgabe 5 (2+2+6P)

Betrachten Sie den nichtdeterministischen endlichen Automaten (NFA) A_5 über $\Sigma = \{a, b\}$ in Abbildung 2.

a) Geben Sie zwei Läufe (*runs*) des Automaten A_5 auf der Eingabe $aabbaa$ an, von denen einer akzeptierend und einer nicht akzeptierend ist.

b) Geben Sie einen regulären Ausdruck für $L(A_5)$ an.

c) Konvertieren Sie A_5 mit dem in der Vorlesung angegebenen Verfahren in einen deterministischen endlichen Automaten (DFA). Geben Sie das Ergebnis als **Tabelle** an.

(Der Automat ist auf der nächsten Seite noch einmal abgebildet, falls Sie mehr als eine Seite benötigen.)

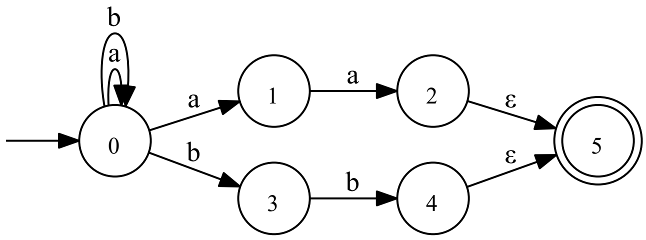


Abbildung 2: Automat A_5

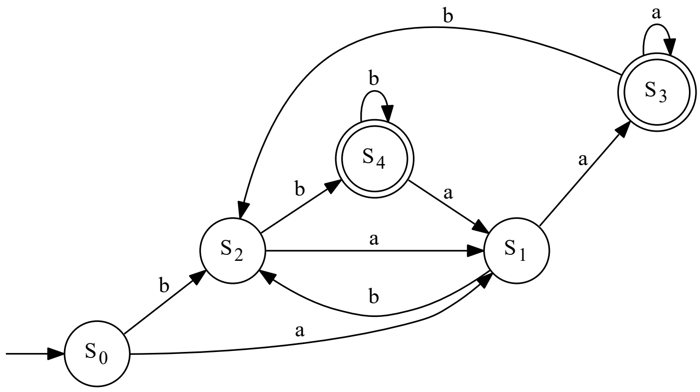
Lösung

a)
- $(0, aabbaa), (0, abbaa), (0, bbaa), (0, baa), (0, aa), (0, a), (0, \varepsilon)$ (nicht akzeptierend)
- $(0, aabbaa), (0, abbaa), (0, bbaa), (0, baa), (0, aa), (1, a), 2, \varepsilon), (5, \varepsilon)$ (akzeptierend)

b) $(a + b)^*(aa + bb)$

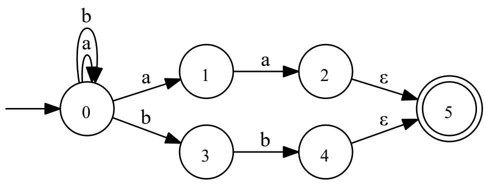
c)
```
S0 = frozenset({'0'})
Delta(S0, a) =  frozenset({'0', '1'})
Delta(S0, b) =  frozenset({'3', '0'})
Delta(S1, a) =  frozenset({'0', '2', '1', '5'})
Delta(S1, b) =  frozenset({'3', '0'})
State is equal to  S2
Delta(S2, a) =  frozenset({'0', '1'})
State is equal to  S1
Delta(S2, b) =  frozenset({'3', '5', '0', '4'})
Delta(S3, a) =  frozenset({'0', '2', '1', '5'})
State is equal to  S3
Delta(S3, b) =  frozenset({'3', '0'})
State is equal to  S2
Delta(S4, a) =  frozenset({'0', '1'})
State is equal to  S1
Delta(S4, b) =  frozenset({'3', '5', '0', '4'})
State is equal to  S4
         |    a    b
---------------------
->    S0 |    S1   S2
      S1 |    S3   S2
      S2 |    S1   S4
```

```
*  S3 |   S3   S2
*  S4 |   S1   S4
```



Nur zur Info:

(Platz für Aufgabe 5)



Aufgabe 6 (2+4+5P)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Betrachten Sie den endlichen Automaten (DFA) A_6 in Abbildung 3.

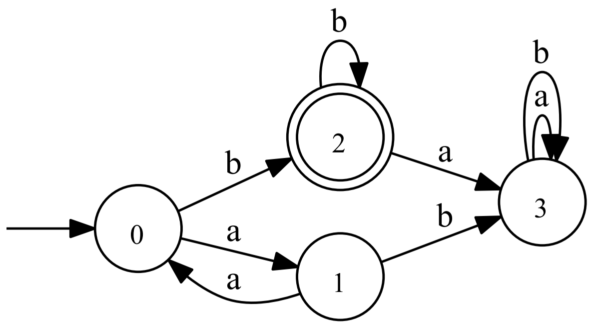


Abbildung 3: Automat A_6

a) Geben Sie je einen Lauf (*run*) von A_6 auf den folgenden Worten an:

   a1) $w_1 = aaaabb$

   a2) $w_2 = aaabbb$

   Gilt jeweils $w_1 \in L(A_6)$ und $w_2 \in L(A_6)$?

b) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, das die an den verschiedenen Zuständen akzeptierten Sprachen beschreibt.

c) Lösen Sie dieses Gleichungssystem und geben Sie so einen regulären Ausdruck an, der die von A_6 akzeptierte Sprache beschreibt.

Lösung:

a) a1) $(0, aaaabb), (1, aaabb), (0, aabb), (1, abb), (0, bb), (2, b), (2, \varepsilon)$, also $w_1 \in L(A_6)$

   a2) $(0, aaabbb), (1, aabbb), (0, abbb), (1, bbb), (3, bb), (3, b), (3, \varepsilon)$, also $w_2 \notin L(A_6)$

b)
- $L_0 = aL_1 + bL_2$
- $L_1 = aL_0 + bL_3$
- $L_2 = aL_3 + bL_2 + \varepsilon$
- $L_3 = aL_3 + bL_3 = \emptyset$

c)

$$\begin{aligned}
L_2 &= bL_2 + \varepsilon \text{ (Einsetzen L3)} \\
L_2 &= b^* \text{ (Arden)} \\
L_1 &= aL_0 \text{ (Einsetzen L3)} \\
L_0 &= aaL_0 + bb^* \text{ (Einsetzen)} \\
&= (aa)^*bb^* \text{ (Arden)}
\end{aligned}$$

(Platz für Aufgabe 6)

Aufgabe 7 (9 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Grammatik $G_7 = (N, \Sigma, P, S)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $N = \{S, R, T\}$, Startsymbol S, und P mit den folgenden Produktionen:

1. $S \to bSb$
2. $S \to T$
3. $T \to aTa$
4. $T \to bR$
5. $R \to \varepsilon$

Konvertieren Sie G_7 mit dem Verfahren aus der Vorlesung in Chomsky-Normalform. Geben Sie nach jedem wesentlichen Zwischenschritt den Zustand der Regelmengen (*productions*) an, am Ende die gesamte entstandene Grammatik in CNF.

Lösung (1): (Je zwei Punkte für ε-Elimination, Chain-Elimination, Abkürzungen. Je 1 Punkt für Terminating Symbols, Erreichbarkeit und Symboldefinitionen).

```
Removing epsilon-productions
E =  {'R'}
Adding:  T->b
Result:
S->T
S->bSb
T->aTa
T->b
T->bR

Removing chain rules
Adding:  S->aTa
Adding:  S->bR
Adding:  S->b
Result:
S->aTa
S->b
S->bR
S->bSb
T->aTa
T->b
T->bR

Removing Non-Terminating:
Removing  T->bR
Removing  S->bR
Result:
S->aTa
S->b
S->bSb
T->aTa
T->b
```

```
Removing Non-reachable:
Result:
S->aTa
S->b
S->bSb
T->aTa
T->b

Adding def  B -> b
Adding def  A -> a
Definitions introduced:
A->a
B->b
S->ATA
S->BSB
S->b
T->ATA
T->b

Adding abbrev  C -> SB
Adding abbrev  G -> TA
Abbreviations introduced:
A->a
B->b
C->SB
G->TA
S->AG
S->BC
S->b
T->AG
T->b
```

Damit: $G = (N, \Sigma, P, S)$ mit $N = \{A, B, C, E, G, S, T\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und P wie angegeben.

(Platz für Aufgabe 7)

Aufgabe 8 (2+2+6P)

Betrachten sie das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, die Sprache $L_8 = \{a^n ba^n | n \in \mathbb{N}\}$ und den Stackautomat (*PDA*) A_8.

$A_8 = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, 0, Z)$ mit $Q = \{0, 1\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, Z\}$ und Δ gemäß folgender Tabelle:

Q (Ausgangs-zustand)	Σ (Alphabet-symbol)	Γ (gelesenes Stacksymbol)	Γ^* (geschriebene Stacksymbole)	Q (Ziel-zustand)
0	a	Z	AZ	0
0	a	A	AA	0
0	ε	Z	ε	0
0	b	A	A	1
1	a	A	ε	1
1	ε	Z	ε	1

a) Geben Sie jeweils ein Wort mit Länge 7 und 8 aus L_8 an oder begründen Sie, warum es kein solches Wort gibt.

b) Geben Sie einen akzeptierenden Lauf als Konfigurationsfolge für den Automaten A_8 auf dem Wort $aabaa$ an.

c) Akzeptiert der Automat A_8 genau die Sprache L_8?

Falls ja, begründen Sie dieses und zeigen Sie je einen akzeptierenden Lauf für 3 Wörter aus L_8 (außer $aabaa$).

Falls nein, finden Sie mindestens ein Gegenbeispiel als Lauf und geben Sie an, welche Transitionen man ergänzen oder entfernen muss, damit A_8 genau die Sprache L_8 akzeptiert.

Lösung:

a)
- Länge 7: $aaabaaa$
- Länge 8: Gibt es nicht, da alle Wörter die Länge $2 * n + 1 | n \in \mathbb{N}$ haben, und somit Wörter mit gerader Länge ausgeschlossen sind.

b)
1. $(0, aabaa, Z)$
2. $(0, abaa, AZ)$
3. $(0, baa, AAZ)$
4. $(1, aa, AAZ)$
5. $(1, a, AZ)$
6. $(1, \varepsilon, Z)$
7. $(1, \varepsilon, \varepsilon)$

c) Nein, die Sprache wird nicht akzeptiert. Generell werden alle Wörter der Form $a^n ba^n$ mit $n \in \mathbb{N}^+$ akzeptiert. Nicht akzeptiert wird $b \in L_8$. Akzeptiert wird $\varepsilon \notin L_8$

Zu ergänzen ist eine Transition $0, b, Z \to Z, 1$, um b zu akzeptieren.

Zu entfernen ist die Transition $0, \varepsilon, Z \to \varepsilon, 0$, um ε nicht mehr zu akzeptieren.

1 Punkt für richtige Antwort, 1 Punkt für Gegenbeispiel, 2 Punkte pro Transition. Bei falscher Antwort ja gibt es allerdings noch einen Punkt für jeden korrekten Lauf.

Korrekter Automat: $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, 0, Z)$ mit $Q = \{0, 1\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, Z\}$ und Δ gemäß folgender Tabelle:

Q (Ausgangs-zustand)	Σ (Alphabet-symbol)	Γ (gelesenes Stacksymbol)	Γ* (geschriebene Stacksymbole)	Q (Ziel-zustand)
0	a	Z	AZ	0
0	a	A	AA	0
0	b	A	A	1
0	b	Z	Z	1
1	a	A	ε	1
1	ε	Z	ε	1

(Platz für Aufgabe 8)

Aufgabe 9 (5+4P)

Betrachten Sie die Grammatik $G_9 = (\{S, A, B, C, M, N, O\}, \{m, n, o\}, P, S)$ mit

$$P = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \to & AB \\ A & \to & OM \\ B & \to & NA \\ B & \to & NC \\ C & \to & AB \\ M & \to & m \\ N & \to & n \\ O & \to & o \end{array} \right\}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des CYK-Algorithmus, ob die folgenden Wörter in $L(G_9)$ enthalten sind:

a) $w_1 = nomnom$

b) $w_2 = omnom$

Tabelle für Teil a)

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						
$w_1 =$	n	o	m	n	o	m

Ist $w_1 \in L(G_9)$? Ja $\square$ Nein $\square$

Lösung:

a)
```
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|     |   1 |   2 |   3 |   4 |   5 |   6 |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   1 |   N |   - |   B |   - |   - |   B |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   2 |     |   O |   A |   - |   - | C,S |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   3 |     |     |   M |   - |   - |   - |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   4 |     |     |     |   N |   - |   B |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   5 |     |     |     |     |   O |   A |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   6 |     |     |     |     |     |   M |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   w |   n |   o |   m |   n |   o |   m |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
Also: nomnom ist nicht in L(G9)
```

(Platz für Aufgabe 9)

$$P = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & AB \\ A & \rightarrow & OM \\ B & \rightarrow & NA \\ B & \rightarrow & NC \\ C & \rightarrow & AB \\ M & \rightarrow & m \\ N & \rightarrow & n \\ O & \rightarrow & o \end{array} \right\}$$

Tabelle für Teil b)

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					
$w_2 =$	o	m	n	o	m

Ist $w_2 \in L(G_9)$? Ja □ Nein □

Lösung:

b)
```
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|     |   1 |   2 |   3 |   4 |   5 |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   1 |   O |   A |   - |   - | C,S |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   2 |     |   M |   - |   - |   - |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   3 |     |     |   N |   - |   B |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   4 |     |     |     |   O |   A |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   5 |     |     |     |     |   M |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
|   w |   o |   m |   n |   o |   m |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
Also: omnom ist in L(G9)
```

Wer die dynamische Programmierung verstanden hat, merkt natürlich, dass die zweite Tabelle in der ersten Tabelle enthalten ist und kann die Frage direkt beantworten. Auch das ist eine akzeptable Antwort.

(Platz für Aufgabe 9)

Ende