Bitte die Blätter nicht trennen!

Matrikelnummer:			
DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Stuttgart **ÜBUNGSKLAUSUR**		Fakultät Studiengang: Jahrgang / Kurs : Studienhalbjahr:	**Technik** **Informatik** **TINF23ITA** **3. Semester**
Datum:	**November 2024**	Bearbeitungszeit:	**90 Minuten**
Modul: Unit:	**T2INF2002** **Formale Sprachen**	Dozent:	**Schulz**
Hilfsmittel:	**Zwei beliebige Papierwerke, Skript auch auf Tablet im Flugmodus**		

Aufgabe	Thema	gesamt
1	Reguläre Sprachen	8
2	Chomsky-Hierarchie	9
3	KFG und Pumping-Lemma	11
4	DFA-Minimierung	11
5	NFA und DFA	10
6	REs aus DFA	8
7	Chomsky-NF	9
8	Stackautomat	11
9	CYK	11
Summe		88

1. Sind Sie gesund und prüfungsfähig?
2. Sind Ihre Taschen und sämtliche Unterlagen, insbesondere alle nicht erlaubten Hilfsmittel, seitlich an der Wand zum Gang hin abgestellt und nicht in Reichweite des Arbeitsplatzes?
3. Haben Sie auch außerhalb des Klausurraumes im Gebäude keine unerlaubten Hilfsmittel oder ähnliche Unterlagen liegen lassen?
4. Haben Sie Ihr Handy ausgeschaltet und abgegeben?

(Falls Ziff. 2 oder 3 nicht erfüllt sind, liegt ein Täuschungsversuch vor, der die Note „nicht ausreichend“ zur Folge hat.)

Aufgabe 1 (1+3+4 Punkte)
Betrachten Sie das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ und die Sprache $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid aa$ oder bb ist ein Teilwort von $w\}$. Beachten Sie dass aa ein Teilwort von aa ist, d.h. $aa, bb \in L$.

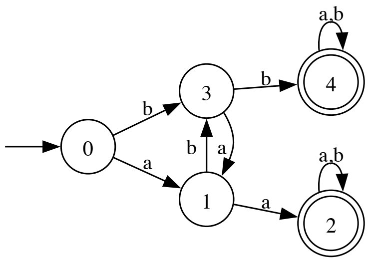
a) Geben Sie einen regulären Ausdruck r mit $L(r) = L_1$ an.

b) Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten A mit $L(A) = L_1$ in graphischer Darstellung an.

c) Geben Sie eine rechts-lineare Grammatik G mit $L(G) = L_1$ an.

Lösung:

a) $r = (a + b)^*(aa + bb)(a + b)^*$



b)

c) $G = (N, \Sigma, P, S)$ mit $N = \{S, A, B, R\}$ und

P:
$S \to aS|bS$
$S \to aA|bB$
$A \to aR$
$B \to bR$
$R \to aR|bR|\epsilon$

(Platz für Aufgabe 1)

Aufgabe 2 (1+2+2+4 Punkte)
Betrachten Sie die Grammatik $G_1 = (N, \Sigma, P, S)$ mit $N = \{S, C, D, E\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und folgenden Produktionen:

$$\begin{aligned} P \quad = \{ \quad & S \to CSD \\ & S \to EaE \\ & C \to cC \\ & D \to d \\ & aE \to aaE \\ & aE \to a \\ & Ea \to Eba \\ & Eb \to Ebb \\ & Eb \to b\} \end{aligned}$$

a) Welcher ist der maximale Typ der *Grammatik* (in der Chomsky-Hierarchie)?
Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Geben Sie Ableitungen für zwei Worte aus $L(G_1)$.

c) Geben Sie die von der Grammatik erzeugte Sprache formal als Menge an.

d) Welcher ist der maximale Typ dieser *Sprache* (in der Chomsky-Hierarchie)?
Geben Sie eine äquivalente Grammatik mit dem maximal möglichen Typ an.

Lösung:

a) Typ 0. Nicht Typ 2 oder 3, weil komplexe linke Seiten vorkommen. Nicht Typ 1, weil z.B. $Eb \to b$ verkürzend ist. (1P)

b)
- $S \Rightarrow EaE \Rightarrow Ea \Rightarrow Eba \Rightarrow ba$
- $S \Rightarrow EaE \Rightarrow Ea \Rightarrow Eba \Rightarrow Ebba \Rightarrow bba$

c) $L(G_1) = \{b^n a^m \mid a, b \in \mathbb{N}^+\}$

d) Typ 3 (rechtslinear/regulär). Grammatik z.B.:

$$\begin{aligned} P \quad = \{ \quad & S \to bB \\ & B \to bB \\ & B \to aA \\ & A \to aA \\ & A \to \varepsilon\} \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} P \quad = \{ \quad & S \to bS \\ & S \to bA \\ & A \to aA \\ & A \to a\} \end{aligned}$$

(Platz für Aufgabe 2)

Aufgabe 3 (3+2+4+2 Punkte)
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Sei $L_{4a} = \{w_1 c w_2 | w_1, w_2 \in \{a, b\}^*, |w_1|_a = |w_2|_a\}$.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $\mathcal{L}(G) = L_{4a}$ an. Verwenden Sie hierzu möglichst wenige Nichtterminalsymbole.

b) Bestimmen Sie, welche der folgenden Wörter in L_{4a} sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.

   b1) *abcbab*

   b2) *baacaac*

   b3) *cbb*

c) Zeigen Sie (durch Angabe eines geeigneten endlichen Automaten oder regulären Ausdrucks) oder widerlegen Sie (mittels Pumping-Lemma): L_{4a} ist regulär.

d) Gegeben die zu L_{4a} ähnliche Sprache $L_{4b} = \{w_1 c w_2 | w_1, w_2 \in \{a, b\}^*, |w_1|_b = |w_2|_b\}$. Gelten folgende Aussagen?

   d1) $L_{4a} \cup L_{4b}$ *ist regulär.*

   d2) $L_{4a} \cap L_{4b}$ *ist kontextfrei.*

   Begründen Sie ihre Entscheidung kurz. Ein vollständiger Beweis ist nicht notwendig.

Lösung:

a) $G = (N, \Sigma, P, S)$ mit

   – $N = \{S\}$
   – $P = \{S \to aSa | bS | Sb | c\}$

b1) $S \Rightarrow Sb \Rightarrow aSab \Rightarrow abSab \Rightarrow abSbab \Rightarrow abcbab \in L_4$ (1P)

b2) $baacaac \notin L_4$, kein zweites c ableitbar (0,5P)

b3) $S \Rightarrow Sb \Rightarrow Sbb \Rightarrow cbb$ (0,5P)

c) L_4 ist nicht regulär.

   Sei $k \in \mathbb{N}$. Wähle $s = a^k c a^k$. Weiter wie bei $a^n b^n$ ($uv = a^i$, also $v = a^j, j > 0$, dann $uv^2w = a^{k+j} c a^k \notin L_4$).

d) d1) Gilt nicht, man müsste trotzdem eines von beiden zählen (a oder b), was mit einem endlichen Automaten nicht möglich ist (bzw. Pumping Lemma stattdessen mit $s = a^k c a^k b$, Resultat in keiner der beiden Sprachen)

   d2) Gilt nicht, man müsste zwei Dinge zählen (a und b), mit Stackautomat nicht möglich (oder Pumping anhand $s = a^k b^k c a^k b^k$ - Beweis natürlich nicht gefragt)

(Platz für Aufgabe 3)

Aufgabe 4 (1+8+2 Punkte)
Betrachten Sie den Automaten A_3.

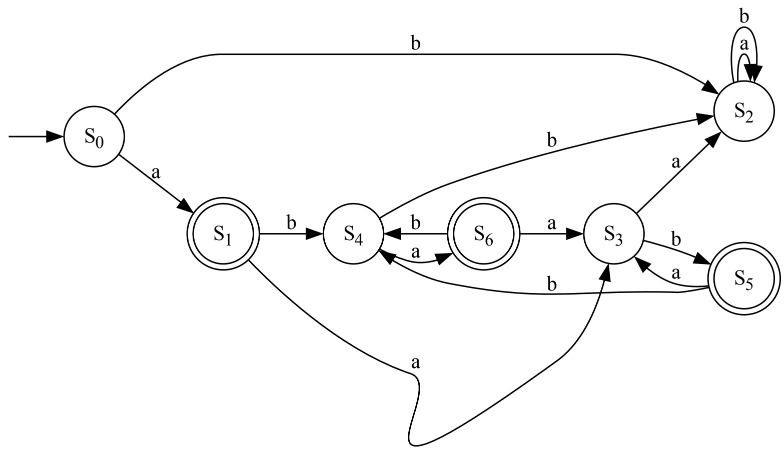


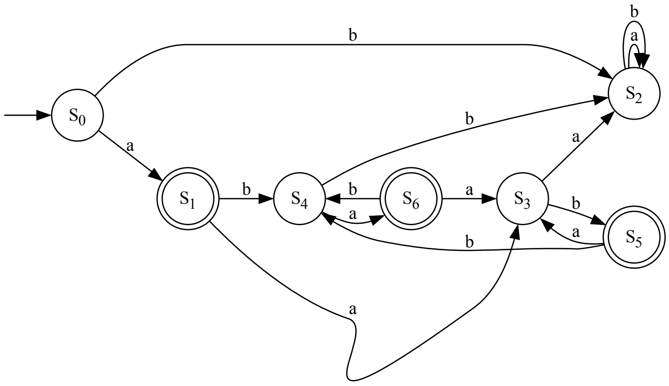
Abbildung 1: Automat A_3

a) Stellen Sie den Automaten in tabellarischer Form dar.

b) Minimieren Sie den Automaten mit dem in der Vorlesung beschriebenen Verfahren. Sie können die auf der nächsten Seite abgedruckte Tabelle nutzen. Geben Sie das Ergebnis in graphischer Form an.

c) Beschreiben Sie $L(A_3)$ formal als Menge oder durch Angabe eines regulären Ausdrucks.

(Platz für Aufgabe 3)

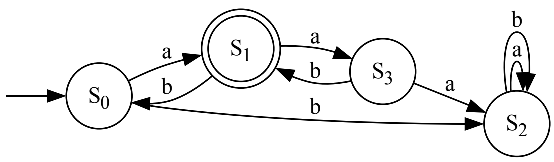


	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
S_0	$=$						
S_1		$=$					
S_2			$=$				
S_3				$=$			
S_4					$=$		
S_5						$=$	
S_6							$=$

Lösung:

a)
```
         |   a    b
--------------------
->    S0 |   S1   S2
   *  S1 |   S3   S4
      S2 |   S2   S2
      S3 |   S2   S5
      S4 |   S6   S2
   *  S5 |   S3   S4
   *  S6 |   S3   S4
```

b)
```
# Adding (S3, S4) to V because delta(S3,a)=S2, delta(S4,a)=S6, and (S2,S6) in V
# Adding (S2, S3) to V because delta(S2,b)=S2, delta(S3,b)=S5, and (S2,S5) in V
# Adding (S0, S2) to V because delta(S0,a)=S1, delta(S2,a)=S2, and (S1,S2) in V
# Adding (S0, S3) to V because delta(S0,a)=S1, delta(S3,a)=S2, and (S1,S2) in V
# Adding (S2, S4) to V because delta(S2,a)=S2, delta(S4,a)=S6, and (S2,S6) in V
# Merging S5 into S1
# Merging S4 into S0
# Merging S6 into S1
# S5 already removed
# +---+---+---+---+---+---+---+---+
# |   | S0| S1| S2| S3| S4| S5| S6|
# +---+---+---+---+---+---+---+---+
# | S0| = | 0 | 1 | 1 | = | 0 | 0 |
# +---+---+---+---+---+---+---+---+
# | S1| 0 | = | 0 | 0 | 0 | = | = |
# +---+---+---+---+---+---+---+---+
# | S2| 1 | 0 | = | 1 | 1 | 0 | 0 |
# +---+---+---+---+---+---+---+---+
# | S3| 1 | 0 | 1 | = | 1 | 0 | 0 |
# +---+---+---+---+---+---+---+---+
# | S4| = | 0 | 1 | 1 | = | 0 | 0 |
# +---+---+---+---+---+---+---+---+
# | S5| 0 | = | 0 | 0 | 0 | = | = |
# +---+---+---+---+---+---+---+---+
# | S6| 0 | = | 0 | 0 | 0 | = | = |
# +---+---+---+---+---+---+---+---+
```



c) $L(A_3) = L(a(ab + ba)^*)$

Aufgabe 5 (1+3+6 Punkte)
Betrachten Sie den nichtdeterministischen endlichen Automaten (NFA) A_5 über $\Sigma = \{a, b\}$ in Abbildung 2.

a) Geben Sie einen Lauf (*run*) des Automaten A_5 auf der Eingabe *abaa* an, bei dem das Wort akzeptiert wird.

b) Geben Sie eine formale Beschreibung von $L(A_5)$ als Menge und einen regulären Ausdruck r mit $L(r) = L(A_5)$ an.

c) Konvertieren Sie A_5 mit dem in der Vorlesung angegebenen Verfahren in einen deterministischen endlichen Automaten (DFA). Geben Sie das Ergebnis tabellarisch und graphisch an.

(Der Automat ist auf der nächsten Seite noch einmal abgebildet, falls Sie mehr als eine Seite benötigen.)

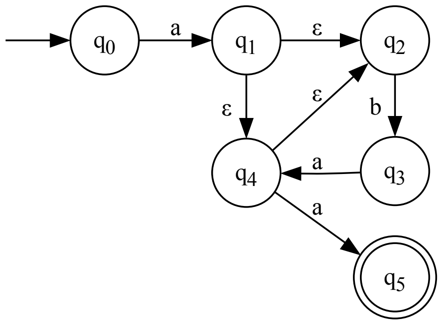
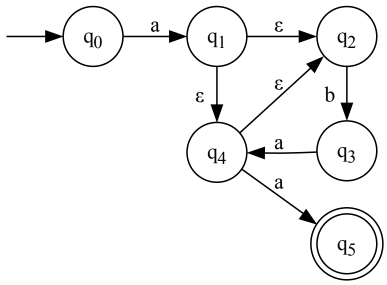


Abbildung 2: Automat A_5

(Platz für Aufgabe 5)



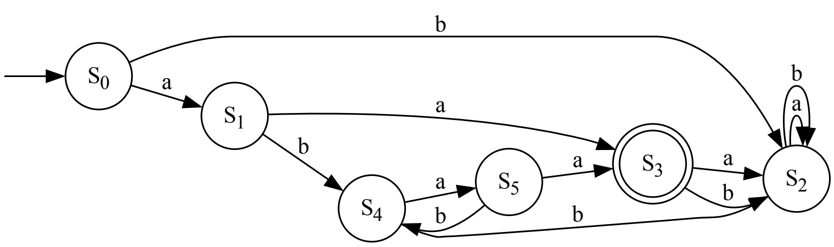
Lösung:

a) – $(q_0, abaa), (q_1, baa), (q_2, baa), (q_3, aa), (q_4, a), (q_5, \varepsilon)$ (akzeptierend)

b) $L(A_5) = \{a(ba)^n a \mid n \in \mathbb{N}\} = L(a(ba)^* a)$. 2P für Menge, 1P für RA.

c) 1P pro Zustand, 1P für Tabelle, 1P für Graphik

```
# S0 = frozenset(['q0'])
# Delta(S0, a) =  frozenset(['q1', 'q2', 'q4'])
# S1  =  frozenset(['q1', 'q2', 'q4'])
# Delta(S0, b) =  frozenset([])
# S2  =  frozenset([])
# Delta(S1, a) =  frozenset(['q5'])
# S3  =  frozenset(['q5'])
# Delta(S1, b) =  frozenset(['q3'])
# S4  =  frozenset(['q3'])
# Delta(S2, a) =  frozenset([])
# State is equal to  S2
# Delta(S2, b) =  frozenset([])
# State is equal to  S2
# Delta(S3, a) =  frozenset([])
# State is equal to  S2
# Delta(S3, b) =  frozenset([])
# State is equal to  S2
# Delta(S4, a) =  frozenset(['q2', 'q4'])
# S5  =  frozenset(['q2', 'q4'])
# Delta(S4, b) =  frozenset([])
# State is equal to  S2
# Delta(S5, a) =  frozenset(['q5'])
# State is equal to  S3
# Delta(S5, b) =  frozenset(['q3'])
# State is equal to  S4
          |    a    b
---------------------
->    S0 |   S1   S2
      S1 |   S3   S4
      S2 |   S2   S2
   *  S3 |   S2   S2
      S4 |   S5   S2
      S5 |   S3   S4
```



Aufgabe 6 (1+2+2+3 Punkte)
Betrachten Sie den Automaten A_6 in tabellarischer Form:

$A_6 : \delta$		a	b
$\rightarrow$	0	1	2
	1	3	0
	2	2	2
$*$	3	2	2

a) Geben Sie die Zustandsmenge Q, das Alphabet Σ, die Menge der akzeptierenden Zustände F und den Startzustand q_0 an.

b) Stellen Sie den Automaten in graphischer Form dar.

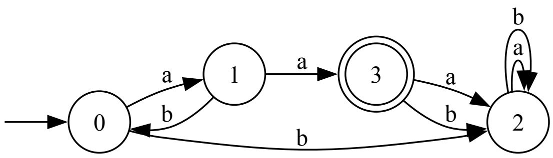
c) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, das die an den verschiedenen Zuständen akzeptierten Sprachen beschreibt.

d) Lösen Sie dieses Gleichungssystem und geben Sie so einen regulären Ausdruck an, der die von A_6 akzeptierte Sprache beschreibt. Vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich.

Lösung:

a) (0.25P pro Teil, auf halbe Punkte gerundet) $Q = \{0, 1, 2, 3\}, \Sigma = \{a, b\}, F = \{3\}, q_0 = 0$

b) (2P)



c) (1/2P pro Gleichung)

- $L_0 = aL_1 + bL_2$
- $L_1 = aL_3 + bL_0$
- $L_2 = aL_2 + bL_2$
- $L_3 = aL_2 + bL_2 + \varepsilon$

d) (Je 1/2 P für L_2, L_3, je 1P für L_0, L_1).

$$
\begin{array}{rcll}
L_2 & = & aL_2 + bL_2 & \\
& = & (a+b)L_2 + \emptyset & \\
& = & (a+b)^*\emptyset & \text{Arden} \\
& = & \emptyset & \\
L_3 & = & aL_2 + bL_2 + \varepsilon & \\
& = & a\emptyset + b\emptyset + \varepsilon & \text{Einsetzen } L_2 \\
& = & \varepsilon & \\
L_1 & = & aL_3 + bL_0 & \\
& = & a + bL_0 & \text{Einsetzen } L_3 \\
L_0 & = & aL_1 + bL_2 & \\
& = & aL_1 & \text{Einsetzen } L_2,\ \text{Vereinfachen} \\
& = & a(a + bL_0) & \text{Einsetzen } L_1 \\
& = & aa + abL_0 & \\
& = & abL_0 + aa & \\
& = & (ab)^*aa & \text{Arden}
\end{array}
$$

(Platz für Aufgabe 6)

Aufgabe 7 (3+2+3+1 Punkte)

a) Gegeben sei die Grammatik $G_{7a} = (N, \Sigma_{\mathtt{ab}}, P, S)$ mit $N = \{S, A, B, C\}$ und P wie folgt:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & AB|a \\ A & \rightarrow & aA|B|CC \\ B & \rightarrow & bB|\varepsilon|C \\ C & \rightarrow & aa|b \end{array}$$

Transformieren Sie G_{7a} mit dem in der Vorlesung gezeigten Verfahren in eine äquivalente ε-freie Grammatik. Geben Sie die für die Transformation berechneten Mengen an.

Lösung:

```
E =  set(['A', 'S', 'B'])
Adding:  B->b
Adding:  S->B
Adding:  S->A
Adding:  A->a
Adding:  Z->S
Adding:  Z->-
Result:
A->B
A->CC
A->a
A->aA
B->C
B->b
B->bB
C->aa
C->b
S->A
S->AB
S->B
S->a
Z->-
Z->S
```

b) Gegeben sei die Grammatik $G_{7b} = (N, \Sigma_{\texttt{ab}}, P, S)$ mit $N = \{S, A, B, C\}$ und P wie folgt:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & A|aA|C \\ A & \rightarrow & aC|B|S \\ B & \rightarrow & SC|AS \\ C & \rightarrow & a|b \end{array}$$

Transformieren Sie G_{7b} mit dem in der Vorlesung gezeigten Verfahren in eine äquivalente Grammatik ohne Kettenregeln. Geben Sie die für die Transformation berechneten Mengen an.

Lösung:

```
A->AS
A->SC
A->a
A->aA
A->aC
A->b
B->AS
B->SC
C->a
C->b
S->AS
S->SC
S->a
S->aA
S->aC
S->b
```

c) Gegeben sei die Grammatik $G_{7c} = (N, \Sigma_{\texttt{ab}}, P, S)$ mit $N = \{S, A, B, C, D, E\}$ und P wie folgt:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & AB|DD|a \\ A & \rightarrow & CC|AB|EE \\ B & \rightarrow & aB|aC \\ C & \rightarrow & bB|bC \\ D & \rightarrow & aDb|Sb \\ E & \rightarrow & aa|bb \end{array}$$

Reduzieren Sie G_{7c} mit dem in der Vorlesung gezeigten Verfahren. Geben Sie die für die Transformation berechneten Mengen an.

Lösung:

```
Removing Non-Terminating:
Removing  C->bC
Removing  B->aC
Removing  S->AB
Removing  B->aB
Removing  C->bB
Removing  A->AB
Removing  A->CC
Result:
A->EE
D->Sb
D->aDb
E->aa
E->bb
S->DD
S->a

Removing Non-reachable:
Removing  A->EE
Removing  E->aa
Removing  E->bb
Result:
D->Sb
D->aDb
S->DD
S->a
```

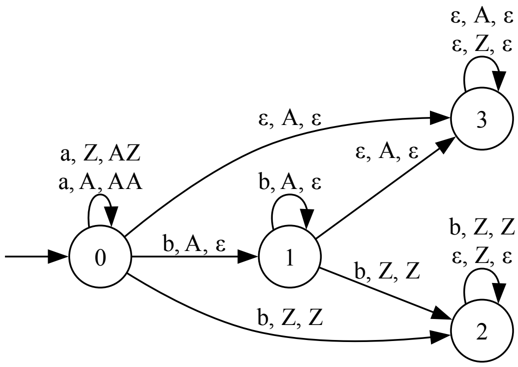
d) Welche der Regeln in Ihrer Antwort für Aufgabenteil c) sind noch nicht in Chomsky-Normalform? (Sie müssen nur die Regeln angeben, nicht die Transformation durchführen.)

Lösung:

```
D->Sb
D->aDb
```

Aufgabe 8 (4+6+1 Punkte)
Gegeben seien das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ und der Kellerautomat (PDA) $A_8 = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, 0, Z)$ mit $Q = \{0, 1, 2, 3\}$, $\Gamma = \{A, Z\}$ und Δ wie folgt:

0,	a,	Z	$\to$	AZ,	0
0,	a,	A	$\to$	AA,	0
0,	b,	Z	$\to$	Z,	2
0,	b,	A	$\to$	ε,	1
0,	ε,	A	$\to$	ε,	3
1,	b,	A	$\to$	ε,	1
1,	b,	Z	$\to$	Z,	2
1,	,	A	$\to$	ε,	3
2,	b,	Z	$\to$	Z,	2
2,	ε,	Z	$\to$	ε,	2
3,	ε,	A	$\to$	ε,	3
3,	ε,	Z	$\to$	ε,	3



a) Geben Sie für die Wörter $w_1 = aabb$, $w_2 = bbbb$ und $w_3 = aaab$ jeweils einen Lauf von A_8 an, bei dem das gesamte Wort gelesen wird, und bestimmen Sie, ob das Wort zu $\mathcal{L}(A_8)$ gehört.

b) Beschreiben Sie $\mathcal{L}(A_8)$ formal als Menge.

c) Ist A_8 deterministisch? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

a) w_1: $((0, aabb, Z), (0, abb, AZ), (0, bb, AAZ), (1, b, AZ), (1, \varepsilon, Z))$ $\rightsquigarrow$ nicht akzeptiert (keine Transition, Stack nicht leer)

w_2: $((0, bbbb, Z), (2, bbb, Z), (2, bb, Z), (2, b, Z), (2, \varepsilon, Z), (2, \varepsilon, \varepsilon))$ $\rightsquigarrow$ akzeptiert

w_3: $((0, aaab, Z), (0, aab, AZ), (0, ab, AAZ), (0, b, AAAZ), (1, \varepsilon, AAZ), (3, \varepsilon, AZ), (3, \varepsilon, Z), (3, \varepsilon, \varepsilon))$ $\rightsquigarrow$ akzeptiert

b) $\mathcal{L}(A_8) = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$.

c) Nichtdeterministisch, z.B. in Konfiguration $(0, b, A)$ oder $(2, b, Z)$.

(Platz für Aufgabe 8)

Aufgabe 9 (4+5+2 Punkte)
Betrachten Sie die Grammatik $G_9 = (\{S, E, G, J, M, O, P, T, Z\}, \{g, o, m, n, s\}, P, S)$ mit

$$P = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \to & ZE \\ S & \to & ZJ \\ S & \to & ZT \\ S & \to & s \\ E & \to & TJ \\ G & \to & g \\ G & \to & n \\ J & \to & o \\ M & \to & SM \\ M & \to & m \\ O & \to & o \\ P & \to & OG \\ T & \to & OG \\ T & \to & SM \\ T & \to & TM \\ T & \to & TP \\ T & \to & m \\ Z & \to & s \end{array} \right\}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des CYK-Algorithmus, ob die folgenden Wörter in $L(G_9)$ enthalten sind:

a) $w_1 = smogon$

b) $w_2 = smogmog$ (Tabelle auf der nächsten Seite)

c) Geben Sie anhand des Ergebnisses aus Teil b) an, für welche Teilwörter von *smogmog* Sie aus der Tabelle ablesen können, dass sie in $L(G_9)$ enthalten sind. Begründen Sie ihre Antwort.

Tabelle für Teil a)

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						
$w_2 =$	s	m	o	g	o	n

Ist $w_1 \in L(G_9)$? Ja $\square$ Nein $\square$

$$P = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \to & ZE \\ S & \to & ZJ \\ S & \to & ZT \\ S & \to & s \\ E & \to & TJ \\ G & \to & g \\ G & \to & n \\ J & \to & o \\ M & \to & SM \\ M & \to & m \\ O & \to & o \\ P & \to & OG \\ T & \to & OG \\ T & \to & SM \\ T & \to & TM \\ T & \to & TP \\ T & \to & m \\ Z & \to & s \end{array} \right\}$$

Tabelle für Teil b)

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
$w_2 =$	s	m	o	g	m	o	g

Ist $w_2 \in L(G_9)$? Ja □ Nein □

Lösung:

a)

	1	2	3	4	5	6
1	Z,S	T,M,S	E,S	T,S	E,S	T,S
2		T,M	E	T	E	T
3			J,O	T,P	E	T
4				G	-	-
5					J,O	T,P
6						G
w	s	m	o	g	o	n

Also: smogon ist in L(G9)

Lösung:

b)

	1	2	3	4	5	6	7
1	Z,S	T,M,S	E,S	T,S	T,M,S	E,S	T,S
2		T,M	E	T	T	E	T
3			J,O	T,P	T	E	T
4				G	-	-	-
5					T,M	E	T
6						J,O	T,P
7							G
w	s	m	o	g	m	o	g

Also: smogmog ist in L(G9)

c) Alle Teilwörter, bei denen S ausgefüllt wurde, also {s, sm, smo, smog, smogm, smogmo}. Funktioniert, da der CYK-Algorithmus auf dynamischer Programmierung basiert.

Anmerkung: Hier lässt sich durch die Wiederholung von smog und mog eine Menge Arbeit sparen, wenn man die dynamische Programmierung verstanden hat. Daher 2 Punkte weniger für den eigentlichen Algorithmus als im Vorjahr.

Ende