

Bitte die Blätter nicht trennen!

Matrikelnummer:	
 ÜBUNGSKLAUSUR	Fakultät: Technik
	Studiengang: Informatik
	Jahrgang / Kurs : TINF24ITA
	Studienhalbjahr: 3. Semester
Datum: 20. November 2025	Bearbeitungszeit: 90 Minuten
Modul: T2INF2002	Dozent: Schulz
Unit: Formale Sprachen und Automaten	
Hilfsmittel: Zwei beliebige Papierwerke, Skript auch auf Tablet im Flugmodus	

Aufgabe	Thema	gesamt
1	Reguläre Sprachen	8
2	Chomsky-Hierarchie	10
3	KFG und Pumping-Lemma	11
4	DFA-Minimierung	11
5	NFA und DFA	10
6	REs aus DFA	8
7	Chomsky-NF	9
8	Stackautomat	10
9	CYK	12
Summe		89

1. Sind Sie gesund und prüfungsfähig?
2. Sind Ihre Taschen und sämtliche Unterlagen, insbesondere alle nicht erlaubten Hilfsmittel, seitlich an der Wand zum Gang hin abgestellt und nicht in Reichweite des Arbeitsplatzes?
3. Haben Sie auch außerhalb des Klausorraumes im Gebäude keine unerlaubten Hilfsmittel oder ähnliche Unterlagen liegen lassen?
4. Haben Sie Ihr Handy ausgeschaltet und abgegeben?

(Falls Ziff. 2 oder 3 nicht erfüllt sind, liegt ein Täuschungsversuch vor, der die Note „nicht ausreichend“ zur Folge hat.)

Aufgabe 1 (1+4+3 Punkte)

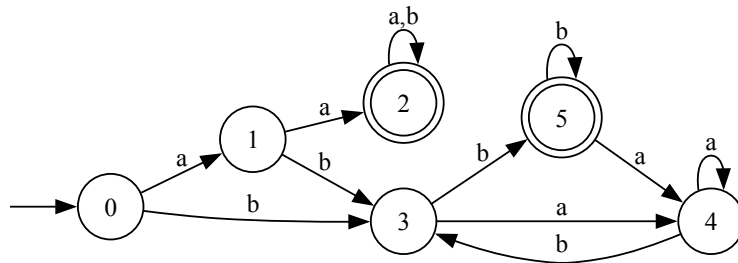
Betrachten Sie das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ und die Sprache

$$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ beginnt mit } aa \text{ oder endet mit } bb\}$$

- Geben Sie einen regulären Ausdruck r mit $L(r) = L_1$ an.
- Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten A mit $L(A) = L_1$ in graphischer Darstellung an.
- Geben Sie eine rechts-lineare Grammatik G mit $L(G) = \{wbb \mid w \in \Sigma^*\}$ an.

Lösung:

a) $r = aa(a+b)^* + (a+b)^*bb$



b)

c) $G = (N, \Sigma, P, S)$ mit $N = \{S, B\}$ und

P :

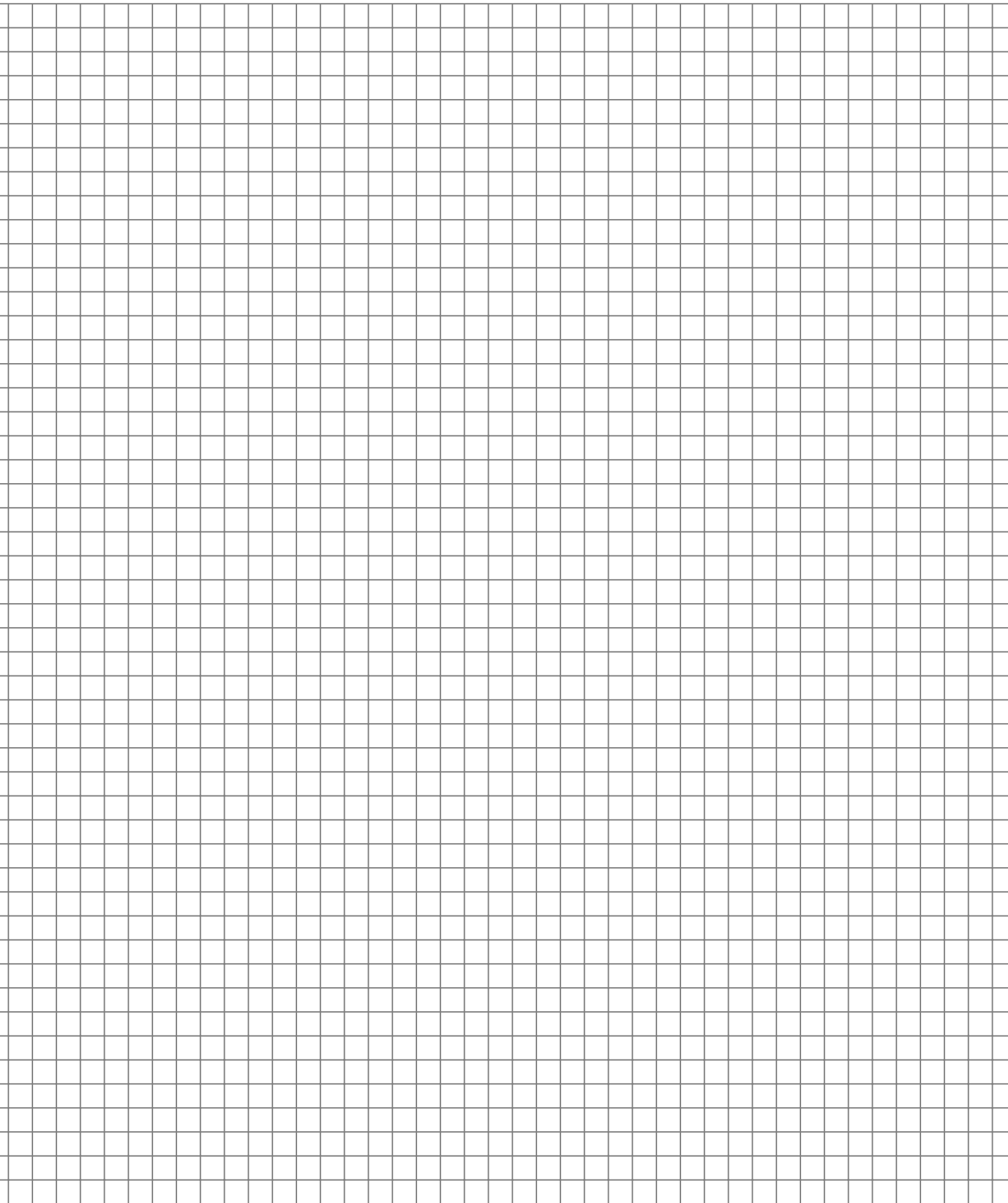
$$S \rightarrow aS$$

$$S \rightarrow bS$$

$$S \rightarrow bB$$

$$B \rightarrow b$$

(Platz für Aufgabe 1)



Aufgabe 2 (2+3+3+2 Punkte)

Betrachten Sie die Grammatik $G_1 = (N, \Sigma, P, S)$ mit $N = \{S, A, B\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und folgenden Produktionen:

$$P = \left\{ \begin{array}{ll} S & \rightarrow ASA|ABBA \\ AA & \rightarrow aA|Aa \\ AB & \rightarrow a|ABB \\ BA & \rightarrow a|BBA \\ B & \rightarrow b \end{array} \right\}$$

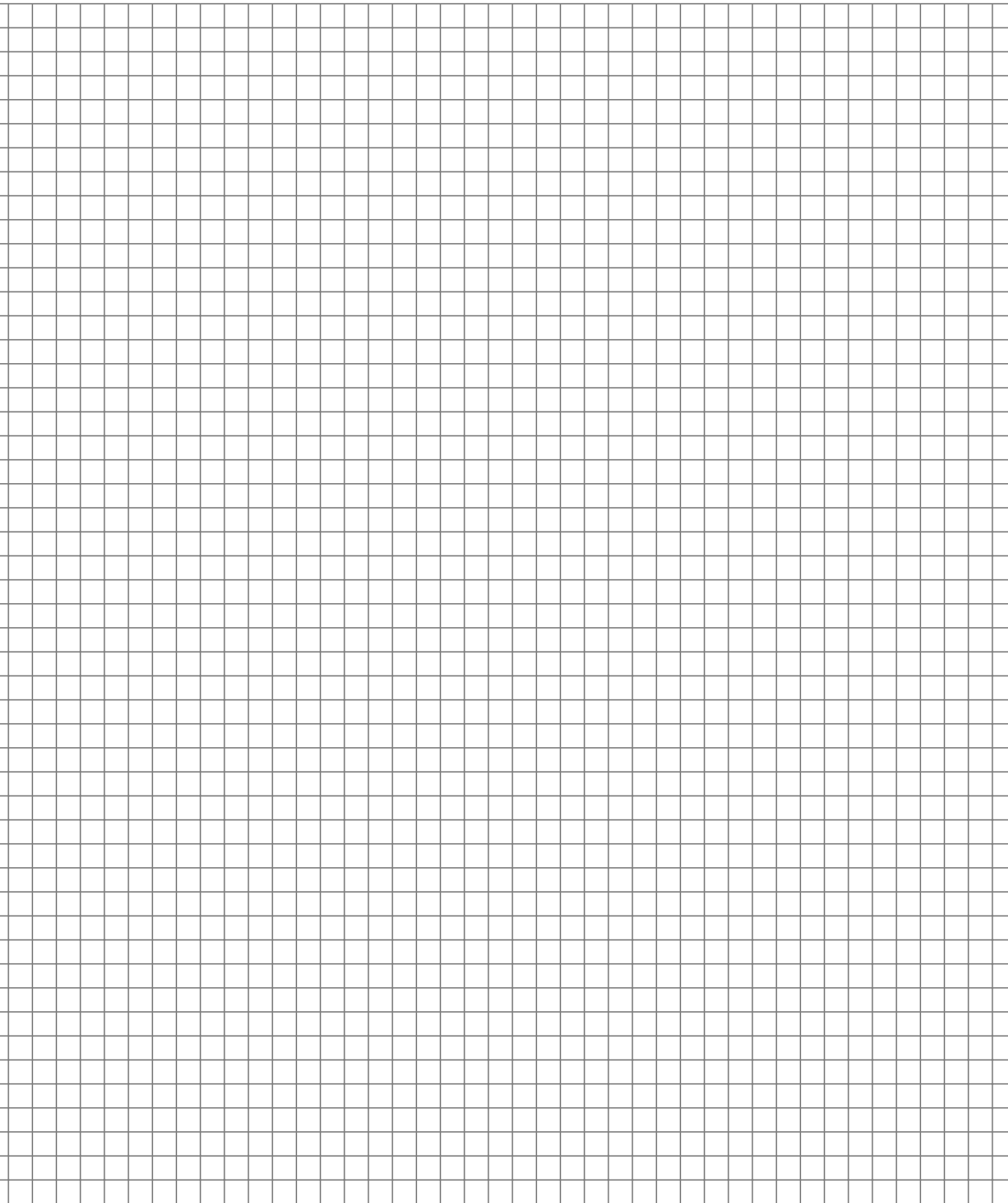
- Welcher ist der maximale Typ der *Grammatik* (in der Chomsky-Hierarchie)? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Welche der Wörter *abba*, *aabaa*, *aabba* und *aaa* sind ableitbar? Geben Sie, falls möglich, eine Ableitung des jeweiligen Wortes an.
- Geben Sie die von G_1 erzeugte Sprache formal als Menge an.
- Welcher ist der maximale Typ dieser *Sprache* (in der Chomsky-Hierarchie)? Geben Sie eine äquivalente Grammatik mit dem maximal möglichen Typ an.

Lösung:

- Typ 0. Nicht Typ 2 oder 3, weil komplexe linke Seiten vorkommen. Nicht Typ 1, weil z.B. $AB \rightarrow a$ verkürzend ist. (2 P)
- $S \Rightarrow ABBA \Rightarrow ABBBA \Rightarrow ABBBBBA \Rightarrow aBBBBA \Rightarrow aBBa \Rightarrow abBa \Rightarrow abba$ (1P)
 - $S \Rightarrow ASA \Rightarrow AABBA \Rightarrow AABBBAA \Rightarrow aABBBAA \Rightarrow aaBBAA \Rightarrow aabBAA \Rightarrow aabBAa \Rightarrow aabaa$ (1P)
 - nicht ableitbar (0,5P)
 - nicht ableitbar (0,5P)
- $L(G_1) = \{a^n b^m a^n \mid n \in \mathbb{N}^+, m \in \mathbb{N}\}$
- Typ 2 (kontextfrei). Grammatik z.B.:

$$P = \left\{ \begin{array}{ll} S & \rightarrow aSa|aBa \\ B & \rightarrow bB|\varepsilon \end{array} \right\}$$

(Platz für Aufgabe 2)



Aufgabe 3 (3+2+3+3 Punkte)

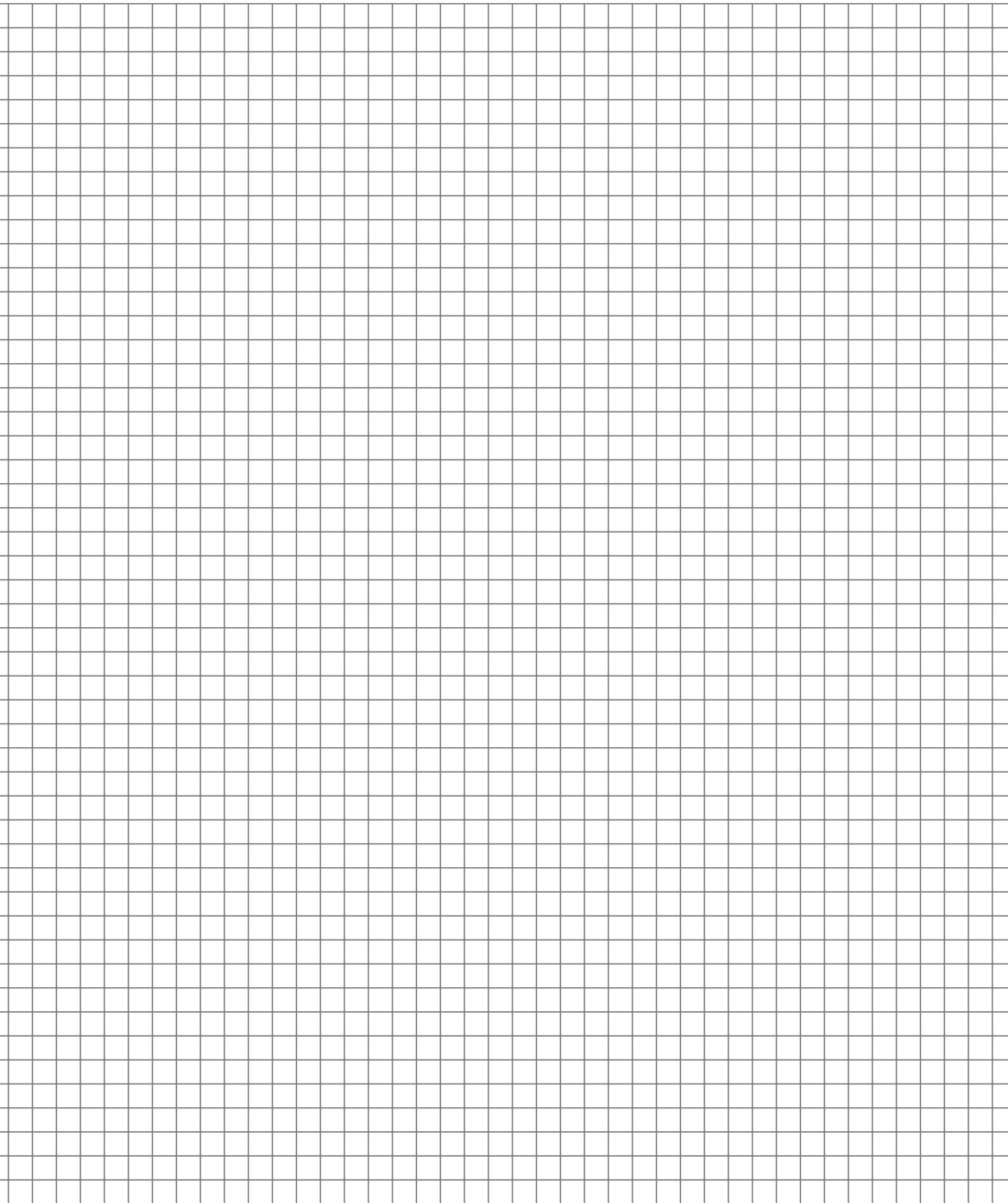
Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Sei $L_{4a} = \{v \cdot w \mid |v|_a = |w|_a\}$, d.h. die Sprache aller Wörter, die sich in zwei Teile (nicht notwendigerweise Hälften) zerlegen lassen, so dass der erste Teil gleich viele Vorkommen von a enthält wie der zweite.

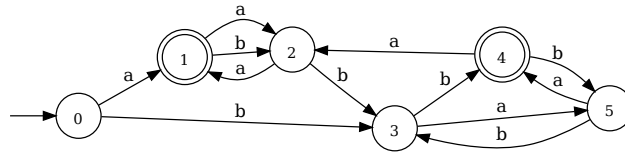
- a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $\mathcal{L}(G) = L_{4a}$ an. Verwenden Sie hierzu möglichst wenige Nichtterminalsymbole.
- b) Bestimmen Sie, welche der folgenden Wörter in L_{4a} sind. Geben Sie im positiven Fall eine Ableitung in G an.
 - b1) $baaba$
 - b2) $ababaa$
 - b3) baa
- c) Zeigen Sie (durch Angabe eines geeigneten endlichen Automaten oder regulären Ausdrucks) oder widerlegen Sie (mittels Pumping-Lemma): L_{4a} ist regulär.
- d) Gegeben die zu L_{4a} ähnliche Sprache $L_{4b} = \{v \cdot w \mid |v|_a = |w|_a \text{ und } |v| = |w|\}$, d.h. es wird zusätzlich gefordert, dass die beiden Teilwörter dieselbe Länge haben. Welcher ist der maximale Typ von L_{4b} in der Chomsky-Hierarchie?
Begründen Sie ihre Antwort kurz. Ein formaler Beweis ist nicht notwendig.

Lösung:

- a) $G = (N, \Sigma, P, S)$ mit
 - $N = \{S\}$
 - $P = \{S \rightarrow aSa \mid bS \mid Sb \mid \varepsilon\}$
- b1) nicht ableitbar (0,5 P)
- b2) $S \rightarrow aSa \rightarrow abSa \rightarrow abaSaa \rightarrow ababSaa \rightarrow ababaa$ (0,5P)
- b3) $S \Rightarrow bS \Rightarrow baSa \Rightarrow baa$ (0,5P)
- c) L_4 ist regulär; sie ist die Sprache aller Wörter, die eine gerade Anzahl a enthalten.
RA: $(b^*ab^*ab^*)^*$
DEA braucht 2 Zustände.
- d) Die Sprache ist vom Typ 1. Sie ist nicht mit einem KA erkennbar, da man zwei Zähler benötigt (Anzahl a und Anzahl aller Buchstaben). Eine KFG kann nicht gleichzeitig gleiche Länge und gleiche Anzahl a sicherstellen; hierzu sind kontextsensitive Regeln notwendig.

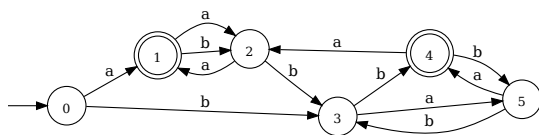
(Platz für Aufgabe 3)



Aufgabe 4 (1+8+2 Punkte)Betrachten Sie den Automaten A_d .Abbildung 1: Automat A_d

- a) Stellen Sie den Automaten in tabellarischer Form dar.
- b) Minimieren Sie den Automaten mit dem in der Vorlesung beschriebenen Verfahren. Sie können die auf der nächsten Seite abgedruckte Tabelle nutzen. Geben Sie das Ergebnis in graphischer Form an.
- c1) Geben Sie das kürzeste Wort in $L(A_d)$ an.
- c2) Geben Sie das zweitkürzeste Wort in $L(A_d)$ an.

(Platz zum Bearbeiten)



	0	1	2	3	4	5
0	=					
1		=				
2			=			
3				=		
4					=	
5						=

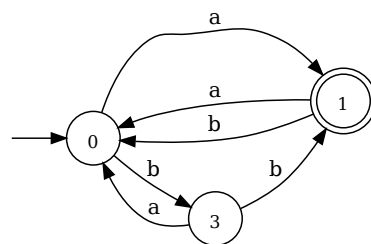
Lösung:

a)

		a	b
->	0	1	3
*	1	2	2
	2	1	3
	3	5	4
*	4	2	5
	5	4	3

- b)
- # Adding (3, 5) to V because $\text{delta}(3,a)=5$, $\text{delta}(5,a)=4$, and (5,4) in V
 - # Adding (0, 3) to V because $\text{delta}(0,a)=1$, $\text{delta}(3,a)=5$, and (1,5) in V
 - # Adding (2, 3) to V because $\text{delta}(2,a)=1$, $\text{delta}(3,a)=5$, and (1,5) in V
 - # Merging 5 into 0
 - # Merging 4 into 1
 - # Merging 2 into 0
 - # 2 already removed

#	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+
#				0	1	2	3	4	5						
#	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+
#		0	o		X		o		X		X		o		
#	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+
#		1	X		o		X		X		o		X		
#	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+
#		2	o		X		o		X		X		o		
#	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+
#		3	X		X		X		o		X		X		
#	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+
#		4	X		o		X		X		o		X		
#	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+
#		5	o		X		o		X		X		o		
#	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+

c1) *a*c2) *bb*

Aufgabe 5 (2+2+6 Punkte)

Betrachten Sie den nichtdeterministischen endlichen Automaten (NFA) A_n über $\Sigma = \{0, 1\}$ in Abbildung 2.

- Finden Sie ein vom Automaten akzeptiertes Wort der Länge ≥ 3 und geben für dieses sowohl einen akzeptierenden, als auch einen nicht akzeptierenden Lauf (*run*) an.
- Geben Sie eine formale Beschreibung von $L(A_n)$ als Menge oder einen regulären Ausdruck r mit $L(r) = L(A_n)$ an.
- Konvertieren Sie A_n mit dem in der Vorlesung angegebenen Verfahren in einen deterministischen endlichen Automaten (DFA). Geben Sie das Ergebnis tabellarisch und graphisch an.

(Der Automat ist auf der nächsten Seite noch einmal abgebildet, falls Sie mehr als eine Seite benötigen.)

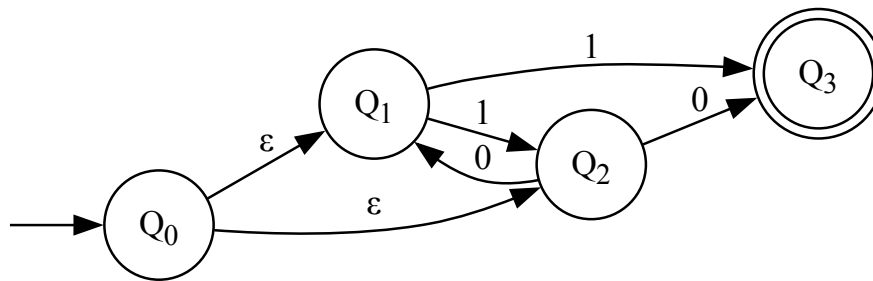
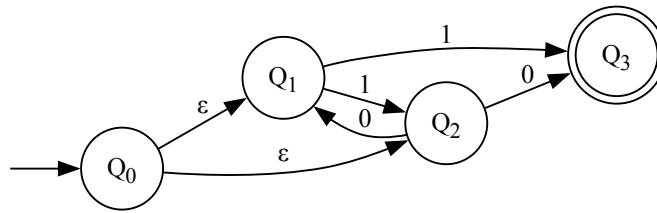


Abbildung 2: Automat A_n

(Platz zum Bearbeiten)

**Lösung:****Lösung**

a) Wort z.B. 010

- $(q_0, 010), (q_2, 010), (q_1, 10), (q_2, 0), (q_3, \varepsilon)$ (akzeptierend)
- $(q_0, 010), (q_2, 010), (q_1, 10), (q_2, 0), (q_1, \varepsilon)$ (nicht akzeptierend)

1P pro Lauf

b) $L(A_n) = \{b_1b_2 \dots b_k \in \Sigma^* \mid k \geq 1, b_i \neq b_{i+1} \forall i\} = L((01)^*(0 + 01) + (10)^*(1 + 10))$. 2P für Menge oder RA.

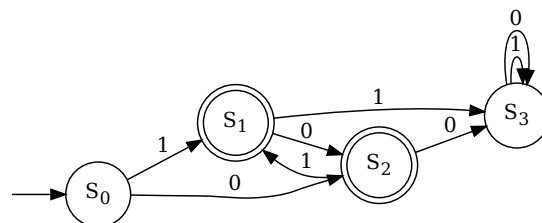
c) 1P pro Zustand, 1P für Tabelle, 1P für Graphik

```

S0 = frozenset({'Q0', 'Q2', 'Q1'})
Delta(S0, 1) = frozenset({'Q2', 'Q3'})
Delta(S0, 0) = frozenset({'Q3', 'Q1'})
Delta(S1, 1) = frozenset()
Delta(S1, 0) = frozenset({'Q3', 'Q1'})
State is equal to S2
Delta(S2, 1) = frozenset({'Q2', 'Q3'})
State is equal to S1
Delta(S2, 0) = frozenset()
State is equal to S3
Delta(S3, 1) = frozenset()
State is equal to S3
Delta(S3, 0) = frozenset()
State is equal to S3

```

		0	1
->	S0	S2	S1
*	S1	S2	S3
*	S2	S3	S1
	S3	S3	S3



Aufgabe 6 (1+1.5+1.5+4 Punkte)

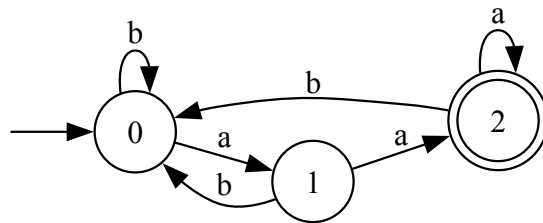
Betrachten Sie den Automaten A_6 in tabellarischer Form:

$A_6 : \delta$		a	b
$\rightarrow$	0	1	0
	1	2	0
*	2	2	0

- Geben Sie die Zustandsmenge Q , das Alphabet Σ , die Menge der akzeptierenden Zustände F und den Startzustand q_0 an.
- Stellen Sie den Automaten in graphischer Form dar.
- Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, das die an den verschiedenen Zuständen akzeptierten Sprachen beschreibt.
- Lösen Sie dieses Gleichungssystem und geben Sie so einen regulären Ausdruck an, der die von A_6 akzeptierte Sprache beschreibt. Vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich.

Lösung:

- a) (0.25P pro Teil, auf halbe Punkte gerundet) $Q = \{0, 1, 2\}, \Sigma = \{a, b\}, F = \{2\}, q_0 = 0$



- b) (1.5P)

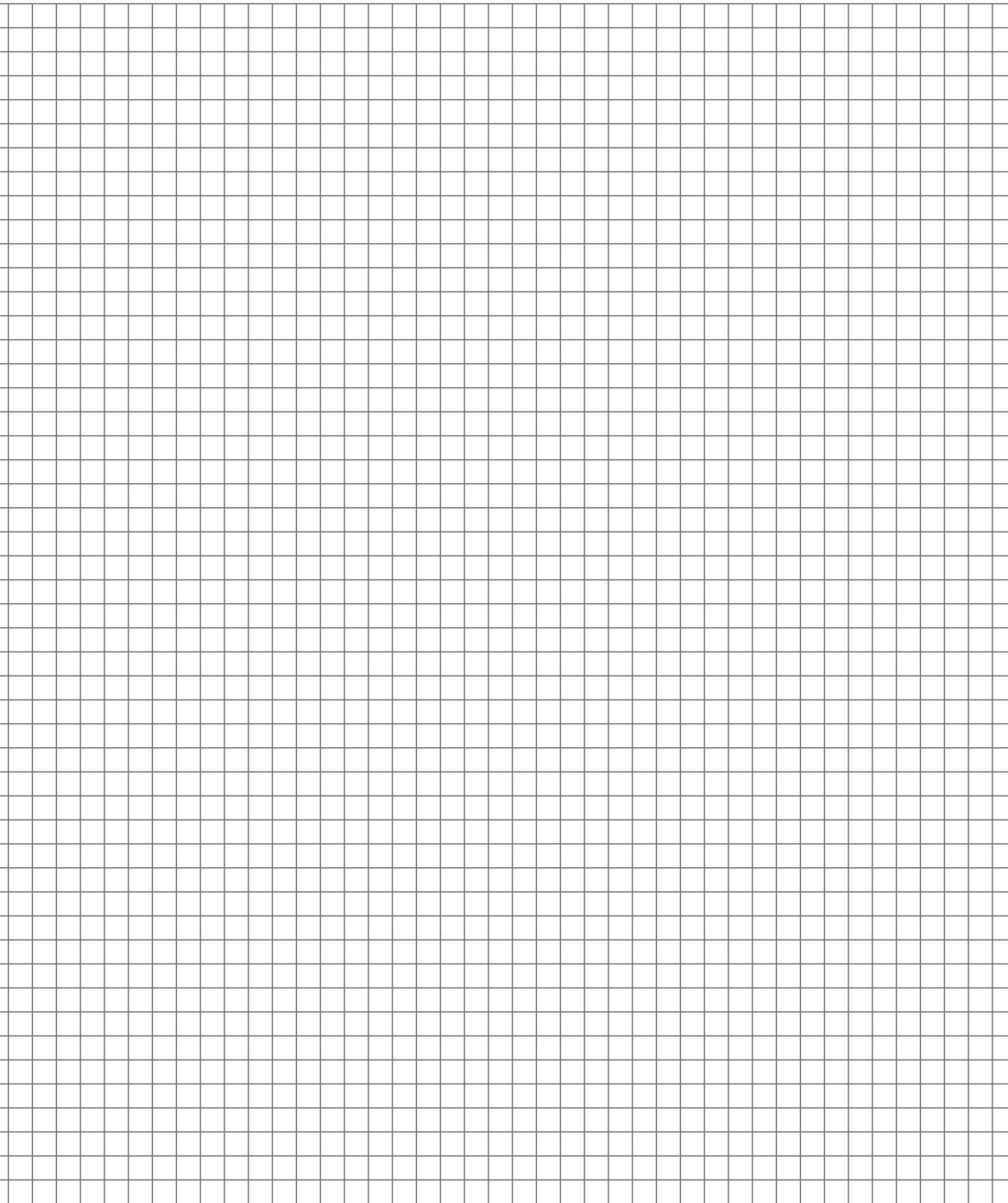
- c) (1/2P pro Gleichung)

- $L_0 = aL_1 + bL_0$
- $L_1 = aL_2 + bL_0$
- $L_2 = aL_2 + bL_0 + \varepsilon$

- d) (Je 1P für L_1, L_2 , 2P für L_0)

$$\begin{aligned}
 L_2 &= aL_2 + bL_0 + \varepsilon \\
 &= a^*(bL_0 + \varepsilon) && \text{Arden} \\
 L_1 &= aa^*(bL_0 + \varepsilon) + bL_0 && \text{Einsetzen } L_2 \\
 &= aa^*bL_0 + aa^* + bL_0 \\
 L_0 &= aaa^*bL_0 + aaa^* + abL_0 + bL_0 \\
 &= aaa^*bL_0 + abL_0 + bL_0 + aaa^* \\
 &= (aaa^*b + ab + b)L_0 + aaa^* && \text{Ausklammern } L_0 \\
 &= (aaa^*b + ab + b)^*aaa^* && \text{Arden}
 \end{aligned}$$

(Platz für Aufgabe 6)

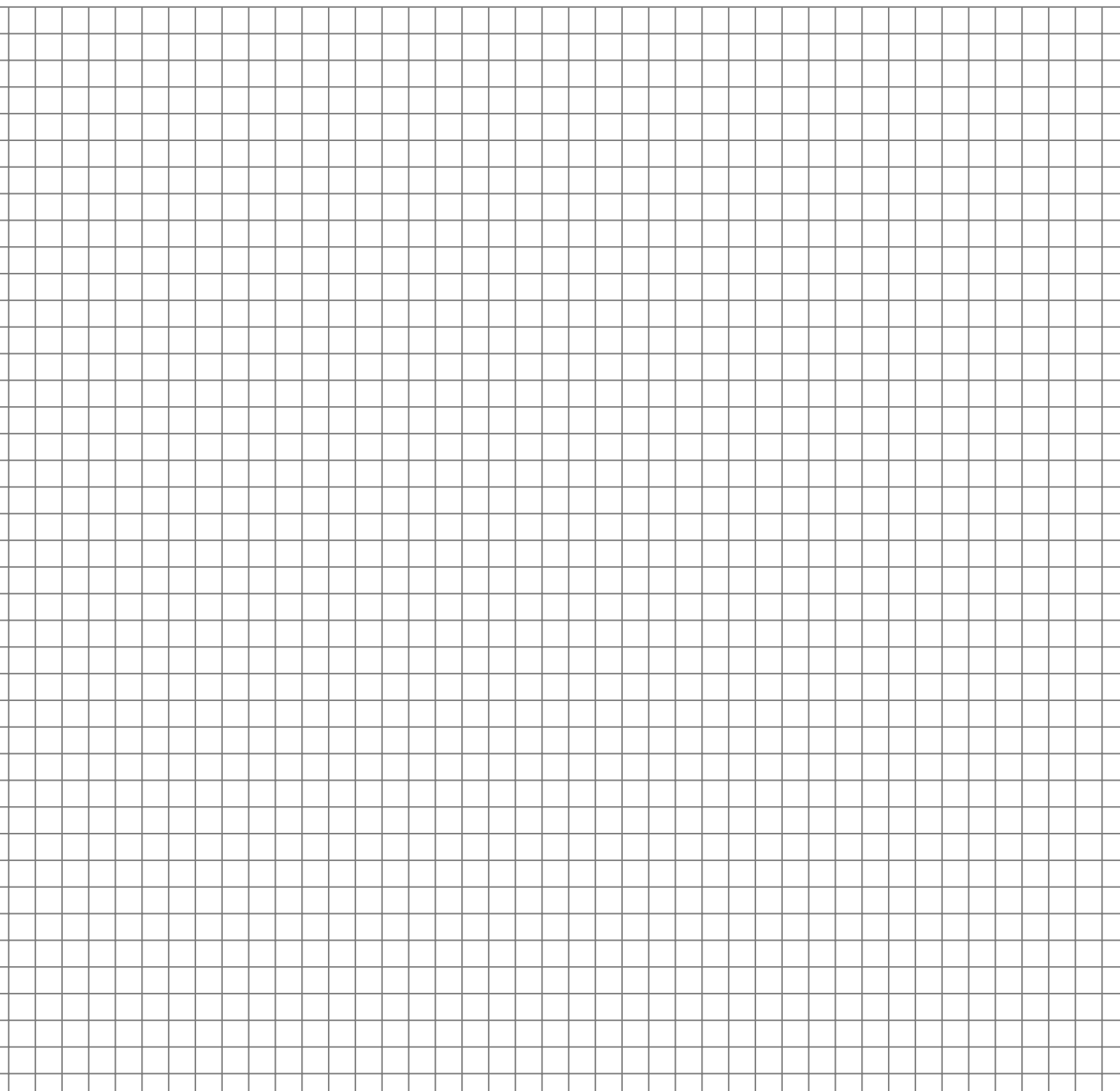


Aufgabe 7 (3+2+3+1 Punkte)

a) Gegeben sei die Grammatik $G_{7a} = (N, \Sigma_{ab}, P, S)$ mit $N = \{S, A\}$ und P wie folgt:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & AS \\ S & \rightarrow & \epsilon \\ S & \rightarrow & aSb \\ A & \rightarrow & AA \\ A & \rightarrow & \epsilon \\ A & \rightarrow & a \end{array}$$

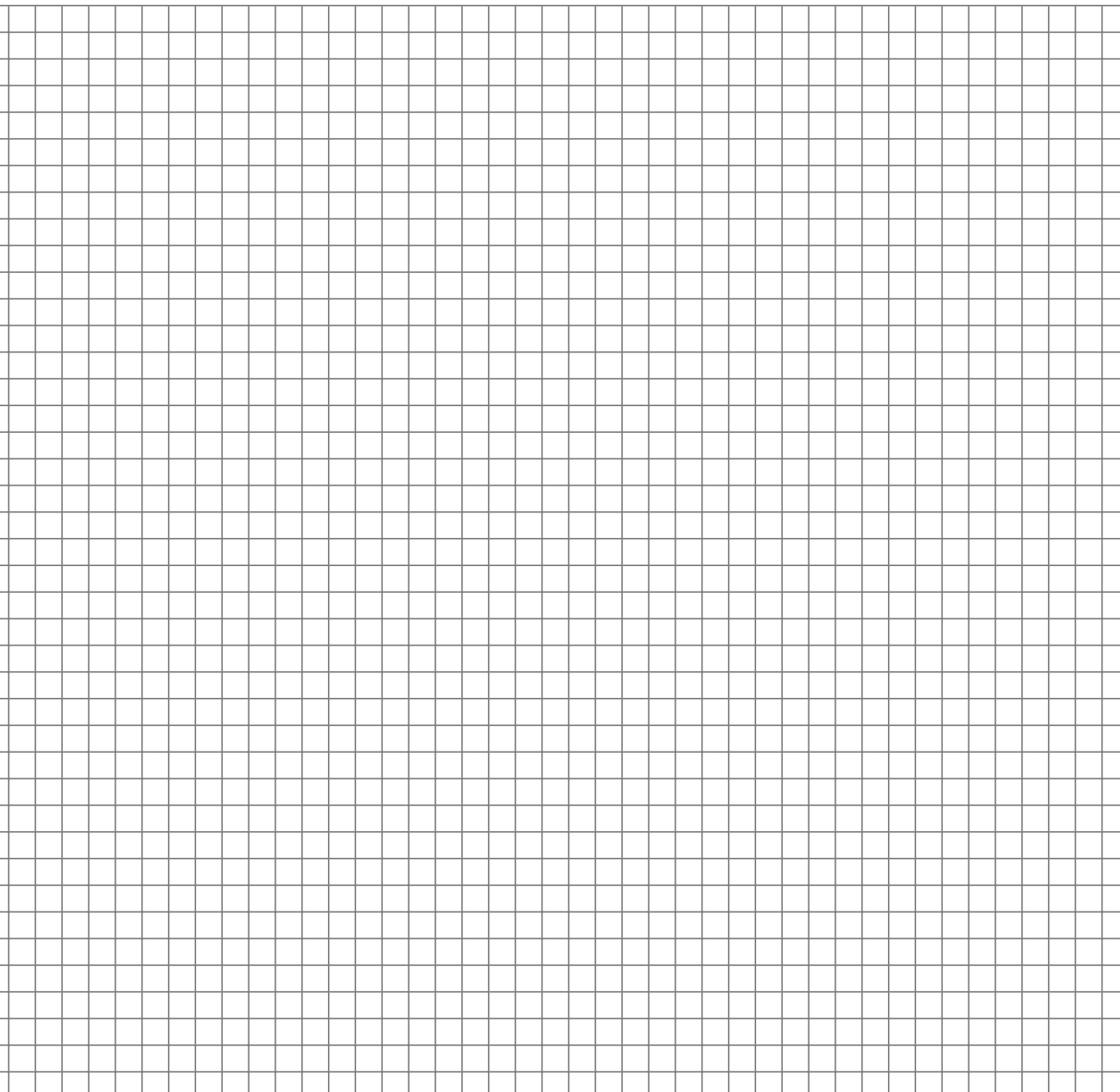
Transformieren Sie G_{7a} mit dem in der Vorlesung gezeigten Verfahren in eine äquivalente ε -freie Grammatik. Geben Sie die für die Transformation berechneten Mengen an.



b) Gegeben sei die Grammatik $G_{7b} = (N, \Sigma_{ab}, P, S)$ mit $N = \{S, A, B, T\}$ und P wie folgt:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AT \\ S &\rightarrow T \\ S &\rightarrow \epsilon \\ T &\rightarrow aTb \\ A &\rightarrow B \\ A &\rightarrow a \\ B &\rightarrow AA \end{aligned}$$

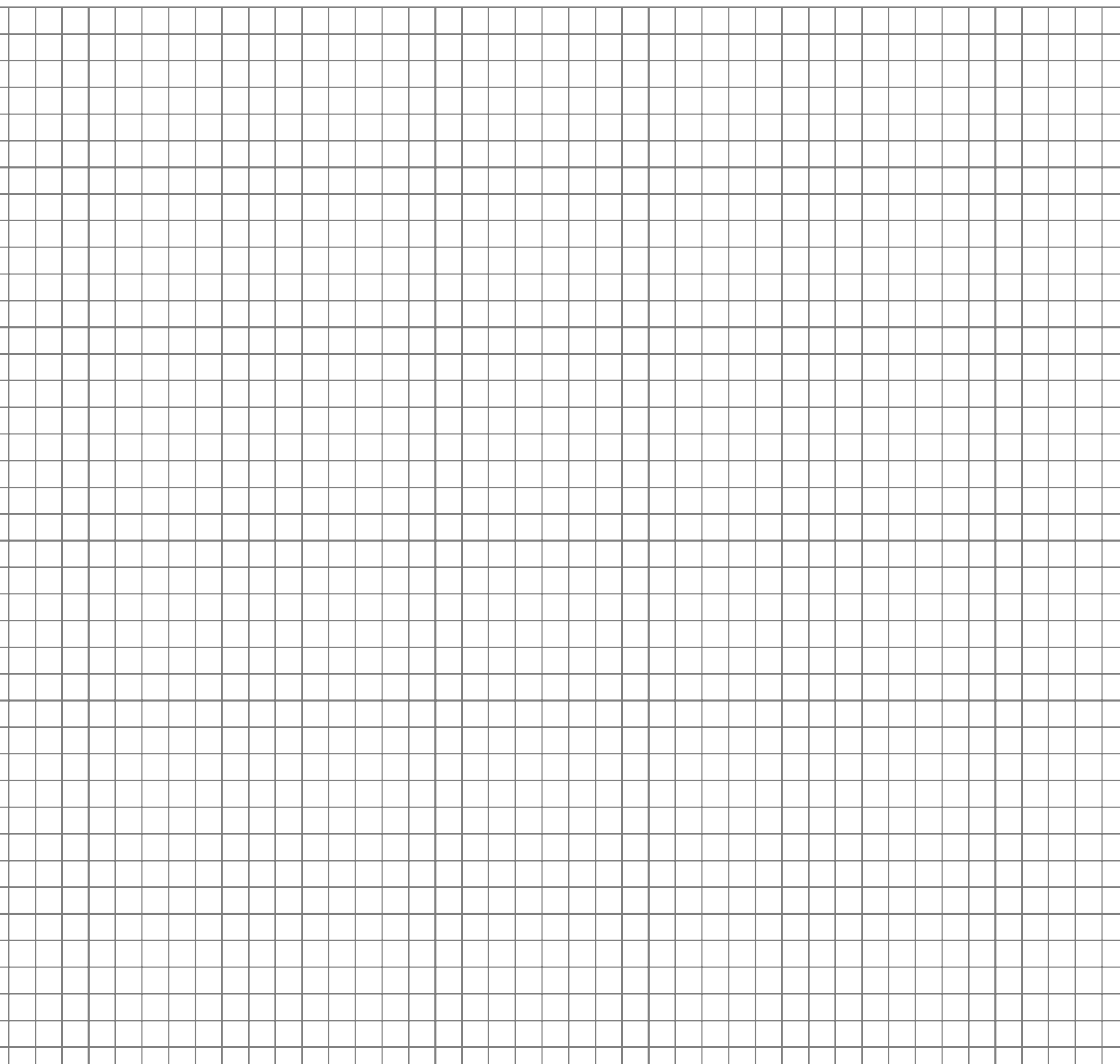
Transformieren Sie G_{7b} mit dem in der Vorlesung gezeigten Verfahren in eine äquivalente Grammatik ohne Kettenregeln. Geben Sie die für die Transformation berechneten Mengen an.



c) Gegeben sei die Grammatik $G_{7c} = (N, \Sigma_{ab}, P, S)$ mit $N = \{S, A, B, C, D\}$ und P wie folgt:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AS \\ S &\rightarrow aSb \\ S &\rightarrow ab \\ A &\rightarrow a \\ B &\rightarrow BC \\ B &\rightarrow Ba \\ C &\rightarrow Da \\ D &\rightarrow a \end{aligned}$$

Reduzieren Sie G_{7c} mit dem in der Vorlesung gezeigten Verfahren. Geben Sie die für die Transformation berechneten Mengen an.



- d) Welche der Regeln in Ihrer Antwort für Aufgabenteil c) sind noch nicht in Chomsky-Normalform? (Sie müssen nur die Regeln angeben, nicht die Transformation durchführen.)

Lösung:

a) $E = \{ 'A', 'S' \}$

Removing: $A \rightarrow -$

Removing: $S \rightarrow -$

Adding: $S \rightarrow A$

Adding: $S \rightarrow ab$

Adding: $A \rightarrow A$

Adding: $A \rightarrow A$

Adding: $Z \rightarrow S$

Adding: $Z \rightarrow -$

Result:

$A \rightarrow A$

$A \rightarrow AA$

$A \rightarrow a$

$S \rightarrow A$

$S \rightarrow AS$

$S \rightarrow aSb$

$S \rightarrow ab$

$Z \rightarrow -$

$Z \rightarrow S$

b) Removing chain rules

$N(B) = \text{set}()$

$N(T) = \text{set}()$

$N(A) = \{ 'B' \}$

Adding: $A \rightarrow AA$

Removing $A \rightarrow B$

$N(S) = \{ 'T' \}$

Adding: $S \rightarrow aTb$

Removing $S \rightarrow T$

Result:

$A \rightarrow AA$

$A \rightarrow a$

$B \rightarrow AA$

$S \rightarrow AT$

$S \rightarrow aTb$

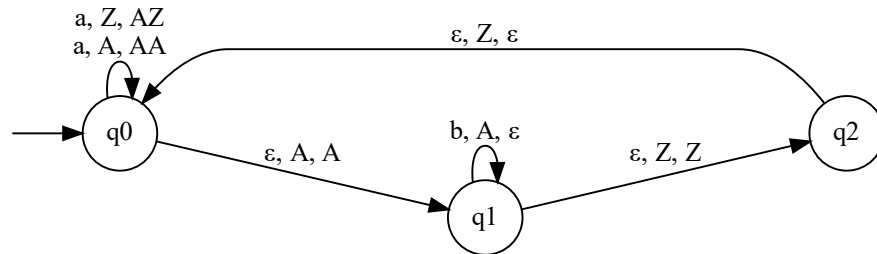
$S \rightarrow -$

$T \rightarrow aTb$

- c) Removing Non-Terminating:
Terminating NTS: {'S', 'A', 'D', 'C'}
Removing B→BC
Removing A→BB
Removing B→Ba
Result:
A→a
C→Da
D→a
S→AS
S→aSb
S→ab
- Removing Non-reachable:
Reachable NTS: {'A', 'S'}
Removing D→a
Removing C→Da
Result:
A→a
S→AS
S→aSb
S→ab
- d) S→aSb
S→ab

Aufgabe 8 (1+2+3+4 Punkte)

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ und der Kellerautomat (PDA) $A_k = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z)$ mit $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Gamma = \{A, B, C, D, Z\}$ und Δ gemäß folgendem Graph:

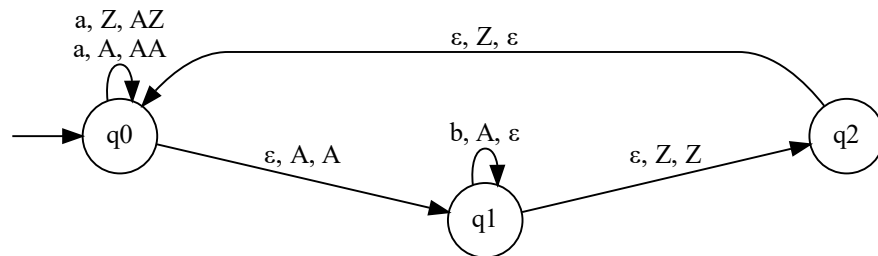
Abbildung 3: Automat A_k

- Geben Sie einen akzeptierenden Lauf (*run*) von A_k auf dem Wort $aabb$.
- Beschreiben Sie $\mathcal{L}(A_k)$.

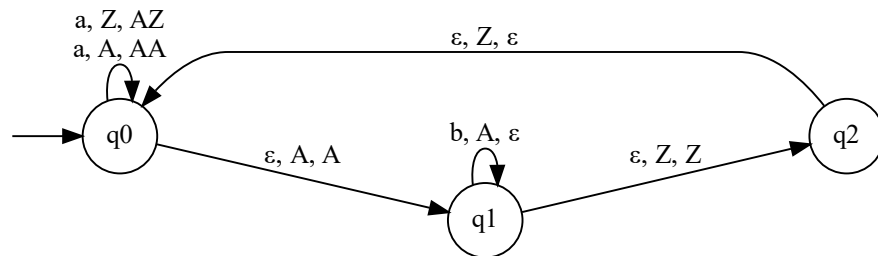
Verwenden Sie **jeweils eine** der Grafiken auf den nächsten Seiten.

- Erweitern Sie A_k durch zusätzliche Transitionen zu A_{kc} , sodass:
 $\mathcal{L}(A_{kc}) = \mathcal{L}(A_k)^*$.
- Erweitern Sie A_k durch zusätzliche Transitionen zu A_{kd} , sodass:
 $\mathcal{L}(A_{kd}) = \{a^n b^n c^m d^m \mid n \geq 1, m \geq 0\}$.

$$\mathcal{L}(A_{kc}) = \mathcal{L}(A_k)^*$$

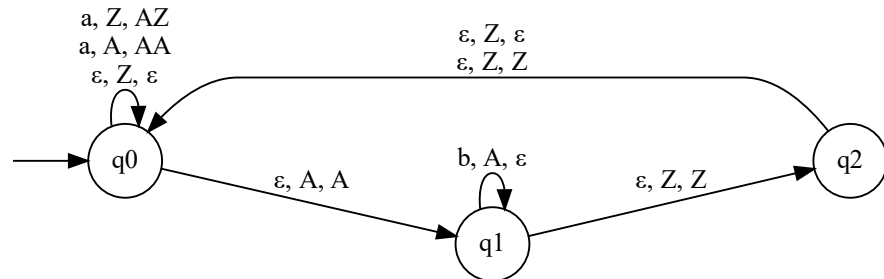


$$\mathcal{L}(A_{kd}) = \{a^n b^n c^m d^m \mid n \geq 1, m \geq 0\}$$

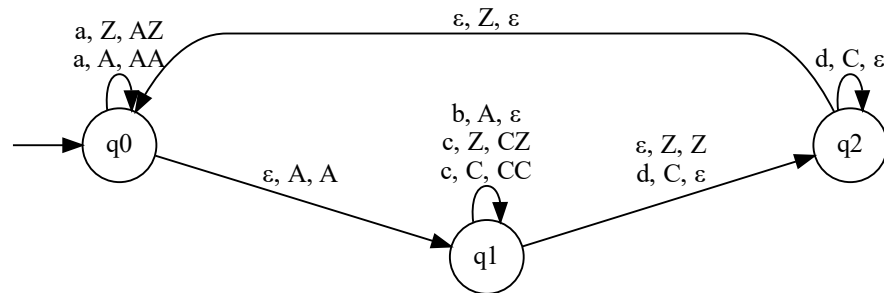
**Lösung:**

- a) $((0, aabb, Z), (0, abb, AZ), (0, bb, AAZ), (1, bb, AAZ), (1, b, AZ), (1, \varepsilon, Z), (2, \varepsilon, Z), (0, \varepsilon, \varepsilon)) \rightsquigarrow$
akzeptiert

b) $\mathcal{L}(A_k) = \{a^n b^n | n \geq 1\}$.



c)



d)

Aufgabe 9 (5+5+1+1 Punkte)

Betrachten Sie die Grammatik $G_9 = (\{S, X, Y, Z, A, N\}, \{a, n, h, s\}, P, S)$ mit

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow XX \\ S \rightarrow YY \\ S \rightarrow ZY \\ X \rightarrow XX \\ X \rightarrow AN \\ Y \rightarrow XY \\ Y \rightarrow NA \\ A \rightarrow AZ \\ A \rightarrow a \\ N \rightarrow n \\ Z \rightarrow h \\ Z \rightarrow s \end{array} \right\}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des CYK-Algorithmus, ob die folgenden Wörter in $L(G_9)$ enthalten sind:

- $w_1 = hannah$
- $w_2 = ananas$
- Geben Sie anhand des Ergebnisses aus Teil a) an, ob auch das Wort $anna \in L(G_9)$ ist. Begründen Sie Ihre Antwort kurz.
- Ein Palindrom ist ein Wort, das vorwärts wie rückwärts gelesen gleich ist, z.B. *ana* oder *abba*. Geben Sie ein Beispiel für ein weiteres Palindrom in $L(G_9)$ außer *hannah*. Sie müssen keine Ableitung angeben.

Tabelle für Teil a)

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						
$w_2 =$	h	a	n	n	a	h

Ist $w_1 \in L(G_9)$? Ja ☐ Nein ☐

$$P = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & XX \\ S & \rightarrow & YY \\ S & \rightarrow & ZY \\ X & \rightarrow & XX \\ X & \rightarrow & AN \\ Y & \rightarrow & XY \\ Y & \rightarrow & NA \\ A & \rightarrow & AZ \\ A & \rightarrow & a \\ N & \rightarrow & n \\ Z & \rightarrow & h \\ Z & \rightarrow & s \end{array} \right\}$$

Tabelle für Teil b)

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						
$w_2 =$	a	n	a	n	a	s

Ist $w_2 \in L(G_9)$? Ja ☐ Nein ☐

Lösung:

Lösung:

a)

```
+---+---+---+---+---+
|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
+---+---+---+---+---+
| 1 | Z | - | - | - | S | S |
+---+---+---+---+---+
| 2 |   | A | X | - | Y | Y |
+---+---+---+---+---+
| 3 |   |   | N | - | - | - |
+---+---+---+---+---+
| 4 |   |   |   | N | Y | Y |
+---+---+---+---+---+
| 5 |   |   |   |   | A | A |
+---+---+---+---+---+
| 6 |   |   |   |   |   | Z |
+---+---+---+---+---+
| w | h | a | n | n | a | h |
+---+---+---+---+---+
Also: hannah ist in L(G9)
```

Lösung:

Lösung:

b)

	1	2	3	4	5	6
1	A	X	-	S,X	-	-
2		N	Y	-	S	S
3			A	X	-	-
4				N	Y	Y
5					A	A
6						Z
w	a	n	a	n	a	s

Also: ananas ist nicht in $L(G_9)$

c) Nein, denn in der Tabelle steht dort Y und nicht S , somit ist *anna* nur ein Teilwort.

d) z.B. *annaanna*, *annahanna*, , *annasanna*

Ende