

# Logik und Grundlagen der Informatik

Übungsklausur

Stephan Schulz

25. Februar 2015

**Aufgabe 1: (2+2+3P)**

Sei  $M_1 = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ . Sei  $M_2 = \{5x \mid x \in \mathbb{N}\}$ .

- a) Bestimmen Sie  $M_1 \cap M_2$ .
- b) Bestimmen Sie  $M_2 \setminus M_1$
- c) Geben Sie eine bijektive Funktion von  $M_1 \rightarrow M_2$  an.

Lösung:

- a)  $M_1 \cap M_2 = \{10x \mid x \in \mathbb{N}\}$
- b)  $M_2 \setminus M_1 = \{5 + 10x \mid x \in \mathbb{N}\}$
- c) Korrektur: Eine solche Bijektion ist z.B. definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 5 \times x & \text{falls } x \in \mathbb{N} \\ 5 \times (-x - 1) & \text{sonst} \end{cases}$$

Idee: Die positiven geraden Zahlen werden auf die geraden Vielfachen von 5 abgebildet. Die negativen geraden Zahlen werden auf die ungerade Vielfachen von 5 abgebildet.

**Aufgabe 2: (1+2+2+3P)**

Sei  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  und  $R = \{(a, b), (c, b), (d, e), (e, f), (f, d)\}$  eine binäre Relation über  $A$ .

a) Stellen Sie  $R$  als Tabelle da.

b) Ist  $R$

1. Homogen?
2. Symmetrisch?
3. Linkstotal?
4. Rechtseindeutig?

c) Berechnen Sie  $R^*$  und stellen Sie das Ergebnis als Graph da

d) Berechnen Sie die kleinste Äquivalenzrelation, die  $R$  enthält, und stellen Sie das Ergebnis als Tabelle da.

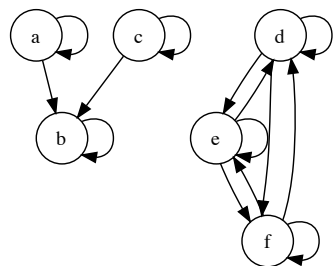
Lösung:

a)

	a	b	c	d	e	f
a	0	1	0	0	0	0
b	0	0	0	0	0	0
c	0	1	0	0	0	0
d	0	0	0	0	1	0
e	0	0	0	0	0	1
f	0	0	0	1	0	0

- b)
1. Homogen: Ja
  2. Symmetrisch: Nein, da z.B.  $(a, b) \in R$ , aber nicht  $(b, a) \in R$
  3. Linkstotal: Nein, da  $b$  keinem Element zugeordnet ist
  4. Rechtseindeutig: Ja, da keinem Element zwei verschiedene Werte zugeordnet werden.

c)  $R^*$  ist die reflexive, transitive Hülle. Als Graph:



d)

	a	b	c	d	e	f
a	1	1	1	0	0	0
b	1	1	1	0	0	0
c	1	1	1	0	0	0
d	0	0	0	1	1	1
e	0	0	0	1	1	1
f	0	0	0	1	1	1

### Aufgabe 3: (1+3+2P)

Betrachten Sie den folgenden Scheme-Code:

```
(define (mystery2 r lst b)
  (if (null? lst)
      b
      (r (car lst) (mystery2 r (cdr lst) b))))

(define a '(1 2 3 (4 5)))
```

a) Was ist der Rückgabewert des folgenden Ausdrucks?

```
(mystery2 + '() 0)
```

b) Was ist der Rückgabewert des folgenden Ausdrucks?

```
(mystery2 * (map (lambda (x) (+ 2 x)) '(1 2 3 4)) -1)
```

c) Mit welchem Scheme-Ausdruck können Sie *die vorhandene Liste a* in (1 2 3) umbauen?

Lösung: `mystery2` implementiert ein *Reduce*, d.h. es kombiniert die Werte aus der Eingabeliste paarweise mit der gegebenen Funktion (und dem Startwert `b`).

a) ==> 0

b) ==> -360

c) `(set-cdr! (caddr a) '())`

**Aufgabe 4: (2+2+3P)**

Sei  $F = a \wedge b \vee a \wedge c \vee b \wedge c$  und  $G = a \wedge b \vee c \wedge \neg(a \leftrightarrow b)$ .

- Geben sie vollständig geklammerte Versionen von  $F$  und  $G$  an.
- Gilt  $F \equiv G$ ? Verwenden Sie die Wahrheitstafelmethode!
- Gilt  $\models F \leftrightarrow G$ ? Verwenden Sie die Tableaux-Methode!

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } F &= (((a \wedge b) \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c)) \\ G &= ((a \wedge b) \vee (c \wedge \neg(a \leftrightarrow b))) \end{aligned}$$

- Es gilt  $F \equiv G$ , denn  $F$  und  $G$  haben die selben Modelle:

a	b	c	F	G
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

- Es gilt  $\models F \leftrightarrow G$  gdw.  $\neg(F \leftrightarrow G)$  unerfüllbar ist. Tableau nächste Seite. Keine Angst, in der echten Klausur kommt so ein großes Tableau nicht dran!



### Aufgabe 5: (2+3+3P)

Betrachten Sie folgende Beschreibung:

Das System ist genau dann im Multiuser-Status, wenn es normal arbeitet. Wenn das System normal arbeitet, funktioniert der Kernel. Entweder der Kernel funktioniert nicht, oder das System ist im Interrupt-Modus. Wenn das System nicht im Multiuser-Status ist, dann ist es im Interrupt-Modus. Das System ist nicht in Interrupt-Modus.

- a) Was sind die atomaren Aussagen?
- b) Stellen Sie eine Menge von aussagenlogischen Formeln auf, die den Sachverhalt repräsentieren.
- c) Ist die Formelmenge erfüllbar? Begründen Sie Ihre Aussage!

Lösung:

- a)
  - Das System ist im Multiuser-Status:  $m$
  - Das System arbeitet normal:  $n$
  - Der Kernel funktioniert:  $k$
  - Das System ist im Interrupt-Modus:  $i$
- Formelmenge:
  1.  $m \leftrightarrow n$
  2.  $n \rightarrow k$
  3.  $\neg(k \leftrightarrow i)$
  4.  $\neg m \rightarrow i$
  5.  $\neg i$
- Die Formelmenge ist erfüllbar mit der Interpretation  $\{k, \neg i, m, n\}$  - andere Schreibweise:  $I(k) = 1, I(i) = 0, i(m) = 1, i(n) = 1$ . Ich habe das mit einem Tableaux (von Hand) gelöst.

### Aufgabe 6: (6P)

Zeigen Sie:  $\{\rightarrow, \perp\}$  ist eine Basis der Aussagenlogik. Sie können voraussetzen, dass  $\{\neg, \vee, \wedge\}$  eine Basis ist.

Lösung: Da  $\{\neg, \vee, \wedge\}$  als Basis gegeben ist, müssen wir nur zeigen, dass für alle  $F \in For0_\Sigma$ , die nur  $\neg, \vee, \wedge$  als Operatoren enthalten, ein äquivalentes  $F'$  existiert, das nur  $\rightarrow, \perp$  enthält. Wir zeigen dies mit Induktion über den Aufbau.

**IA:** Sei  $F$  eine elementare Formel, also  $F = a$  für ein  $a \in \Sigma^1$ . Dann gilt:  $F' = F$  ist offensichtlich äquivalent zu  $F$  und enthält keine Operatoren (also auch keine außer  $\rightarrow, \perp$ ). Damit ist der Induktionsanfang gesichert.

**IV:** Die Behauptung gelte für  $A, B \in For0_\Sigma$  (die nur  $\neg, \wedge, \vee$  enthalten), d.h. es gibt  $A', B' \in For0_\Sigma$  so dass  $A \equiv A', B \equiv B'$ , und  $A', B'$  enthalten nur  $\rightarrow, \perp$ .

**IS:** Sei  $F$  eine zusammengesetzte Formel. Wir unterscheiden drei Fälle.

**Fall 1:**  $F = \neg A$ : Dann betrachte  $F' = A \rightarrow \perp$ . Es gilt:  $F'$  enthält nur  $\rightarrow, \perp$ . Außerdem

gilt: 

$I(A)$	$I(A')$	$I(F)$	$I(F')$
0	0	1	1
1	1	0	0

, also  $F' \equiv F$ .

**Fall 2:**  $F = A \vee B$ : Analog mit  $F' = (A' \rightarrow \perp) \rightarrow B'$

**Fall 3:**  $F = A \wedge B$ : Analog mit  $F' = (A' \rightarrow (B' \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp$

Da in allen Fällen ein entsprechendes  $F'$  existiert, ist der Induktionsschritt vollständig und damit gilt die Behauptung. q.e.d.

---

<sup>1</sup> $\top, \perp$  kommen ja nach Voraussetzung nicht vor!



**Aufgabe 7: (3+4P)**

a) Bestimmen Sie die konjunktive Normalform der folgenden Formel:  $((p \vee q) \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

b) Betrachten Sie die Menge  $K$  der folgenden Klauseln:

1.  $p \vee q \vee \neg r \vee s$
2.  $\neg p \vee r \vee s$
3.  $\neg q \vee \neg r$
4.  $p \vee \neg s$
5.  $\neg p \vee \neg r$
6.  $r$

Zeigen Sie per Resolution dass  $K$  unerfüllbar ist.

Lösung:

a) KNF-Transformation:

$((p \vee q) \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$	Originalformel
$\equiv \neg((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \vee (\neg p \vee r)$	Elimination $\rightarrow$
$\equiv (\neg(p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee r)) \vee (\neg p \vee r)$	De-Morgan
$\equiv ((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)) \vee (\neg p \vee r)$	De-Morgan - NNF erreicht
$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee ((p \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee r))$	Distributivität (innen)
$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (\top \wedge \top)$	$A \vee \neg A \equiv \top$
$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee \top$	$A \wedge \top \equiv A$
$\equiv \top$	$A \vee \top \equiv \top$

- b)
7.  $\neg p$  (5,6)
  8.  $\neg s$  (7,4)
  9.  $\neg q$  (6,3)
  10.  $q \vee \neg r \vee s$  (7,1)
  11.  $\neg r \vee s$  (10, 9)
  12.  $\neg r$  (11, 8)
  13.  $\square$  (6,12)

### Aufgabe 8: (3+3P)

Betrachten Sie die folgende Menge von prädikatenlogischen Klauseln.

$$K = \{ \begin{aligned} &(animal(X0) \vee \neg wolf(X0)), \\ &(animal(X1) \vee \neg bird(X1)), \\ &(animal(X2) \vee \neg snail(X2)), \\ &(wolf(awolf)), \\ &(bird(abird)), \\ &(snail(asnail)), \\ &(grain(agrain)), \\ &(plant(X3) \vee \neg grain(X3)), \\ &(eats(A, Plant) \vee eats(A, S) \vee \neg animal(A) \vee \\ &\neg plant(Plant) \vee \neg animal(S) \vee \\ &\neg plant(OPlant) \vee \neg muchsmaller(S, A) \vee \neg eats(S, OPlant)) \end{aligned} \},$$

- a) Geben Sie eine geeignete Signatur (mit Stelligkeiten) für die Klauselmenge an. Variablen (und nur Variablen) beginnen mit Großbuchstaben.
- b) Potentiell komplementäre Literale haben verschiedene Vorzeichen und Atome, die gemeinsame Instanzen haben. Finden Sie zwei Paare von potentiell komplementären Literalen in verschiedenen Klauseln. Geben Sie diese an und bestimmen Sie jeweils den allgemeinsten Unifikator der entsprechenden Atome.
- a)  $\Sigma = \{P, F, V\}$  mit
- $P = \{animal/1, wolf/1, bird/1, snail/1, grain/1, plant/1, eats/2, muchsmaller/2\}$
  - $F = \{awolf/0, abird/0, asnail/0, agrain/0\}$
  - $V = \{X0, X1, X2, X3, A, S, Plant, OPlant, \dots\}$
- b) -  $wolf(awolf)$  und  $\neg wolf(X0)$  sind komplementär mit  $\sigma = \{X0 \leftarrow awolf\}$
- $bird(abird)$  und  $\neg bird(X1)$  sind komplementär mit  $\sigma = \{X1 \leftarrow abird\}$