Matrikelnummer:			
DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Stuttgart		Fakultät	**Technik**
		Studiengang:	**Angewandte Informatik**
		Jahrgang / Kurs :	**2016 / 16C&16ITA**
ÜBUNGSKLAUSUR		Studienhalbjahr:	**1. Semester**
Datum:	**23/24. Februar 2017**	Bearbeitungszeit:	**90 Minuten**
Modul:	**TINF1002**	Dozent:	**Stephan Schulz**
Unit:	**Grundlagen und Logik**		
Hilfsmittel:	**Zwei Texte, z.B. Vorlesungsskript, eigene Notizen**		
Punkte:		Note:	

Aufgabe	erreichbar	erreicht
1	4	
2	9	
3	9	
4	9	
5	7	
6	7	
7	6	
8	7	
9	9	
Summe	67	

1. Sind Sie gesund und prüfungsfähig?
2. Sind Ihre Taschen und sämtliche Unterlagen, insbesondere alle nicht erlaubten Hilfsmittel, seitlich an der Wand zum Gang hin abgestellt und nicht in Reichweite des Arbeitsplatzes?
3. Haben Sie auch außerhalb des Klausurraumes im Gebäude keine unerlaubten Hilfsmittel oder ähnliche Unterlagen liegen lassen?
4. Haben Sie Ihr Handy ausgeschaltet und abgegeben?

(Falls Ziff. 2 oder 3 nicht erfüllt sind, liegt ein Täuschungsversuch vor, der die Note „nicht ausreichend“ zur Folge hat.)

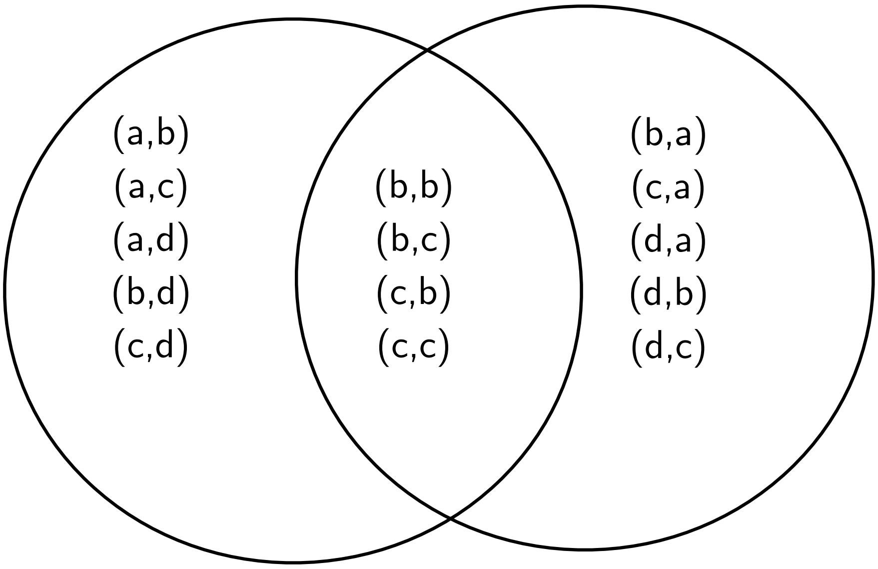
Aufgabe 1 (2+2 Punkte)
Betrachten Sie die Mengen $A = \{a, b, c\}$ und $B = \{b, c, d\}$

a) Bestimmen Sie die kartesischen Produkte $A \times B$ und $B \times A$.

b) Stellen Sie $A \times B$, $B \times A$ und $(A \times B) \cap (B \times A)$ in einem gemeinsamen Venn-Diagramm dar.

Lösung:

- $A \times B = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d)\}$
- $B \times A = \{(b, a), (c, a), (d, a), (b, b), (c, b), (d, b), (b, c), (c, c), (d, c)\}$
- Schnittmenge $(A \times B) \cap (B \times A) = \{(b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$



Aufgabe 2 (1+2+2+2+2 Punkte)
Betrachten Sie die Menge $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und die Relationen $f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$ und $g = \{(x, y) \mid x, y \in A, x > y\}$.

a) Stellen Sie f in Tabellenform dar.

b) Visualisieren Sie g als Relationsgraph.

c) Bestimmen Sie $g \circ f$ und stellen Sie das Ergebnis in Tabellenform dar.

d) Geben Sie eine totale Funktion $h_1 : A \to A$ an, die *nicht injektiv* ist.

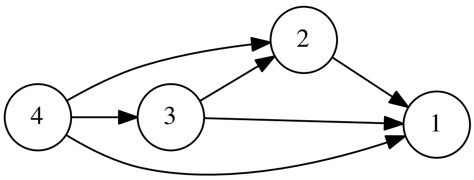
e) Geben Sie eine totale Funktion $h_2 : A \to A$ an, die *surjektiv* ist.

Lösung:

a)

f	1	2	3	4
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	1	0	0	0

b)



c) $g \circ f = \{(1, 3), (1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1), (3, 1)\}$

$g \circ f$	1	2	3	4
1	1	1	1	0
2	1	1	0	0
3	1	0	0	0
4	0	0	0	0

d) $h_1 = \{(x, 1) \mid x \in A\}$

e) $h_2 = \{(x, x) \mid x \in A\}$

Fortsetzung

Aufgabe 3 (2+3+4 Punkte)
Betrachten Sie die folgenden Scheme-Definitionen:

```
(define k1 '(4 5 6 7 8 9 8 7 6))
(define k2 '(1 2 9 8 7))
(define k3 '(1 2 9 8 7))
(define k4  (append (cddr k3) (list k2)))

(define (fun x)
  (if (> x 5)
      (- x 5)
      (+ x 5)))

(define (funmaker y z)
  (lambda (x) (+ (* x y) z)))

(define (function f k)
  (if (null? k)
      '()
      (let ((z (f (car k)))
            (rst (function f (cdr k))))
            (cons z rst))))
```

a) Was ist der Wert von `k4`?

b) Was ist das Ergebnis von `(function fun k2)`?

d) Was ist das Ergebnis von `(function (funmaker 1 1) k1)`?

Lösung:

a) `(9 8 7 (1 2 9 8 7))`

b) `(6 7 4 3 2)`

d) `(5 6 7 8 9 10 9 8 7)`

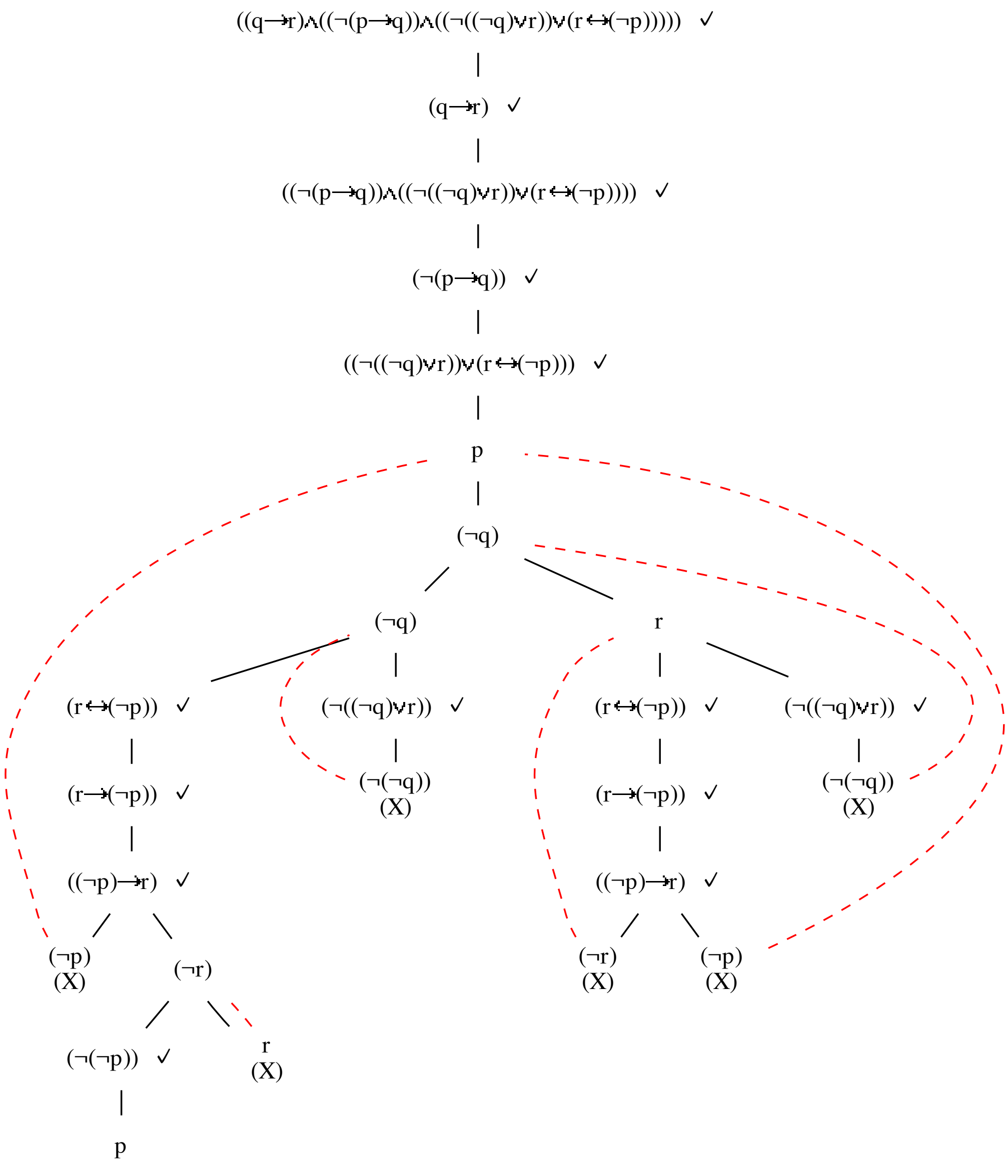
Aufgabe 4 (7+2 Punkte)
Betrachten Sie die folgende aussagenlogische Formel:

$$\varphi = (q \to r) \land (\neg(p \to q)) \land ((\neg(\neg q \lor r)) \lor (r \leftrightarrow \neg p))$$

a) Verwenden Sie das in der Vorlesung gezeigten Tableaux-Verfahren, um ein vollständiges Tableau für φ zu erzeugen.

b) Ist φ erfüllbar? Wenn ja, geben Sie ein Modell für φ an.

Lösung:



φ ist erfüllbar mit $I = \{p, \neg r, \neg q\}$.

Fortsetzung

Aufgabe 5 (3+4 Punkte)

a) Geben Sie eine erfüllbare aussagenlogische Klauselmenge mit folgenden Eigenschaften an:

- Die Menge hat mindestens 4 verschiedene Klauseln
- Die Menge verwendet insgesamt nur die 3 Atome a, b, c, und nicht $\top, \bot$.
- Mindestens eine Klausel hat genau ein Literal
- Mindestens eine Klausel hat genau 3 Literale
- Mindestens eine Klausel hat positive und negative Literale

Geben Sie ein explizites Modell dieser Klauselmenge an.

b) Konvertieren Sie die folgende Formel in konjunktive Normalform und schreiben Sie das Ergebnis als Klauselmenge:

$$\varphi = (p \wedge ((\neg(p \wedge q)) \leftrightarrow r))$$

Lösung:

a) (z.B): $\{a \vee b \vee \neg c, a, b, a \vee \neg c\}$ mit dem Model a, b, c

b)

$$\begin{array}{rcll}
\varphi & \equiv & (p \wedge ((\neg(p \wedge q)) \leftrightarrow r)) & \\
& \equiv & (p \wedge ((\neg(p \wedge q)) \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow (\neg(p \wedge q)))) & \text{Eliminieren von } \leftrightarrow \\
& \equiv & (p \wedge ((\neg(\neg(p \wedge q))) \vee r) \wedge (\neg r \vee (\neg(p \wedge q)))) & \text{Eliminieren von } \rightarrow \\
& \equiv & (p \wedge ((p \wedge q) \vee r) \wedge (\neg r \vee (\neg(p \wedge q)))) & \text{Doppelte Negation entfernen} \\
& \equiv & (p \wedge ((p \wedge q) \vee r) \wedge (\neg r \vee (\neg p \vee \neg q))) & \text{De-Morgan} \\
& \equiv & (p \wedge ((p \vee r) \wedge (q \vee r)) \wedge (\neg r \vee (\neg p \vee \neg q))) & \text{Distributivität} \\
& \equiv & (p \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee \neg q)) & \text{Überflüssige Klammern}
\end{array}$$

Als Klauselmenge: $\varphi = \{p, p \vee r, q \vee r, \neg r \vee \neg p \vee \neg q\}$

Fortsetzung

Aufgabe 6 (2+3+2 Punkte)
Betrachten Sie folgenden Sachverhalt:

> Wenn wir mehr CO_2 in die Atmosphäre ausstoßen, erwärmt sich das Klima. Wärmeres Klima führt zu höheren Niederschlägen. Höhere Niederschläge führen zu besseren Ernten und zu Überflutungen. Bessere Ernten führen zu Bevölkerungswachstum. Bevölkerungswachstum führt zu erhöhtem CO_2-Ausstoß.

a) Identifizieren Sie die atomaren Aussagen.

b) Formalisieren Sie den Sachverhalt als Formelmenge KB.

c) Formalisieren Sie die Behauptung B, dass Bevölkerungswachstum zu Überflutungen führt. Stellen Sie eine aussagenlogische Formel auf, die allgemeingültig ist, wenn $KB \models B$ gilt.

Lösung:

a) Atomare Aussagen

c: Erhöhter CO_2-Ausstoss

k: Klimaerwärmung

n: höhere Niederschläge

e: bessere Ernten

u: Überflutungen

b: Bevölkerungswachstum

b) KB:

$c \to k$

$k \to n$

$n \to e \wedge u$

$e \to b$

$b \to c$

c) B: $b \to u$.
$KB \models B$ gdw. $(((c \to k) \wedge (k \to n) \wedge (n \to (e \wedge u)) \wedge (e \to b) \wedge (b \to c)) \to (b \to u))$ allgemeingültig

Fortsetzung

Aufgabe 7 (6 Punkte)
Betrachten Sie die folgende Klauselmenge:

1. $\neg c \vee k$
2. $\neg k \vee n$
3. $\neg n \vee u$
4. $\neg e \vee b$
5. $\neg b \vee c$
6. $e \vee b$
7. $\neg u$

Entscheiden Sie per Resolution, ob die Menge erfüllbar ist. Nummerieren Sie die Zwischenschritte, und geben Sie die Eltern der neu hergeleiteten Klauseln an.

Lösung:

8. b (4+6)
9. c (8+5)
10. k (9+1)
11. n (10+2)
12. u (11+3)
13. $\Box$ (12+7)

Damit ist die Menge unerfüllbar!

Aufgabe 8 (1+2+2+2 Punkte)
Sei $\Sigma = \{a, b, c, \ldots\}$ eine aussagenlogische Signatur. Betrachten Sie den Operator $\triangledown$ mit folgender Semantik:

F	G	$F \triangledown G$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Geben Sie für die folgenden Formeln äquivalente Formeln aus $For0_\Sigma$ an, die nur den Operator $\triangledown$ verwenden. Zeigen Sie die Äquivalenz jeweils mit einer Wahrheitstafel.

a) $\neg a$

b) $a \wedge b$

c) $a \to b$

d) Ist $\{\triangledown\}$ eine Basis der Aussagenlogik? Begründen Sie ihre Aussage kurz (kein formaler Beweis nötig).

Lösung:

a) $\neg a \equiv a \triangledown a$

a	$\neg a$	$a \triangledown a$
0	1	1
1	0	0

b) $a \wedge b \equiv (a \triangledown a) \triangledown (b \triangledown b)$

a	b	$(a \triangledown a)$	$(b \triangledown b)$	$(a \triangledown a) \triangledown (b \triangledown b)$	$a \wedge b$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

c) $a \to b \equiv ((a \triangledown a) \triangledown b) \triangledown ((a \triangledown a) \triangledown b)$

a	b	$a \triangledown a$	$(a \triangledown a) \triangledown b$	$((a \triangledown a) \triangledown b) \triangledown ((a \triangledown a) \triangledown b)$	$a \to b$
0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

d) Ja, $\{\triangledown\}$ ist eine Basis. Insbesondere sind sowohl $\{\neg, \to\}$ und $\{\neg, \wedge\}$ nach Vorlesung Basen, und alle beteiligten Operatoren sind nach Teilen a-c darstellbar.

Fortsetzung

Aufgabe 9 (2+2+5 Punkte)

a) Verwenden Sie das in der Vorlesung gezeigten Unifikationsverfahren, um jeweils einen Unifikator für die Termpaare s_1, s_2 und t_1, t_2 zu finden. Es ist $F = \{f/2, g/1, a/0, b/0\}$ und X, Y, Z, U, V, W sind Variablen.

a1) $$\begin{aligned} s_1 &= g(f(f(X,Y), g(g(X)))) \\ s_2 &= g(f(f(U,a), g(U))) \end{aligned}$$

a2) $$\begin{aligned} t_1 &= f(f(a,X), g(f(Y,b))) \\ t_2 &= f(f(X,Z), g(U)) \end{aligned}$$

b) Sei $\Sigma = \langle\{ge/2, l/2\}, \{c/2, 1/0, 2/0, 3/0, n/0\}, \{X, Y, L, R \ldots\}\rangle$. Zeigen Sie per Resolution, dass die folgende Klauselmenge unerfüllbar ist. Geben Sie zu jeder neuen Klausel die Eltern und den Unifikator an. Hinweis: Denken Sie an zwei Listen, die elementweise verglichen werden.

1. $ge(2,1)$
2. $ge(3,2)$
3. $l(n,n)$
4. $\neg ge(X,Y) \vee \neg l(L,R) \vee l(c(X,L), c(Y,R))$
5. $\neg l(c(2, c(3,n)), c(1, c(2,n)))$

Lösung:

a1)
```
g(f(f(X,Y),g(g(X))))=g(f(f(U,a),g(U))) | {}      Decompose
f(f(X,Y),g(g(X)))=f(f(U,a),g(U))       | {}      Decompose
f(X,Y)=f(U,a), g(g(X))=g(U)            | {}      Decompose
X=U, Y=a, g(g(X))=g(U)                 | {}      Bind(X)
Y=a, g(g(U))=g(U)                      | {X<-U}  Decompose
Y=a, g(U)=U                            | {X<-U}  Orient/Occurs-Check
FAIL
```

a2)
```
f(f(a,X),g(f(Y,b)))=f(f(X,Z),g(U)) | {}                        Decompose
f(a,X)=f(X,Z), g(f(Y,b))=g(U)      | {}                        Decompose
a=X, X=Z, g(f(Y,b))=g(U)           | {}                        Bind (X)
a=Z, g(f(Y,b))=g(U)                | {X<-Z}                    Orient/Bind(Z)
g(f(Y,b))=g(U)                     | {X<-a, Z<-a}              Decompose
f(Y,b) = U                         | {X<-a, Z<-a}              Orient/Bind(U)
-                                  | {X<-a, Z<-a, U<-f(Y,b)}
```

$\sigma(t_1) = \sigma(t_2) = f(f(a,a), g(f(Y,b)))$

b)

6. $\neg ge(2,1) \vee \neg l(c(3,n), c(2,n))$ (4,5) mit $\sigma = \{X \leftarrow 2, Y \leftarrow 1, L \leftarrow c(3,n), R \leftarrow c(2,n)\}$
7. $\neg l(c(3,n), c(2,n))$ (1,6) mit $\sigma = \{\}$
8. $\neg ge(3,2) \vee \neg l(n,n)$ (4,7) mit $\sigma = \{X \leftarrow 3, Y \leftarrow 2, L \leftarrow n, R \leftarrow n\}$
9. $\neg l(n,n)$ (2,8) mit $\sigma = \{\}$
10. $\square$ (3, 9) mit $\sigma = \{\}$

Fortsetzung

– Ende der Klausur –