

Matrikelnummer:			
 DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Stuttgart		Fakultät	Technik
		Studiengang:	Informatik
		Jahrgang / Kurs :	19C&19IN
		Studienhalbjahr:	1. Semester
ÜBUNGSKLAUSUR			
Datum:	Februar 2021	Bearbeitungszeit:	90 Minuten
Modul:	TINF1002	Dozent:	Stephan Schulz
Unit:	Grundlagen und Logik		
Hilfsmittel:	Zwei Texte, z.B. Vorlesungsskript, eigene Notizen		
Punkte:			Note:

Aufgabe	erreichbar	erreicht
1	11	
2	11	
3	11	
4	6	
5	10	
6	8	
7	12	
8	9	
Summe	78	

1. Sind Sie gesund und prüfungsfähig?
2. Sind Ihre Taschen und sämtliche Unterlagen, insbesondere alle nicht erlaubten Hilfsmittel, seitlich an der Wand zum Gang hin abgestellt und nicht in Reichweite des Arbeitsplatzes?
3. Haben Sie auch außerhalb des Klausorraumes im Gebäude keine unerlaubten Hilfsmittel oder ähnliche Unterlagen liegen lassen?
4. Haben Sie Ihr Handy ausgeschaltet und abgegeben?

(Falls Ziff. 2 oder 3 nicht erfüllt sind, liegt ein Täuschungsversuch vor, der die Note „nicht ausreichend“ zur Folge hat.)

Aufgabe 1 (1+1+1+3+2+1+2 Punkte)

Betrachten Sie die Trägermenge $M = \{1, 2, 3, \dots, 14, 15\}$ und die drei Teilmengen

- $A = \{x \in M \mid x \text{ enthält die Ziffer 1 genau ein mal in der Dezimaldarstellung}\}$
- $B = \{x \in M \mid x \text{ ist Primzahl}\}$
- $C = \{x \in M \mid x \text{ ist ungerade}\}$

a1) Geben Sie A explizit (als Aufzählung der Elemente) an.

a2) Geben Sie B explizit (als Aufzählung der Elemente) an.

a3) Geben Sie C explizit (als Aufzählung der Elemente) an.

b) Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm, dass die Beziehungen zwischen A , B , C und M visualisiert und die Lage aller Elemente zeigt.

c) Geben Sie die Potenzmenge $2^{A \cap C}$ an.

d) Geben Sie die Mächtigkeit $|(B \cap C) \setminus A|$ an.

e) Geben Sie $(A \cap C) \times \{3, 4\}$ an.

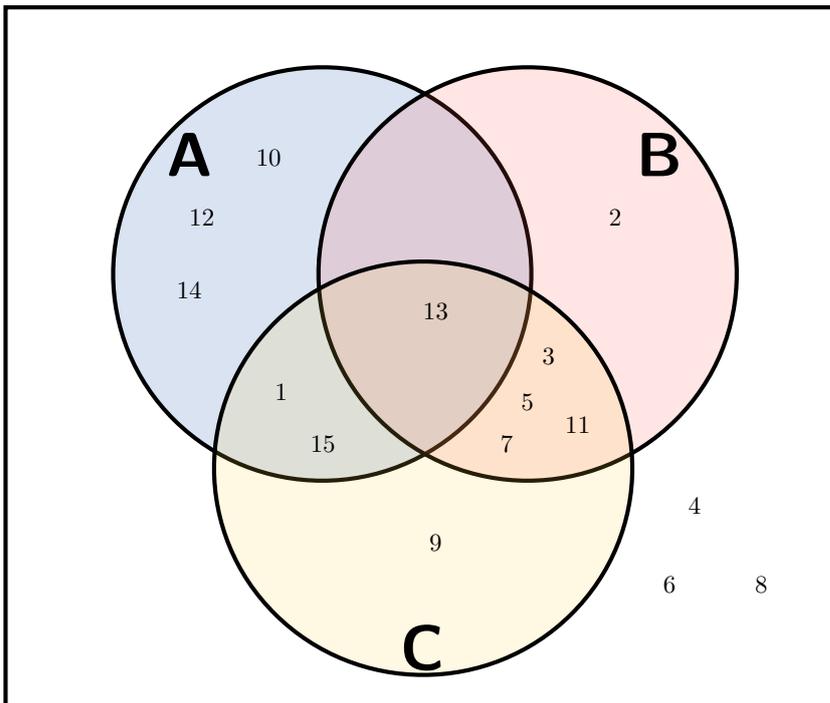
Lösung:

a1) $A = \{1, 10, 12, 13, 14, 15\}$. 11 falsch: -0.5P

a2) $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

a3) $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$

b)



4,6,8 fehlen: -1 Punkt.

c) $A \cap C = \{1, 13, 15\}$, damit $2^{A \cap C} = \{\emptyset, \{1\}, \{13\}, \{15\}, \{1, 13\}, \{1, 15\}, \{13, 15\}, \{1, 13, 15\}\}$

d) $|(B \cap C) \setminus A| = 4$

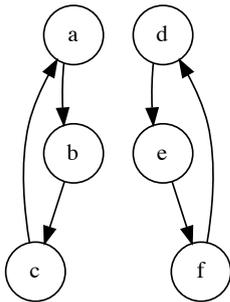
e) $A \cap C = \{1, 13, 15\}$.

Damit $(A \cap C) \times \{3, 4\} = \{(1, 3), (1, 4), (13, 3), (13, 4), (15, 3), (15, 4)\}$.

Aufgabe 2 (2+1+2+3+3 Punkte)

Betrachten Sie die Menge $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ und die binären Relationen $R = \{(a, b), (b, c), (c, a), (d, e), (e, f), (f, d)\}$ und $S = \{(a, d), (d, a)\}$ über A .

- Stellen Sie R als Relationsgraph dar.
- Stellen Sie S als Tabelle dar.
- Geben Sie die Relation S^+ (die transitive Hülle von S) als Menge von Paaren an.
- Stellen Sie die Relation $R \circ S^+$ als Relationsgraph dar.
- Wie viele Elemente hat $(R \cup S)^*$? Begründen Sie Ihre Aussage kurz.

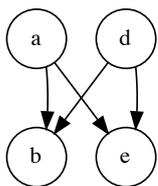
Lösung:

a)

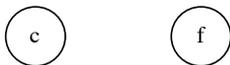
	a	b	c	d	e	f
a	0	0	0	1	0	0
b	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	0	0
d	1	0	0	0	0	0
e	0	0	0	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0

b)

c) $S^+ = \{(a, d), (d, a), (a, a), (d, d)\}$



d)



- e) $(R \cup S)^*$ setzt alle Elemente von A in, hat also selbst $6 \cdot 6 = 36$ Elemente.

Aufgabe 3 (1+1+1+2+3+3 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Scheme-Definitionen (in der Standard-Umgebung):

```
(define a '(1 2 3))
(define b '(3 4 5))
(define c (append a b))
(define d (cons a b))

(define (dd lst)
  (if (null? lst)
      lst
      (cons (car lst)
            (cons (car lst)
                  (dd (cdr lst))))))

(define (magic lst1 lst2)
  (if (null? lst1)
      1
      (* (+ (car lst1) (car lst2))
         (magic (cdr lst1) (cdr lst2)))))
```

- a) Was ist der Wert von `c`?
- b) Was ist der Wert von `d`?
- c1) Unterstreichen Sie in dem obigen Code alle Vorkommen von *formalen Parametern* für die Funktion `magic`.
- c2) Erklären Sie kurz (1-3 Sätze/Stichworte), welche Rolle *formale Parameter* und *konkrete Parameter* bei einem Funktionsaufruf spielen.
- d) Was ist der Wert von `(dd b)`?
- e) Was ist der Wert von `(magic '(1 2 2 4) '(1 1 2 0))`?

Lösung:

- a) (1 2 3 3 4 5)
- b) ((1 2 3) 3 4 5)
- c1) (define (magic lst1 lst2) ...
- c2) *Formale Parameter* einer Funktion werden bei jedem Aufruf zu neuen lokalen Variablen in der Umgebung, in der der Rumpf ausgewertet wird. Die *konkreten Parameter* werden vor dem Funktionsaufruf ausgewertet und stellen die (initialen) Werte für diese neuen Variablen.
- d) (3 3 4 4 5 5)
- e) 96

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben seien die Atome $\{R, S, T, X, Y, Z\}$.

Wenden Sie das in der Vorlesung gezeigte Resolutionsverfahren für die Aussagenlogik auf die Menge M an, die aus den unten angegebenen Klauseln 1–7 besteht.

1. R
2. $\neg R \vee S$
3. $\neg R \vee \neg T$
4. $T \vee \neg Z$
5. $X \vee \neg Y \vee T$
6. $\neg X \vee \neg Y$
7. $Y \vee Z$

Ist M erfüllbar oder nicht?

Lösung:

8. $\neg T$ aus 1, 3
9. $\neg Z$ aus 4, 8
10. Y aus 7, 9
11. $\neg Y \vee T$ aus 5, 6
12. $\neg Y$ aus 11, 8
13. \square aus 10, 11

1 Punkt pro Schritt, 1 Punkt für richtige Antwort zur Erfüllbarkeit.

Aufgabe 5 (4+6 Punkte)

- a) Betrachten Sie die folgende aussagenlogische Formel φ_1 , in der einige der nach den *Vereinbarungen zum Minimieren von Klammern* unnötigen Klammern weggelassen wurden:

$$\varphi_1 = a \vee b \vee c \wedge \neg d \rightarrow \neg(a \vee \neg(a \wedge b \wedge c))$$

Schreiben Sie φ_1 mit allen nach der strikten Syntax notwendigen Klammern. Sie sollen die Formel dabei *nicht* logisch umformen! Wie viele Paare von Klammern (d.h. wie viele öffnende bzw. schließende Klammern) enthält Ihr Ergebnis?

- b) Betrachten Sie nun folgende Formel:

$$\varphi_2 = (\neg(h \vee \neg(\neg(\neg(\neg(\neg k) \wedge t) \rightarrow m) \wedge (\neg m) \wedge (b \rightarrow t)) \wedge ((\neg b) \rightarrow h)) \wedge (\neg k))$$

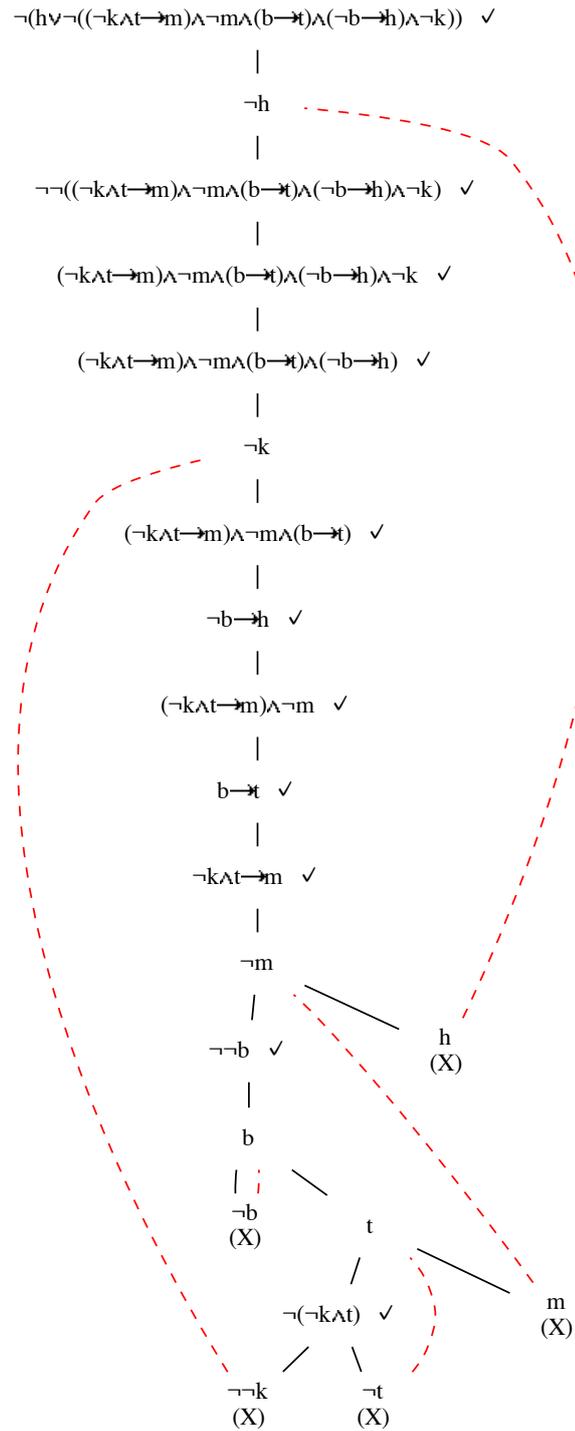
Wenden Sie das aus der Vorlesung bekannte Tableaux-Verfahren an, um ein vollständiges Tableau für φ_2 zu konstruieren. Geben Sie an, ob die Formel erfüllbar oder unerfüllbar ist. Falls die Formel erfüllbar ist, geben Sie mindestens ein Modell der Formel an.

Lösung:

- a) $\varphi_1 = (((a \vee b) \vee (c \wedge (\neg d))) \rightarrow (\neg(a \vee (\neg((a \wedge b) \wedge c))))))$

Die Darstellung braucht 10 Klammerpaare.

Lösung:

b) Die Formel φ ist unerfüllbar

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Gegeben sei die folgende prädikatenlogische Formel φ_2 mit der Signatur $\{P/1, R/2\}$:

$$\varphi_2 = \forall x P(x) \leftrightarrow \exists y \exists z (R(y, z) \vee R(z, y))$$

Verwenden Sie das in der Vorlesung gezeigte Verfahren, um φ_2 in die konjunktive Normalform zu transformieren. Geben Sie hierbei als Zwischenschritte die Negations-Normalform, die Pränex-Normalform und die Skolem-Normalform an.

Lösung:

$$\begin{aligned} & \forall x P(x) \leftrightarrow \exists y \exists z (R(y, z) \vee R(z, y)) \\ \equiv & (\forall x P(x) \rightarrow \exists y \exists z (R(y, z) \vee R(z, y))) \wedge (\exists y \exists z (R(y, z) \vee R(z, y)) \rightarrow \forall x P(x)) \\ \equiv & (\exists x \neg P(x) \vee \exists y \exists z (R(y, z) \vee R(z, y))) \wedge (\forall y \forall z \neg (R(y, z) \vee R(z, y)) \vee \forall x P(x)) \\ \equiv & (\exists x \neg P(x) \vee \exists y \exists z (R(y, z) \vee R(z, y))) \wedge (\forall y \forall z (\neg R(y, z) \wedge \neg R(z, y)) \vee \forall x P(x)) \quad \text{(NNF)} \\ \equiv & (\exists x \neg P(x) \vee \exists y \exists z (R(y, z) \vee R(z, y))) \wedge (\forall u \forall v (\neg R(u, v) \wedge \neg R(v, u)) \vee \forall w P(w)) \\ \equiv & \exists x \exists y \exists z \forall u \forall v \forall w ((\neg P(x) \vee (R(y, z) \vee R(z, y))) \wedge ((\neg R(u, v) \wedge \neg R(v, u)) \vee P(w))) \quad \text{(PNF)} \\ \equiv & \forall u \forall v \forall w ((\neg P(sk_0) \vee (R(sk_1, sk_2) \vee R(sk_2, sk_1))) \wedge ((\neg R(u, v) \wedge \neg R(v, u)) \vee P(w))) \quad \text{(SNF)} \\ \equiv & \forall u \forall v \forall w (\neg P(sk_0) \vee R(sk_1, sk_2) \vee R(sk_2, sk_1)) \wedge (\neg R(u, v) \vee P(w)) \wedge (\neg R(v, u) \vee P(w)) \quad \text{(KNF)} \\ \equiv & \{ \neg P(sk_0) \vee R(sk_1, sk_2) \vee R(sk_2, sk_1), \\ & \quad \neg R(u, v) \vee P(w), \\ & \quad \neg R(v, u) \vee P(w) \} \quad \text{(Klauselmenge)} \end{aligned}$$

Aufgabe 7 (1+2+2+1+2+2+2 Punkte)

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in der Prädikatenlogik:

1. Dr. Manhattan und der Comedian sind Wächter.
2. Jeder Wächter bewacht (mindestens einen) Verbrecher.
3. Nicht jeder, der (von irgendjemandem) bewacht wird, ist ein Verbrecher.
4. Es gibt einen Wächter, der zugleich Verbrecher ist.
5. Niemand bewacht einen Wächter.
6. Jeder Wächter außer Dr. Manhattan ist menschlich.
(Über die Menschlichkeit von Dr. Manhattan wird keine Aussage gemacht.)
7. Wer menschlich ist, macht (mindestens einen) Fehler.

Verwenden Sie hierzu

- die Konstantensymbole d und c für Dr. Manhattan und den Comedian;
- die einstelligen Prädikate
 - $W(x)$ (x ist Wächter),
 - $H(x)$ (x ist menschlich),
 - $F(x)$ (x ist ein Fehler),
 - $V(x)$ (x ist Verbrecher),
- die zweistelligen Prädikate
 - $M(x, y)$ (x macht y),
 - $B(x, y)$ (x bewacht y),
 - $= (x, y)$ oder $x = y$ (x ist gleich y);
- und die Variablenmenge $\{x, y, z, \dots\}$.

Lösung:

1. $W(d) \wedge W(c)$
2. $\forall x(W(x) \rightarrow \exists y(B(x, y) \wedge V(y)))$
3. $\exists x \exists y(B(x, y) \wedge \neg V(y))$ oder $\neg \forall y(\exists x(B(x, y)) \rightarrow V(y))$
4. $\exists x(V(x) \wedge W(x))$
5. $\forall x(W(x) \rightarrow \forall y(\neg B(y, x)))$ oder $\forall x(W(x) \rightarrow \neg \exists y B(y, x))$
6. $\forall x(W(x) \rightarrow (x = d \vee H(x)))$
7. $\forall x(H(x) \rightarrow \exists y(M(x, y) \wedge F(y)))$

Aufgabe 8 (4+5 Punkte)

Betrachten Sie $\Sigma = \langle P, F, V \rangle$ mit

- $P = \{p/1, q/2\}$
- $F = \{f/2, g/1, a/0, b/0\}$
- $V = \{X, Y, Z, \dots\}$

und die Substitution $\sigma = \{X \leftarrow a, Y \leftarrow g(Y)\}$.

- a) Geben Sie jeweils für die folgenden Paare von Termen/Atomen einen Unifikator an, oder begründen Sie kurz (1-2 Sätze/Stichworte), warum diese *nicht* unifizierbar sind. Die Begründung sollte den Kern des Problems beschreiben, der Satz "Es gibt keine Substitution, die beide Terme gleich macht" reicht nicht aus.

a1) $f(X, a)$ $f(b, X)$

a2) $\sigma(f(Y, X))$ $f(g(X), X)$

a3) $g(X)$ $g(f(b, g(X)))$

a4) $p(X)$ $p(f(b, g(Y)))$

- b) Wenden Sie das in der Vorlesung gezeigte Unifikationsverfahren auf das folgende Termpaar s, t an. Geben Sie im Erfolgsfall den Unifikator an und die gemeinsame Instanz (also den Term, der durch Anwendung des Unifikators auf einen der beiden Terme entsteht) an.

Unterstreichen Sie in jedem Schritt die Gleichung, die Sie bearbeiten, und geben Sie die Regel an, die Sie anwenden.

$$\begin{aligned} s &= f(f(X, f(g(b), a)), Y) \\ t &= f(f(a, f(Z, X)), g(Z)) \end{aligned}$$

Beispieltabelle für b)		
Gleichungen	σ	Regel
$\{f(f(X, f(g(b), a)), Y) = f(f(a, f(Z, X)), g(Z))\}$	$\{\}$	

Lösung:

- a1) Einzige gemeinsame Instanz wäre $f(b, a)$, die Variable X kann aber nicht gleichzeitig den Wert a und b annehmen. Formal: Nach der Bindung von X an einen der beiden Werte führt die Unifikation zu einem Konflikt.
- a2) $\sigma(f(Y, X)) = f(g(Y), a)$ unifiziert mit $f(g(X), X)$ mit dem Unifikator $\{Y \leftarrow a, X \leftarrow a\}$.
- a3) Ein Unifikator müßte X und $g(f(b, g(X)))$ unifizieren. Dies scheitert am *occurs-check*.
- a4) Die beiden Atome unifizieren mit $\{X \leftarrow f(b, g(Y))\}$.

Tabelle für b)		
Gleichungen	σ	Regel
$\{f(f(X,f(g(b),a)),Y)=f(f(a,f(Z,X)),g(Z))\}$	$\{\}$	Decompose $f(f(X,f(g(b),a)),Y) = f(f(a,f(Z,X)),g(Z))$
b) $\{f(X,f(g(b),a))=f(a,f(Z,X)), Y=g(Z)\}$	$\{\}$	Decompose $f(X,f(g(b),a)) = f(a,f(Z,X))$
$\{Y=g(Z), X=a, f(g(b),a)=f(Z,X)\}$	$\{\}$	Binding $Y \leftarrow g(Z)$
$\{X=a, f(g(b),a)=f(Z,X)\}$	$\{Y \leftarrow g(Z)\}$	Binding $X \leftarrow a$
$\{f(g(b),a)=f(Z,a)\}$	$\{Y \leftarrow g(Z), X \leftarrow a\}$	Decompose $f(g(b),a) = f(Z,a)$
$\{g(b)=Z, a=a\}$	$\{Y \leftarrow g(Z), X \leftarrow a\}$	Orient $g(b) = Z$
$\{a=a, Z=g(b)\}$	$\{Y \leftarrow g(Z), X \leftarrow a\}$	Decompose $a = a$
$\{Z=g(b)\}$	$\{Y \leftarrow g(Z), X \leftarrow a\}$	Binding $Z \leftarrow g(b)$
$\{\}$	$\{Y \leftarrow g(g(b)), X \leftarrow a, Z \leftarrow g(b)\}$	Success

Probe: $f(f(a, f(g(b), a)), g(g(b))) = f(f(a, f(g(b), a)), g(g(b)))$