Matrikelnummer:			
DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Stuttgart **ÜBUNGSKLAUSUR**		Fakultät Studiengang: Jahrgang / Kurs : Studienhalbjahr:	**Technik** **Informatik** **22C&22IN** **1. Semester**
Datum:	**Februar 2023**	Bearbeitungszeit:	**90 Minuten**
Modul: Unit:	**TINF1002** **Grundlagen und Logik**	Dozent:	**Stephan Schulz**
Hilfsmittel:	**Zwei beliebige Texte, Vorlesungsskript auch auf Tablet**		
Punkte:		Note:	

Aufgabe	Thema	erreichbar	erreicht
1	Mengen	11	
2	Relationen	10	
3	Scheme	11	
4	Resolution (AL)	6	
5	Syntax, Tableaux	10	
6	Normalformen (PL)	8	
7	Formalisierung (PL)	12	
8	Unifikation	9	
Summe		77	

1. Sind Sie gesund und prüfungsfähig?
2. Sind Ihre Taschen und sämtliche Unterlagen, insbesondere alle nicht erlaubten Hilfsmittel, seitlich an der Wand zum Gang hin abgestellt und nicht in Reichweite des Arbeitsplatzes?
3. Haben Sie auch außerhalb des Klausurraumes im Gebäude keine unerlaubten Hilfsmittel oder ähnliche Unterlagen liegen lassen?
4. Haben Sie Ihr Handy ausgeschaltet und abgegeben?

(Falls Ziff. 2 oder 3 nicht erfüllt sind, liegt ein Täuschungsversuch vor, der die Note „nicht ausreichend“ zur Folge hat.)

Aufgabe 1 (1+1+1+3+2+1+2 Punkte)
Betrachten Sie die Trägermenge $M = \{1, 2, 3, \ldots, 14, 15\}$ und die drei Teilmengen

- $A = \{x \in M \mid x$ enthält die Ziffer 1 genau ein mal in der Dezimaldarstellung$\}$
- $B = \{x \in M \mid x$ ist Primzahl$\}$
- $C = \{x \in M \mid x$ ist ungerade$\}$

a1) Geben Sie A explizit (als Aufzählung der Elemente) an.

a2) Geben Sie B explizit (als Aufzählung der Elemente) an.

a3) Geben Sie C explizit (als Aufzählung der Elemente) an.

b) Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm, dass die Beziehungen zwischen A, B, C und M visualisiert und die Lage aller Elemente zeigt.

c) Geben Sie die Potenzmenge $2^{A \cap C}$ an.

d) Geben Sie die Mächtigkeit $|(B \cap C) \setminus A|$ an.

e) Geben Sie $(A \cap C) \times \{3, 4\}$ an.

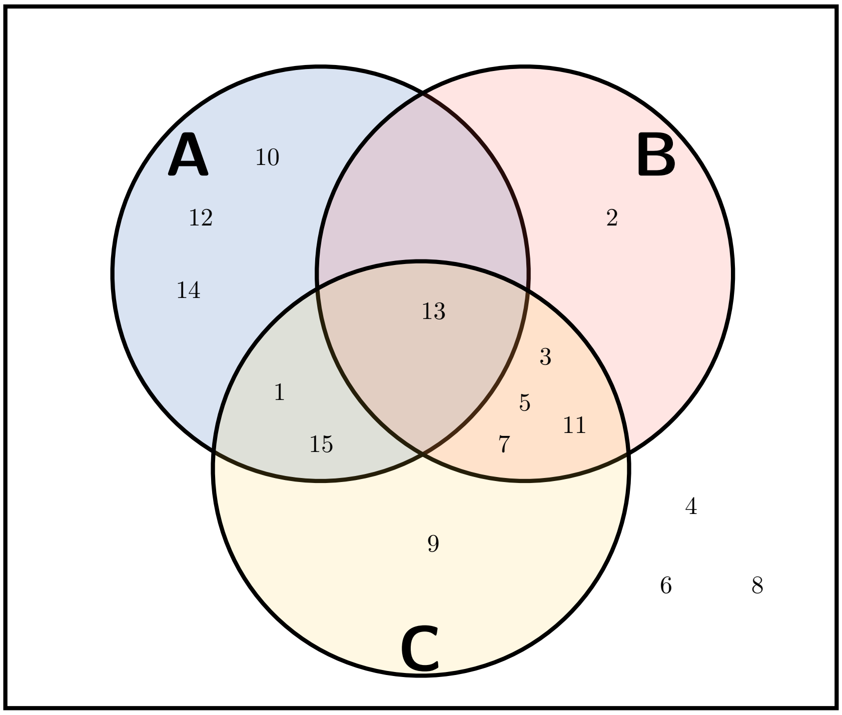
Lösung:

a1) $A = \{1, 10, 12, 13, 14, 15\}$. 11 falsch: -0.5P

a2) $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

a3) $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$

b)



4,6,8 fehlen: -1 Punkt.

c) $A \cap C = \{1, 13, 15\}$, damit $2^{A \cap C} = \{\emptyset, \{1\}, \{13\}, \{15\}, \{1, 13\}, \{1, 15\}, \{13, 15\}, \{1, 13, 15\}\}$

d) $|(B \cap C) \setminus A| = 4$

e) $A \cap C = \{1, 13, 15\}$.
Damit $(A \cap C) \times \{3, 4\} = \{(1, 3), (1, 4), (13, 3), (13, 4), (15, 3), (15, 4)$.

Fortsetzung

Aufgabe 2 (2+2+4+2 Punkte)
Betrachten Sie die Menge $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und die folgenden Relationen:

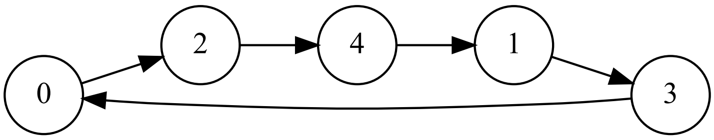
- $R = \{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 0), (4, 1)\}$.
- $S = \{(0, 1), (1, 0), (2, 3), (3, 2)\}$

a) Stellen Sie R als Graph dar.

b) Ist R eine surjektive (totale) Funktion auf A? Begründen Sie ihre Aussage kurz.

c) Bestimmen Sie $S \circ R$. Stellen Sie das Ergebnis als Tabelle dar.

d) Was ist der Wert von $|R^* \cup S|$? Begründen Sie das Ergebnis kurz.

a) 

b) R ist eine totale Funktion (jedem Wert links wird genau ein Wert rechts zugeordnet). R ist auch surjektiv - alle Werte aus A kommen im Bild von A vor.

c) $S \circ R = \{(0, 3), (1, 2), (3, 1), (4, 0)\}$

Relation $R \circ S$

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0
4	1	0	0	0	0

d) R^* ist bereits die All-Relation auf A, also $R^* = \{(x, y) \mid x, y \in A\}$. Damit gilt $|R^* \cup S| = 25$.

Fortsetzung

Aufgabe 3 (1+1+1+2+3+3 Punkte)
Betrachten Sie die folgenden Scheme-Definitionen (in der Standard-Umgebung):

```
(define a '(1 2 3))
(define b '(3 4 5))
(define c (append a b))
(define d (cons a b))

(define (dd lst)
  (if (null? lst)
      lst
      (cons (car lst)
            (cons (car lst)
                  (dd (cdr lst))))))

(define (magic lst1 lst2)
  (if (null? lst1)
      1
      (* (+ (car lst1) (car lst2))
         (magic (cdr lst1) (cdr lst2)))))
```

a) Was ist der Wert von `c`?

b) Was ist der Wert von `d`?

c1) Unterstreichen Sie in dem obigen Code alle Vorkommen von *formalen Parametern* für die Funktion `magic`.

c2) Erklären Sie kurz (1-3 Sätze/Stichworte), welche Rolle *formale Parameter* und *konkrete Parameter* bei einem Funktionsaufruf spielen.

d) Was ist der Wert von `(dd b)`?

e) Was ist der Wert von `(magic '(1 2 2 4) '(1 1 2 0))`?

Lösung:

a) `(1 2 3 3 4 5)`

b) `((1 2 3) 3 4 5)`

c1) `(define (magic` <u>`lst1`</u> <u>`lst2`</u>`) ...`

c2) *Formale Parameter* einer Funktion werden bei jedem Aufruf zu neuen lokalen Variablen in der Umgebung, in der der Rumpf ausgewertet wird. Die *konkreten Parameter* werden vor dem Funktionsaufruf ausgewertet und stellen die (initialen) Werte für diese neuen Variablen.

d) `(3 3 4 4 5 5)`

e) `96`

Fortsetzung

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Gegeben seien die Atome $\{R, S, T, X, Y, Z\}$.

Wenden Sie das in der Vorlesung gezeigten Resolutionsverfahren für die Aussagenlogik auf die Menge M an, die aus den unten angegebenen Klauseln 1–7 besteht.

1. R
2. $\neg R \vee S$
3. $\neg R \vee \neg T$
4. $T \vee \neg Z$
5. $X \vee \neg Y \vee T$
6. $\neg X \vee \neg Y$
7. $Y \vee Z$

Ist M erfüllbar oder nicht?

Lösung:

8. $\neg T$ aus 1, 3
9. $\neg Z$ aus 4, 8
10. Y aus 7, 9
11. $\neg Y \vee T$ aus 5, 6
12. $\neg Y$ aus 12, 8
13. $\square$ aus 10, 12

1 Punkt pro Schritt, 1 Punkt für richtige Antwort zur Erfüllbarkeit.

Fortsetzung

Aufgabe 5 (4+6 Punkte)

a) Betrachten Sie die folgende aussagenlogische Formel φ_1, in der einige der nach den *Vereinbarungen zum Minimieren von Klammern* unnötigen Klammern weggelassen wurden:

$$\varphi_1 = a \vee b \vee c \wedge \neg d \to \neg(a \vee \neg(a \wedge b \wedge c))$$

Schreiben Sie φ_1 mit allen nach der strikten Syntax notwendigen Klammern. Sie sollen die Formel dabei *nicht* logisch umformen! Wie viele Paare von Klammern (d.h. wie viele öffnende bzw. schließende Klammern) enthält Ihr Ergebnis?

b) Betrachten Sie nun folgende Formel:

$$\varphi_2 = (\neg(h \vee \neg((((((\neg k) \wedge t) \to m) \wedge (\neg m) \wedge (b \to t)) \wedge ((\neg b) \to h)) \wedge (\neg k))))$$

Wenden Sie das aus der Vorlesung bekannte Tableaux-Verfahren an, um ein vollständiges Tableau für φ_2 zu konstruieren. Geben Sie an, ob die Formel erfüllbar oder unerfüllbar ist. Falls die Formel erfüllbar ist, geben Sie mindestens ein Modell der Formel an.

Lösung:

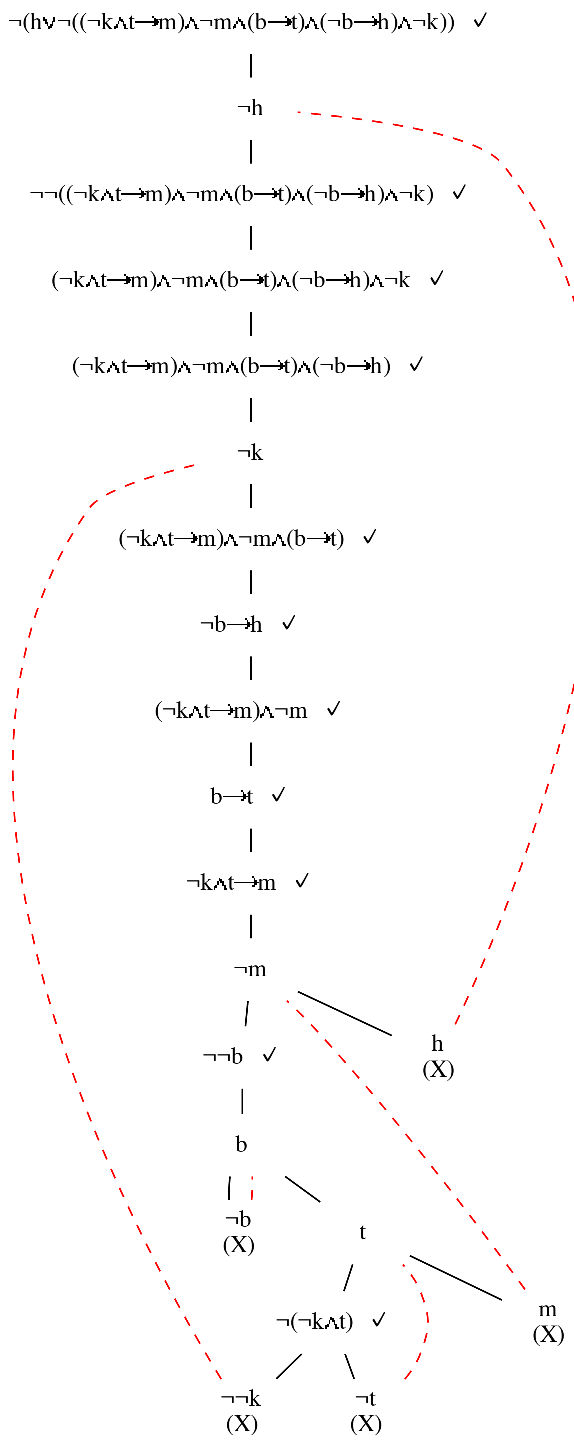
a) $\varphi_1 = (((a \vee b) \vee (c \wedge (\neg d))) \to (\neg(a \vee (\neg((a \wedge b) \wedge c)))))$

Die Darstellung braucht 10 Klammerpaare.

Fortsetzung

$$\varphi_2 = (\neg(h \vee \neg((((((\neg k) \wedge t) \to m) \wedge (\neg m) \wedge (b \to t)) \wedge ((\neg b) \to h)) \wedge (\neg k))))$$

Lösung:



b) Die Formel φ ist unerfüllbar

Aufgabe 6 (8 Punkte)
Gegeben sei die folgende prädikatenlogische Formel φ_2 mit der Signatur $\{P/1, R/2\}$:

$$\varphi_2 = \forall x P(x) \leftrightarrow \exists y \exists z (R(y,z) \lor R(z,y))$$

Verwenden Sie das in der Vorlesung gezeigte Verfahren, um φ_2 in die konjunktive Normalform zu transformieren. Geben Sie hierbei als Zwischenschritte die Negations-Normalform, die Pränex-Normalform und die Skolem-Normalform an. Geben Sie das Endergebnis als Menge von Klauseln an.

Lösung:

$$\begin{aligned}
& \forall x P(x) \leftrightarrow \exists y \exists z (R(y,z) \lor R(z,y)) \\
\equiv\ & (\forall x P(x) \to \exists y \exists z (R(y,z) \lor R(z,y))) \land (\exists y \exists z (R(y,z) \lor R(z,y)) \to \forall x P(x)) \\
\equiv\ & (\exists x \neg P(x) \lor \exists y \exists z (R(y,z) \lor R(z,y))) \land (\forall y \forall z \neg (R(y,z) \lor R(z,y)) \lor \forall x P(x)) \\
\equiv\ & (\exists x \neg P(x) \lor \exists y \exists z (R(y,z) \lor R(z,y))) \land (\forall y \forall z (\neg R(y,z) \land \neg R(z,y)) \lor \forall x P(x)) \ \textbf{(NNF)} \\
\equiv\ & (\exists x \neg P(x) \lor \exists y \exists z (R(y,z) \lor R(z,y))) \land (\forall u \forall v (\neg R(u,v) \land \neg R(v,u)) \lor \forall w P(w)) \\
\equiv\ & \exists x \exists y \exists z \forall u \forall v \forall w ((\neg P(x) \lor (R(y,z) \lor R(z,y))) \land ((\neg R(u,v) \land \neg R(v,u)) \lor P(w))) \ \textbf{(PNF)} \\
\equiv\ & \forall u \forall v \forall w ((\neg P(sk_0) \lor (R(sk_1, sk_2) \lor R(sk_2, sk_1))) \land ((\neg R(u,v) \land \neg R(v,u)) \lor P(w))) \ \textbf{(SNF)} \\
\equiv\ & \forall u \forall v \forall w (\neg P(sk_0) \lor R(sk_1, sk_2) \lor R(sk_2, sk_1)) \land (\neg R(u,v) \lor P(w)) \land (\neg R(v,u)) \lor P(w)) \ \textbf{(KNF)} \\
\equiv\ & \{\neg P(sk_0) \lor R(sk_1, sk_2) \lor R(sk_2, sk_1), \\
& \neg R(u,v) \lor P(w), \\
& \neg R(v,u)) \lor P(w)\} \ \textbf{(Klauselmenge)}
\end{aligned}$$

Fortsetzung

Aufgabe 7 (1+2+2+1+2+2+2 Punkte)
Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in der Prädikatenlogik:

1. Dr. Manhattan und der Comedian sind Wächter.
2. Jeder Wächter bewacht (mindestens einen) Verbrecher.
3. Nicht jeder, der (von irgendjemandem) bewacht wird, ist ein Verbrecher.
4. Es gibt einen Wächter, der zugleich Verbrecher ist.
5. Niemand bewacht einen Wächter.
6. Jeder Wächter außer Dr. Manhattan ist menschlich.
   (Über die Menschlichkeit von Dr. Manhattan wird keine Aussage gemacht.)
7. Wer menschlich ist, macht (mindestens einen) Fehler.

Verwenden Sie hierzu

- die Konstantensymbole d und c für Dr. Manhattan und den Comedian;
- die einstelligen Prädikate
  - $W(x)$ (x ist Wächter),
  - $H(x)$ (x ist menschlich),
  - $F(x)$ (x ist ein Fehler),
  - $V(x)$ (x ist Verbrecher),
- die zweistelligen Prädikate
  - $M(x, y)$ (x macht y),
  - $B(x, y)$ (x bewacht y),
  - $=(x, y)$ oder $x = y$ (x ist gleich y);
- und die Variablenmenge $\{x, y, z, \ldots\}$.

Lösung:

1. $W(d) \wedge W(c)$
2. $\forall x(W(x) \rightarrow \exists y(B(x, y) \wedge V(y)))$
3. $\exists x \exists y(B(x, y) \wedge \neg V(y))$ oder $\neg \forall y(\exists x(B(x, y)) \rightarrow V(y))$
4. $\exists x(V(x) \wedge W(x))$
5. $\forall x(W(x) \rightarrow \forall y(\neg B(y, x)))$ oder $\forall x(W(x) \rightarrow \neg \exists y B(y, x))$
6. $\forall x(W(x) \rightarrow (x = d \vee H(x))$
7. $\forall x(H(x) \rightarrow \exists y(M(x, y) \wedge F(y)))$

Fortsetzung

Aufgabe 8 (4+5 Punkte)
Betrachten Sie $\Sigma = \langle P, F, V \rangle$ mit

- $P = \{p/1, q/2\}$
- $F = \{f/2, g/1, a/0, b/0\}$
- $V = \{X, Y, Z, \ldots\}$

und die Substitution $\sigma = \{X \leftarrow a, Y \leftarrow g(Y)\}$.

a) Geben Sie jeweils für die folgenden Paare von Termen/Atomen einen Unifikator an, oder begründen Sie kurz (1-2 Sätze/Stichworte), warum diese *nicht* unifizierbar sind. Die Begründung sollte den Kern des Problems beschreiben, der Satz "Es gibt keine Substitution, die beide Terme gleich macht" reicht nicht aus.

a1)	$f(X, a)$	$f(b, X)$
a2)	$\sigma(f(Y, X))$	$f(g(X), X)$
a3)	$g(X)$	$g(f(b, g(X)))$
a4)	$p(X)$	$p(f(b, g(Y)))$

b) Wenden Sie das in der Vorlesung gezeigte Unifikationsverfahren auf das folgende Termpaar s, t an. Geben Sie im Erfolgsfall den Unifikator an und die gemeinsame Instanz (also den Term, der durch Anwendung des Unifikators auf einen der beiden Terme entsteht) an.

Unterstreichen Sie in jedem Schritt die Gleichung, die Sie bearbeiten, und geben Sie die Regel an, die Sie anwenden. Sie finden auf der nächsten Seite eine geeignete Tabelle.

$$\begin{aligned} s &= f(f(X, f(g(b), a)), Y) \\ t &= f(f(a, f(Z, X)), g(Z)) \end{aligned}$$

Fortsetzung

Tabelle für **b)**

Gleichungen	σ	Regel
$\{f(f(X, f(g(b), a)), Y) = f(f(a, f(Z, X)), g(Z))\}$	$\{\}$	

Fortsetzung

Lösung:

a1) Einzige gemeinsame Instanz wäre $f(b,a)$, die Variable X kann aber nicht gleichzeitig den Wert a und b annehmen. Formal: Nach der Bindung von X an einen der beiden Werte führt die Unifikation zu einem Konflikt.

a2) $\sigma(f(Y,X)) = f(g(Y),a)$ unifiziert mit $f(g(X),X)$ mit dem Unifikator $\{Y \leftarrow a, X \leftarrow a\}$.

a3) Ein Unifikator müßte X und $g(f(b,g(X)))$ unifizieren. Dies scheitert am *occurs-check*.

a4) Die beiden Atome unifizieren mit $\{X \leftarrow f(b,g(Y))\}$.

b)

Tabelle für **b)** Gleichungen	σ	Regel
{f(f(X,f(g(b),a)),Y)=f(f(a,f(Z,X)),g(Z))}	{}	Decompose f(f(X,f(g(b),a)),Y) = f(f(a,f(Z,X)),g(Z))
{f(X,f(g(b),a))=f(a,f(Z,X)), Y=g(Z)}	{}	Decompose f(X,f(g(b),a)) = f(a,f(Z,X))
{Y=g(Z), X=a, f(g(b),a)=f(Z,X)}	{}	Binding Y ← g(Z)
{X=a, f(g(b),a)=f(Z,X)}	{Y←g(Z)}	Binding X ← a
{f(g(b),a)=f(Z,a)}	{Y←g(Z),X←a}	Decompose f(g(b),a) = f(Z,a)
{g(b)=Z, a=a}	{Y←g(Z),X←a}	Orient g(b) = Z
{a=a, Z=g(b)}	{Y←g(Z),X←a}	Decompose a = a
{Z=g(b)}	{Y←g(Z),X←a}	Binding Z ← g(b)
{}	{Y←g(g(b)),X←a,Z←g(b)}	Success

Probe: $f(f(a,f(g(b),a)),g(g(b))) = f(f(a,f(g(b),a)),g(g(b)))$

– Ende der Klausur –