Matrikelnummer:			
Duale Hochschule Baden-Württemberg Stuttgart		Fakultät	**Technik**
		Studiengang:	**Angewandte Informatik**
		Jahrgang / Kurs :	**2015 / 15C&15K**
ÜBUNGSKLAUSUR		Studienhalbjahr:	**1. Semester**
Datum:	**23. Februar 2016**	Bearbeitungszeit:	**90 Minuten**
Modul:	**TINF1002**	Dozent:	**Stephan Schulz**
Unit:	**Grundlagen und Logik**		
Hilfsmittel:	**Zwei Texte, z.B. Vorlesungsskript, eigene Notizen**		
Punkte:		Note:	

Aufgabe	erreichbar	erreicht
1	4	
2	9	
3	9	
4	9	
5	7	
6	7	
7	5	
8	5	
9	9	
Summe	64	

1. Sind Sie gesund und prüfungsfähig?
2. Sind Ihre Taschen und sämtliche Unterlagen, insbesondere alle nicht erlaubten Hilfsmittel, seitlich an der Wand zum Gang hin abgestellt und nicht in Reichweite des Arbeitsplatzes?
3. Haben Sie auch außerhalb des Klausurraumes im Gebäude keine unerlaubten Hilfsmittel oder ähnliche Unterlagen liegen lassen?
4. Haben Sie Ihr Handy ausgeschaltet und abgegeben?

(Falls Ziff. 2 oder 3 nicht erfüllt sind, liegt ein Täuschungsversuch vor, der die Note „nicht ausreichend“ zur Folge hat.)

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)
Betrachten Sie die Mengen $A = \{a, b, c\}$ und $B = \{b, c, d\}$

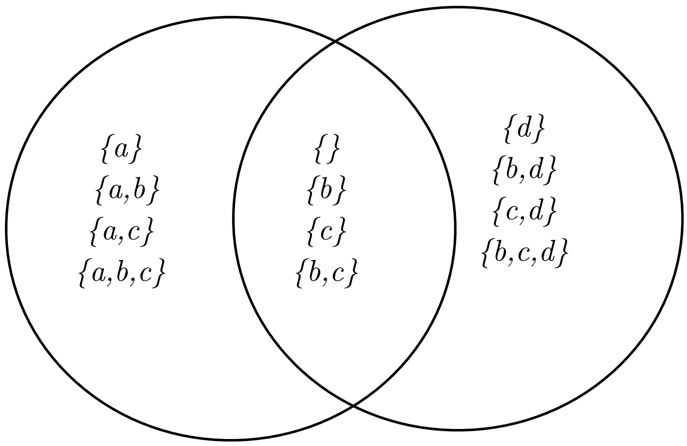
a) Bestimmen Sie die Potenzmengen 2^A und 2^B.

b) Stellen Sie 2^A, 2^B und $2^A \cap 2^B$ in einem gemeinsamen Venn-Diagramm dar.

Lösung:

a)
- $2^A = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $2^B = \{\{\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}\}$

b) Venn-Diagramm:



Aufgabe 2 (3+3+3 Punkte)
Zur Erinnerung: In der Vorlesung haben wir *Funktionen* als eine spezielle Art von *Relationen* definiert. Betrachten Sie die Menge $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und die Funktion/Relation $f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$.

a) Ist diese Funktion/Relation f:

- eine homogene Relation?
- eine binäre Relation?
- reflexiv?
- symmetrisch?
- transitiv?
- surjektiv?

b) Betrachten Sie nun zusätzlich die Funktion $g : A \to A$ definiert durch $g(x) = x$ für alle $x \in A$.

b1) Bestimmen Sie $f \cup g$
  * Geben Sie das Ergebnis als Tupelmenge an.
  * Visualisieren Sie $f \cup g$ als Relationsgraph.
  * Ist $f \cup g$ eine Funktion? Begründen Sie Ihre Aussage.

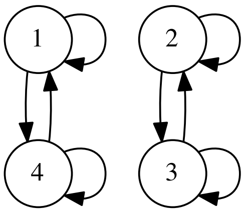
b2) Bestimmen Sie $f \circ g$
  * Geben Sie das Ergebnis als Tupelmenge an.
  * Stellen Sie $f \circ g$ in Tabellenform dar.
  * Ist $f \circ g$ bijektiv? Begründen Sie Ihre Aussage.

Lösung:

a)
- f ist homogen
- f ist binär
- f ist nicht reflexiv
- f ist symmetrisch
- f ist nicht transitiv
- f ist surjektiv

b)

b1) $f \cup g = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$



$f \cup g$ ist keine Funktion, da nicht rechtseindeutig ($(1, 4) \in f$ und $(1, 1) \in f$).

b2) $f \circ g = f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$

$f \circ g$	1	2	3	4
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	1	0	0	0

$f \circ g$ ist bijektiv, da jedem Element genau ein Element zugeordnet ist,
d.h. $f \circ g$ ist injektiv und surjektiv.

Fortsetzung

Aufgabe 3 (2+3+4 Punkte)
Betrachten Sie die folgenden Scheme-Definitionen:

```
(define k1 '(1 2 3 4 5 6))
(define k2 '(6 5 4 3 2 1))
(define k3 (append (cddr k1) (cons '7 k2)))

(define (fun x)
  (< x 4))

(define (funmaker y z)
  (lambda (x) (and (<= y x)
                   (<= x z))))

(define (function f k)
  (if (null? k)
      '()
      (let ((z (car k))
            (rst (function f (cdr k))))
        (if (f z)
            (cons z rst)
            rst))))
```

a) Was ist der Wert von `k3`?

b) Was ist das Ergebnis von `(function fun k2)`?

d) Was ist das Ergebnis von `(function (funmaker 2 4) k3)`?

Lösung:

a) `(3 4 5 6 7 6 5 4 3 2 1)`

b) `(3 2 1)` (Alle Zahlen aus `k2` kleiner 4)

d) `(3 4 4 3 2)` (Alle Zahlen aus `k3` zwischen 2 und 4)

Aufgabe 4 (7+2 Punkte)
Betrachten Sie die folgende aussagenlogische Formel:

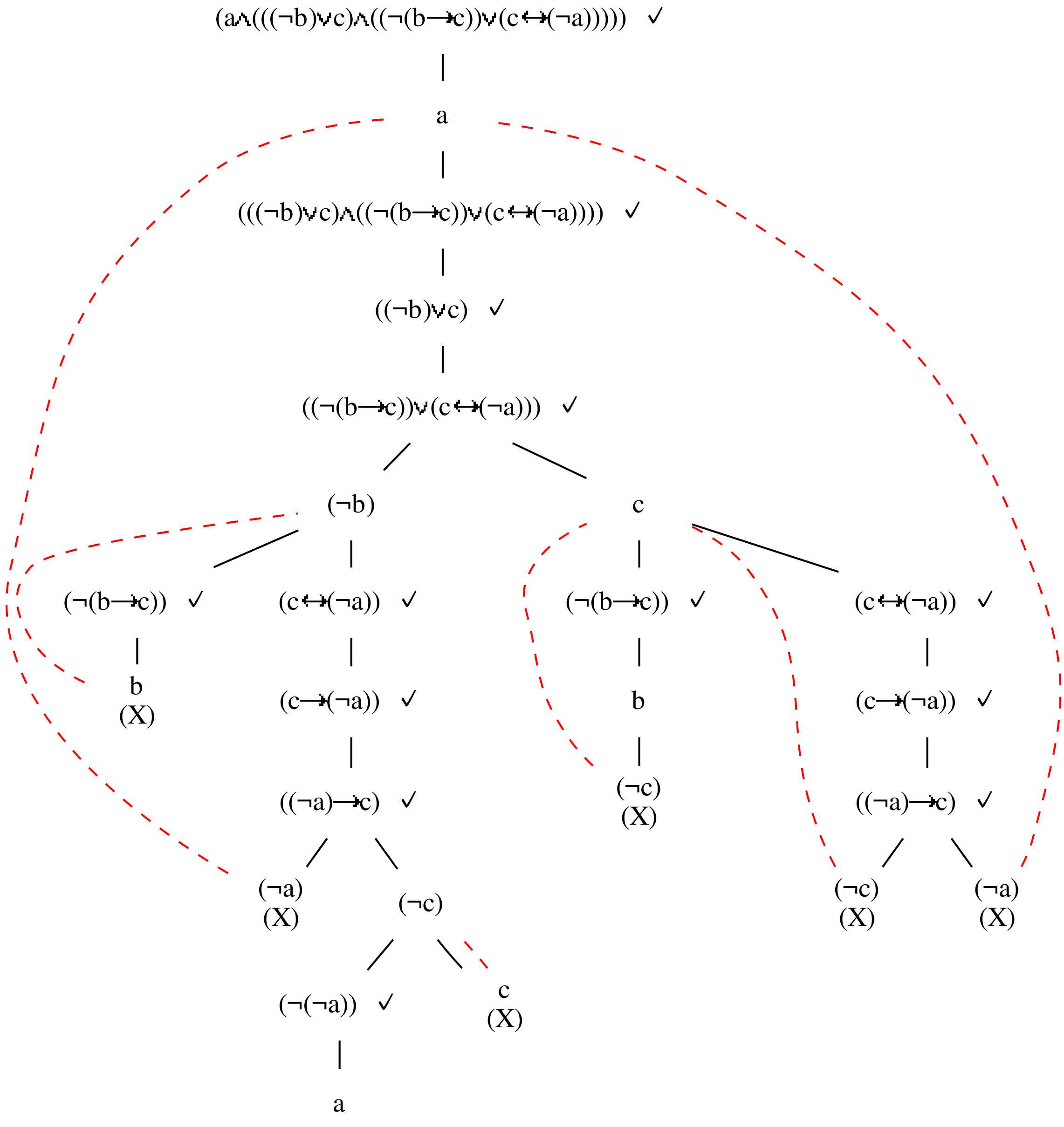
$$\varphi = a \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg(b \rightarrow c) \vee (c \leftrightarrow \neg a))$$

a) Verwenden Sie das in der Vorlesung gezeigten Tableaux-Verfahren, um ein vollständiges Tableau für φ zu erzeugen.

b) Ist φ erfüllbar? Wenn ja, geben Sie ein Modell für φ an.

Lösung:

a) Tableau:



b) φ ist erfüllbar mit $\{a, \neg b, \neg c\}$

Fortsetzung

Aufgabe 5 (3+4 Punkte)

a) 3-SAT ist ein wichtiger Spezialfall der Aussagenlogik. Dabei sind nur Klauseln der Länge 3 oder kürzer erlaubt. Geben Sie eine unerfüllbare aussagenlogische Klauselmenge an, in der alle Klauseln *genau* 3 (verschiedene) Literale haben (die Konstanten $\top$ und $\bot$ sind dabei verboten).

b) Konvertieren Sie die folgende Formel in Konjunktive Normalform und schreiben Sie das Ergebnis als Klauselmenge:

$$\varphi = (((a \vee b) \leftrightarrow c) \wedge a)$$

Lösung:

a) $$\psi = \left\{ \begin{array}{l} a \vee b \vee c \\ a \vee b \vee \neg c \\ a \vee \neg b \vee c \\ a \vee \neg b \vee \neg c \\ \neg a \vee b \vee c \\ \neg a \vee b \vee \neg c \\ \neg a \vee \neg b \vee c \\ \neg a \vee \neg b \vee \neg c \end{array} \right\}$$

b) $$\begin{array}{rcll} \varphi & \equiv & ((a \vee b) \leftrightarrow c) \wedge a & \\ & \equiv & ((a \vee b) \rightarrow c) \wedge (c \rightarrow (a \vee b)) \wedge a & \text{Eliminieren von } \leftrightarrow \\ & \equiv & (\neg(a \vee b) \vee c) \wedge (\neg c \vee a \vee b) \wedge a & \text{Eliminieren von } \rightarrow \\ & \equiv & ((\neg a \wedge \neg b) \vee c) \wedge (\neg c \vee a \vee b) \wedge a & \text{De-Morgan} \\ & \equiv & (\neg a \vee c) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg c \vee a \vee b) \wedge a & \text{Distributivität} \end{array}$$

Als Klauselmenge: $\varphi = \{\neg a \vee c, \neg b \vee c, \neg c \vee a \vee b, a\}$

Fortsetzung

Aufgabe 6 (2+3+2 Punkte)
Betrachten Sie folgenden Sachverhalt:

> Das Fahrwerk eines Flugzeugs kann entweder eingefahren oder ausgefahren sein. Wenn das Fahrwerk eingefahren ist, kann das Flugzeug nicht sicher landen. Wenn das Fahrwerk ausgefahren ist, verbraucht das Flugzeug viel Treibstoff. Wenn das Flugzeug startet, verbraucht es viel Treibstoff. Das Flugzeug landet nur, wenn die Landung sicher ist.

a) Identifizieren Sie die atomaren Aussagen.

b) Formalisieren Sie den Sachverhalt als Formelmenge KB.

c) Formalisieren Sie die Behauptung B, dass das Flugzeug bei Start und Landung viel Treibstoff verbraucht. Stellen Sie eine Formel auf, die allgemeingültig ist, wenn $KB \models B$ gilt.

Lösung:

a) Atomare Aussagen:

e: Fahrwerk eingefahren

s: Flugzeug kann sicher landen

a: Flugzeug startet (hebt ab ;-))

t: Flugzeug verbraucht viel Treibstoff

l: Flugzeug landet

b) KB:

$e \to \neg s$

$\neg e \to t$

$a \to t$

$l \to s$

c) B: $(a \lor l) \to t$
$KB \models B$ gdw. $\models ((e \to \neg s) \land (\neg e \to t) \land (a \to t) \land (l \to s)) \to ((a \lor l) \to t)$

Fortsetzung

Aufgabe 7 (5 Punkte)
Betrachten Sie die folgende Klauselmenge:

1. $\neg e \vee s \vee l$
2. $e \vee t$
3. $\neg s \vee t$
4. $\neg l \vee s$
5. $s \vee l$
6. $\neg t \vee \neg s$

Entscheiden Sie per Resolution, ob die Menge erfüllbar ist. Nummerieren Sie die Zwischenschritte, und geben Sie die Eltern der neu hergeleiteten Klauseln an.

Lösung:

7. $\neg s$ (aus 6 und 3)
8. $\neg l$ (aus 7 und 4)
9. s (aus 8 und 5)
10. $\Box$ (aus 9 und 7)

Aufgabe 8 (5 Punkte)
Sei Σ eine aussagenlogische Signatur. Zeigen Sie folgende Behauptung: Für alle $A \in For0_\Sigma$ gilt: A enthält gleich viele öffnende und schließende Klammern. Sie können sich auf Formeln mit den Operatoren $\{\neg, \vee, \wedge\}$ beschränken.
Hinweis: Verwenden Sie Induktion über den Aufbau.

Lösung:

Beweis: Per Induktion über den Aufbau. Bezeichne $f_($ und $f_)$ die Anzahl der öffnenden bzw. schließenden Klammern in f.

IA: Sei A atomar, also $A \in \Sigma$. Dann enthält A keine Klammern, also 0 öffnende und 0 schließende Klammern, und die Behauptung gilt für A.

IV: Die Behauptung gelte für $B, C \in For0_\Sigma$, also: $B_(= B_)$ und $C_(= C_)$.

IS: Sei A nicht atomar. Dann gilt hat A eine der folgenden Formen:

- $A = (\neg B)$. Dann gilt: $A_(= B_(+ 1 =(IV) B_) + 1 = A_)$. Also gilt die Behauptung für diesen Fall.
- $A = (B \vee C)$. Dann gilt: $A_(= B_(+ C_(+ 1 =(IV) B_) + C_) + 1 = A_)$. Also gilt die Behauptung für diesen Fall.
- $A = (B \wedge C)$: Analog.

Also gilt die Behauptung für alle zu betrachtenden Fälle und damit für alle Formeln aus $For0_\Sigma$.

q.e.d.

Fortsetzung

Aufgabe 9 (2+2+5 Punkte)

a) Sei $\Sigma = \langle P, F, V\rangle$ mit $P = \{p/3\, q/2\}$, $F = \{f/1, g/4, a/0\}$, $V = \{X, Y, U, W \ldots\}$. Verwenden Sie das in der Vorlesung gezeigten Unifikationsverfahren, um einen Unifikator für die Formelpaare (φ_1, φ_2) und (ψ_1, ψ_2), zu finden. Geben Sie, falls möglich, einen Unifikator sowie die unifizierte Formel an.

Hierbei sind p, q Relationssymbole, f und g sind Funktionssymbole, c und d sind Konstantensymbole, X, Y, U, W sind Variablen.

a1) $\begin{array}{lcl} \varphi_1 & = & p(f(X), f(d), f(X)) \\ \varphi_2 & = & p(U, W, f(d)) \end{array}$

a2) $\begin{array}{lcl} \psi_1 & = & q(c, g(f(X), c, f(X), f(Y))) \\ \psi_2 & = & q(W, g(U, W, f(U), f(f(c)))) \end{array}$

b) Sei $\Sigma = \langle\{lt/2, s/1\}, \{c/2, 1/0, 2/0, 3/0, n/0\}, \{X, Y, Z, U \ldots\}\rangle$. Zeigen Sie per Resolution, dass die folgende Klauselmenge unerfüllbar ist. Geben Sie zu jeder neuen Klausel die Eltern und den Unifikator an.

1. $lt(1, 2)$
2. $lt(2, 3)$
3. $s(n)$
4. $s(c(U, n))$
5. $\neg lt(X, Y) \vee \neg s(c(Y, Z)) \vee s(c(X, c(Y, Z)))$
6. $\neg s(c(1, c(2, c(3, n))))$

Hinweis: Denken Sie an eine Liste von Zahlen, wobei n für die leere Liste steht, c für `cons` und s für *sortiert.*

Lösung:

a)

$p(f(X), f(d), f(X)) = p(U, W, f(d))$	$\{\}$	Decompose
$f(X) = U, f(d) = W, f(X) = f(d)$	$\{\}$	Orient&Bind (W)
$f(X) = U, f(X) = f(d)$	$\{W \leftarrow f(d)\}$	Decompose
$f(X) = U, X = d$	$\{W \leftarrow f(d)\}$	Bind (X)
$f(d) = U$	$\{W \leftarrow f(d), X \leftarrow d\}$	Orient&Bind (U)
-	$\{W \leftarrow f(d), X \leftarrow d, U \leftarrow f(d)\}$	

$\sigma(\psi_1)$: p(f(d), f(d), f(d))

{q(c,g(f(X),c,f(X),f(Y)))=q(W,g(U,W,f(U),f(f(c))))}	{}	Decompose q(c,g(f(X),c,f(X),f(Y))) = q(W
{c=W, g(f(X),c,f(X),f(Y))=g(U,W,f(U),f(f(c)))}	{}	Orient c = W
{g(f(X),c,f(X),f(Y))=g(U,W,f(U),f(f(c))), W=c}	{}	Decompose g(f(X),c,f(X),f(Y)) = g(U,W,f
{W=c, f(X)=U, c=W, f(X)=f(U), f(Y)=f(f(c))}	{}	Binding W ← c
{f(X)=U, c=c, f(X)=f(U), f(Y)=f(f(c))}	{W←c}	Orient f(X) = U
{c=c, f(X)=f(U), f(Y)=f(f(c)), U=f(X)}	{W←c}	Decompose c = c
{f(X)=f(U), f(Y)=f(f(c)), U=f(X)}	{W←c}	Decompose f(X) = f(U)
{f(Y)=f(f(c)), U=f(X), X=U}	{W←c}	Decompose f(Y) = f(f(c))
{U=f(X), X=U, Y=f(c)}	{W←c}	Binding U ← f(X)
{X=f(X), Y=f(c)}	{U←f(X),W←c}	Occurs-FAIL X != f(X)

b)

7. $\neg lt(1, 2) \vee \neg s(c(2, c(3, n)))$ (6,5) mit $\sigma = \{X \leftarrow 1, Y \leftarrow 2, Z \leftarrow c(3, n)\}$
8. $\neg s(c(2, c(3, n)))$ (7,1) mit $\sigma = \{\}$
9. $\neg lt(2, 3) \vee \neg s(c(3, n))$ (8,5) $\sigma = \{X \leftarrow 2, Y \leftarrow 3, Z \leftarrow n\}$
10. $\neg s(c(3, n))$ (9,2) $\sigma = \{\}$
11. $\square$ (10, 4) mit $\sigma = \{U \leftarrow 3\}$

Fortsetzung

– Ende der Klausur –