Matrikelnummer:	

ÜBUNGSKLAUSUR

Fakultät	**Technik**
Studiengang:	**Informatik**
Jahrgang / Kurs :	**19C&19IN**
Studienhalbjahr:	**1. Semester**

Datum:	**21. Februar 2024**	Bearbeitungszeit:	**90 Minuten**
Modul:	**TINF1002**	Dozent:	**Stephan Schulz**
Unit:	**Grundlagen und Logik**		
Hilfsmittel:	**Zwei beliebige Papierwerke, Skript auch auf Tablet im Flugmodus**		
Punkte:		Note:	

Aufgabe	Stichwort	erreichbar	erreicht
1	Mengen	11	
2	Relationen	11	
3	Scheme	11	
4	Resolution	9	
5	Tableaux	9	
6	KNF	8	
7	Formalisierung	10	
8	Unifikation	9	
Summe		78	

1. Sind Sie gesund und prüfungsfähig?
2. Sind Ihre Taschen und sämtliche Unterlagen, insbesondere alle nicht erlaubten Hilfsmittel, seitlich an der Wand zum Gang hin abgestellt und nicht in Reichweite des Arbeitsplatzes?
3. Haben Sie auch außerhalb des Klausurraumes im Gebäude keine unerlaubten Hilfsmittel oder ähnliche Unterlagen liegen lassen?
4. Haben Sie Ihr Handy ausgeschaltet und abgegeben?

(Falls Ziff. 2 oder 3 nicht erfüllt sind, liegt ein Täuschungsversuch vor, der die Note „nicht ausreichend“ zur Folge hat.)

Aufgabe 1 (1+1+1+3+2+1+2 Punkte)
Zur Erinnerung: Die Quersumme $q(x)$ einer Zahl x ist die Summe der einzelnen Ziffern (in der Dezimaldarstellung). Es gilt z.B. $q(912) = 12$; $q(5) = 5$.

Gegeben seien die Trägermenge $M = \{1, 2, 3, \ldots, 14, 15\}$ und die drei Teilmengen

- $A = \{x \in M \mid q(x) \leq 4\}$
- $B = \{x \in M \mid x \text{ ist glatt durch 3 teilbar}\}$
- $C = \{x \in M \mid x \text{ ist gerade}\}$

a1) Geben Sie A explizit (als Aufzählung der Elemente) an.

a2) Geben Sie B explizit (als Aufzählung der Elemente) an.

a3) Geben Sie C explizit (als Aufzählung der Elemente) an.

b) Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm, das die Beziehungen zwischen A, B, C und M visualisiert und die Lage *aller* Elemente zeigt.

c) Geben Sie die Potenzmenge $2^{(A \cap C) \setminus B}$ an.

d) Geben Sie die Mächtigkeit $|(B \cap C) \cup A|$ an.

e) Geben Sie $(A \cap C) \times \{3, 4\}$ an.

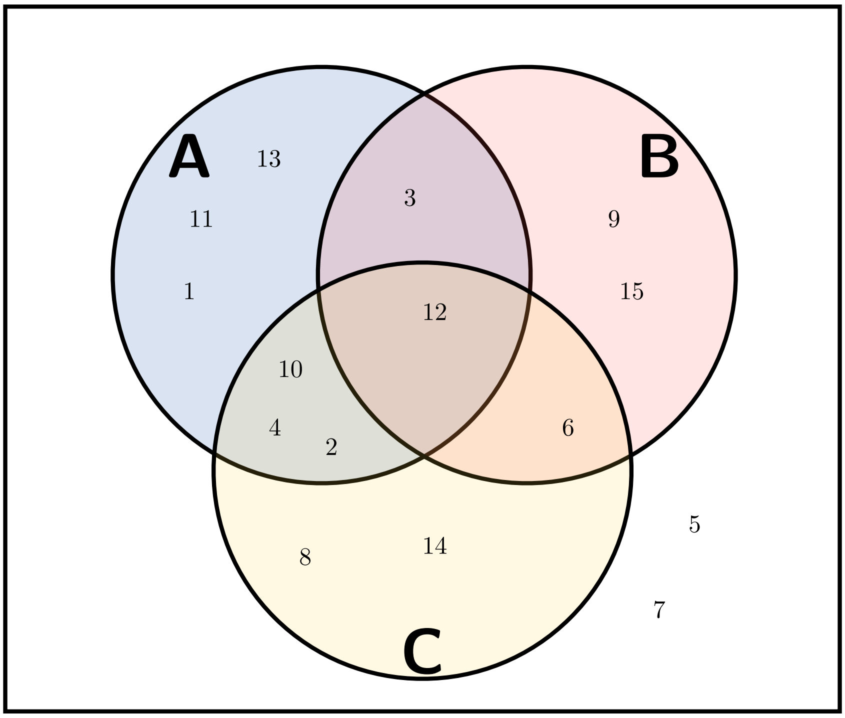
Lösung:

a1) $A = \{1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13\}$.

a2) $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

a3) $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

b)



5, 7 fehlen: -1 Punkt.

c) $A \cap C = \{2, 4, 10, 12\}$, damit $(A \cap C) \setminus B = \{2, 4, 10\}$ und $2^{(A \cap C) \setminus B} = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{10\}, \{2, 4\}, \{2, 10\}, \{4, 10\}, \{2, 4, 10\}\}$

d) $|(B \cap C) \cup A| = |\{1, 2, 3, 4, 6, 10, 11, 12, 13\}| = 9$

e) $A \cap C = \{2, 4, 10, 12\}$.
Damit $(A \cap C) \times \{3, 4\} = \{(2, 3), (2, 4), (4, 3), (4, 4), (10, 3), (10, 4), (12, 3), (12, 4)\}$.

Fortsetzung

Aufgabe 2 (2+2+2+2+3 Punkte)
Betrachten Sie die Menge $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ und die binären Relationen R (siehe Abbildung) und $S = \{(a, e), (d, e), (b, f), (c, f)\}$ über A.

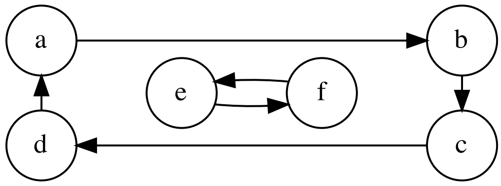


Abbildung 1: Relationsgraph für Relation R

a) Stellen Sie R als Tabelle dar.

b) Stellen Sie $S \circ R$ als Menge von Tupeln dar.

c) Geben Sie die Relation S^* (die reflexive transitive Hülle von S) als Menge von Tupeln an.

d) Stellen Sie die Relation $R \cup S$ als Relationsgraph dar.

e) Stellen Sie $(R \cup S)^*$ als Tabelle dar.

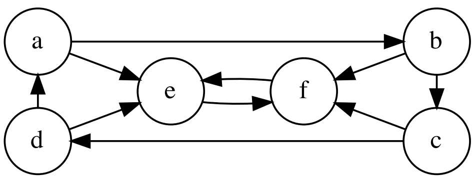
Lösung:

a)

	a	b	c	d	e	f
a	0	1	0	0	0	0
b	0	0	1	0	0	0
c	0	0	0	1	0	0
d	1	0	0	0	0	0
e	0	0	0	0	0	1
f	0	0	0	0	1	0

b) $S \circ R = \{(a, f), (b, f), (c, e), (d, e)\}$

c) $S^* = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (a, e), (b, f), (d, e), (c, f)\}$



d)

e)

	a	b	c	d	e	f
a	1	1	1	1	1	1
b	1	1	1	1	1	1
c	1	1	1	1	1	1
d	1	1	1	1	1	1
e	0	0	0	0	1	1
f	0	0	0	0	1	1

Fortsetzung

Aufgabe 3 (1+2+3+3+2 Punkte)
Betrachten Sie die folgenden Scheme-Definitionen (in der Standard-Umgebung). Die Funktion `even?` gibt `#t` zurück, wenn die Eingabe eine gerade Integer-Zahl ist, `#f` für ungerade Zahlen:

```
(define steve '(1 2 3 4))
(define miller '(2 3 4 5))

(define (abra lst)
  (if (or (null? lst) (null? (cdr lst)))
      lst
      (if (equal? (car lst) (cadr lst))
          (abra (cdr lst))
          (cons (car lst)
                (abra (cdr lst))))))

(define cadabra '(1 1 2 2 1 2 2 3 3 3))

(define band (map (lambda (x) (if (even? x) (+ x 1) (* x 3))) miller))
```

a) Was ist der Wert von `(length (cons steve miller))`?

b) Was ist der Wert von `(length (append steve miller))`?

c) Was ist der Wert von `(abra cadabra)`?

d) Was ist der Wert von `band`?

e) Was ist der Wert der *konkreten Parametera* für die Funktion `cons` in `(length (cons steve miller))`

Lösung:

a) 5

b) 8

c) `(1 2 1 2 3)`

d) `(3 9 5 15)`

e) `(1 2 3 4)` und `(2 3 4 5)`

Fortsetzung

Aufgabe 4 (9 Punkte)
Gegeben sei die Prädikatenlogische Signatur (P, F, V) mit $P = \{A/1, B/2\}$, $F = \{c/0, f/1\}$ und $V = \{r, s, t, x, y, \ldots\}$.

Wenden Sie das in der Vorlesung gezeigten Resolutionsverfahren für die Prädikatenlogik auf die Menge M an, die aus den unten angegebenen Klauseln 1–5 besteht. Falls für einen Resolutionsschritt ein nicht-trivialer Unifikator notwendig ist (d.h. einer, bei dem mindestens eine Variable auf einen anderen Term abgebildet wird) geben Sie jeweils den entsprechenden Unifikator an.

1. $A(c)$
2. $\neg A(x) \vee A(f(x))$
3. $B(y, f(y))$
4. $\neg B(r, s) \vee B(r, t) \vee \neg B(s, t)$
5. $\neg A(f(f(c))) \vee \neg B(c, f(f(c)))$

Ist M erfüllbar oder nicht?

Lösung:

6. $A(f(c))$ aus 1, 2 mit $\{x \leftarrow c\}$
7. $A(f(f(c)))$ aus 2, 6 mit $\{x \leftarrow f(c)\}$
8. $B(z, t), \neg B(f(z), t)$ aus 3, 4 mit $\{r \leftarrow y, s \leftarrow f(y)\}$; ersetze y durch z
9. $B(z, f(f(z)))$ aus 3, 8 mit $\{y \leftarrow f(z), t \leftarrow f(f(z))\}$
10. $\neg A(f(f(c)))$ aus 5,9 mit $\{z \leftarrow c\}$
11. $\square$ aus 10, 7

1 Punkt pro Schritt, 2 Punkte für korrekte Unifikatoren, 1 Punkt für richtiges Kreuz.

Fortsetzung

Aufgabe 5 (4+5 Punkte)

a) Betrachten Sie die folgende aussagenlogische Formel:

$$\varphi_1 = (\neg(h \vee \neg((((((\neg k) \wedge t) \to m) \wedge (\neg m) \wedge (b \to t)) \wedge ((\neg b) \to h)) \wedge (\neg k))))$$

Entfernen Sie alle nach den *Vereinbarungen zum Minimieren von Klammern* unnötigen Klammern. Sie sollen die Formel dabei *nicht* logisch umformen! Geben Sie das Ergebnis an.

Wie viele Paare von Klammern (d.h. wie viele öffnende bzw. schließende Klammern) enthält Ihr Ergebnis?

b) Betrachten Sie nun folgende Formel:

$$\varphi_2 = (c \wedge d) \wedge ((a \vee b \vee c \wedge \neg d) \to \neg(d \vee \neg(a \wedge b \wedge c)))$$

Wenden Sie das aus der Vorlesung bekannte Tableaux-Verfahren an, um ein vollständiges Tableau für φ_2 zu konstruieren. Geben Sie an, ob die Formel erfüllbar oder unerfüllbar ist. Falls die Formel erfüllbar ist, geben Sie mindestens ein Modell der Formel an.

Lösung:

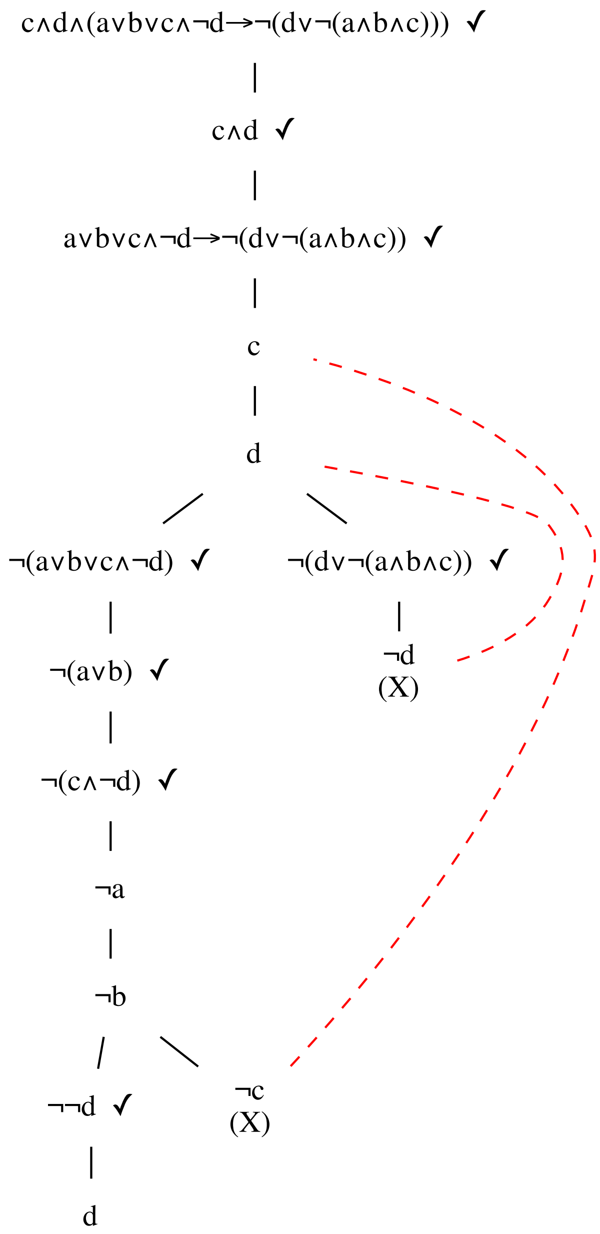
a)
$$\varphi_1 = \neg(h \vee \neg((\neg k \wedge t \to m) \wedge \neg m \wedge (b \to t) \wedge (\neg b \to h) \wedge \neg k))$$

Die Darstellung braucht 5 Klammerpaare.

Fortsetzung

$$\varphi_2 = (c \wedge d) \wedge ((a \vee b \vee c \wedge \neg d) \to \neg(d \vee \neg(a \wedge b \wedge c)))$$

Lösung:



b) Die Formel φ_2 ist erfüllbar mit $\{\neg a, \neg b, c, d\}$

Aufgabe 6 (6 + 1 + 1 Punkte)
Betrachten Sie die folgende aussagenlogische Formel mit den Aussagevarariablen a und b:

$$\varphi = (\neg a \vee b) \rightarrow (a \leftrightarrow b)$$

a) Konvertieren Sie φ in konjunktive Normalform und vereinfachen Sie das Ergebnis mit Hilfe der bekannten Äquivalenzen so weit wie möglich.

b) Geben Sie, falls möglich, ein Modell für φ an. Begründen Sie Ihre Behauptung.

c) Geben Sie, falls möglich, eine Interpretation, in der φ nicht wahr ist, an. Begründen Sie Ihre Behauptung.

Lösung:

a)
$$\begin{array}{cll}
\varphi & (\neg a \vee b) \rightarrow (a \leftrightarrow b) & \\
\equiv & \neg(\neg a \vee b) \vee (\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b) & \rightarrow \textit{und} \leftrightarrow \text{ entfernen (2P)} \\
\equiv & (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b) & \text{De Morgan (1P)} \\
\equiv & (a \vee \neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b \vee a) \wedge (\neg b \vee \neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee \neg b \vee a) & \text{Distributiv (2P)} \\
\equiv & (a \vee \neg b \vee a) \wedge (\neg b \vee \neg b \vee a) & \text{Tautologien entfernen (0,5P)} \\
\equiv & (a \vee \neg b) & \text{Idempotenz (0,5P)}
\end{array}$$

b) $I_1 = \{a \mapsto 1, b \mapsto 1\}$ - $a \leftrightarrow b$ ist wahr unter I_1, und damit die Implikation.

c) $I_2 = \{a \mapsto 0, b \mapsto 1\}$ - $\neg a \vee b$ ist wahr, aber $a \leftrightarrow b$ ist falsch unter I_2.

Fortsetzung

Aufgabe 7 (1+2+2+2+1+2 Punkte)
Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in der Prädikatenlogik:

1. Al ist Schuhverkäufer.
2. Jeder Schuhverkäufer ist mit einer Rothaarigen verheiratet.
3. Wer Schuhverkäufer ist und (mindestens) ein Kind hat, ist nicht glücklich.
4. Al hat ein männliches und ein weibliches Kind.
5. Al hat Steve und Marcy als Nachbarn.
6. Weder Steve noch Marcy hat ein Kind.

Verwenden Sie hierzu

- die Konstantensymbole a, s und m für Al, Steve und Marcy;
- die einstelligen Prädikate
  - $S(x)$ (x ist Schuhverkäufer),
  - $R(x)$ (x ist rothaarig),
  - $M(x)$ (x ist männlich),
  - $W(x)$ (x ist weiblich),
  - $G(x)$ (x ist glücklich);
- die zweistelligen Prädikate
  - $V(x, y)$ (x ist verheiratet mit y),
  - $K(x, y)$ (x hat y als Kind),
  - $N(x, y)$ (x hat y als Nachbarn);
- und die Variablenmenge $\{x, y, z, \ldots\}$.

Anmerkung: Sie müssen die Prädikate M und W nur dann benutzen, wenn in der Aussage explizit „männlich“ oder „weiblich“ steht, also z.B. nicht für „ein Schuhverkäufer“ oder „eine Rothaarige“.

Lösung:

1. $S(a)$
2. $\forall x(S(x) \rightarrow \exists y(V(x, y) \wedge R(y)))$
3. $\forall x(S(x) \wedge \exists y K(x, y) \rightarrow \neg G(x))$
4. $\exists x \exists y(K(a, x) \wedge M(x) \wedge K(a, y) \wedge W(y))$
5. $N(a, s) \wedge N(a, m)$
6. $\neg \exists x(K(s, x) \vee K(m, x))$

Fortsetzung

Aufgabe 8 (4+5 Punkte)
Verwenden Sie das in der Vorlesung gezeigten Unifikationsverfahren, um jeweils einen Unifikator für die Termpaare s_1, s_2 und t_1, t_2 zu finden, falls ein solcher existiert. Es ist $F = \{f/2, g/1, a/0\}$, $x, y, z, u \in V$ sind Variablen.

Unterstreichen Sie in jedem Schritt die Gleichung, die Sie bearbeiten, und geben Sie die Regel an, die Sie anwenden.

a) $$\begin{aligned} s_1 &= f(f(f(x,y),y),f(y,u)) \\ s_2 &= f(f(f(z,a),z),f(u,g(a))) \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} t_1 &= g(f(f(x,y),g(g(a)))) \\ t_2 &= g(f(f(u,a),g(u))) \end{aligned}$$

Tabelle für **a)** Gleichungen	σ	Regel
$\{f(f(f(x,y),y),f(y,u)) = f(f(f(z,a),z),f(u,g(a)))\}$	$\{\}$	

Fortsetzung

Tabelle für **b)** Gleichungen	σ	Regel
$\{g(f(f(x,y),g(g(a)))) = g(f(f(u,a),g(u)))\}$	$\{\}$	

Lösung:

a)

Tabelle für **a)** Gleichungen	σ	Regel
{f(f(f(x,y),y),f(y,u))=f(f(f(z,a),z),f(u,g(a)))}	{}	Decompose f(f(f(x,y),y),f(y,u)) = f(f(f(z,a),z),f(u,g(a)))
{f(f(x,y),y)=f(f(z,a),z), f(y,u)=f(u,g(a))}	{}	Decompose f(f(x,y),y) = f(f(z,a),z)
{f(y,u)=f(u,g(a)), f(x,y)=f(z,a), y=z}	{}	Decompose f(y,u) = f(u,g(a))
{f(x,y)=f(z,a), y=z, y=u, u=g(a)}	{}	Decompose f(x,y) = f(z,a)
{y=z, y=u, u=g(a), x=z, y=a}	{}	Binding y ← z
{z=u, u=g(a), x=z, z=a}	{y←z}	Binding z ← u
{u=g(a), x=u, u=a}	{y←u,z←u}	Binding u ← g(a)
{x=g(a), g(a)=a}	{y←g(a),z←g(a),u←g(a)}	Binding x ← g(a)
{g(a)=a}	{y←g(a),x←g(a),z ←g(a),u←g(a)}	Conflict-FAIL { g(a) != a }

b)

Tabelle für **b)** Gleichungen	σ	Regel
{g(f(f(x,y),g(g(a))))=g(f(f(u,a),g(u)))}	{}	Decompose g(f(f(x,y),g(g(a)))) = g(f(f(u,a),g(u)))
{f(f(x,y),g(g(a)))=f(f(u,a),g(u))}	{}	Decompose f(f(x,y),g(g(a))) = f(f(u,a),g(u))
{f(x,y)=f(u,a), g(g(a))=g(u)}	{}	Decompose f(x,y) = f(u,a)
{g(g(a))=g(u), x=u, y=a}	{}	Decompose g(g(a)) = g(u)
{x=u, y=a, g(a)=u}	{}	Binding x ← u
{y=a, g(a)=u}	{x←u}	Binding y ← a
{g(a)=u}	{y←a,x←u}	Orient g(a) = u
{u=g(a)}	{y←a,x←u}	Binding u ← g(a)
{}	{y←a,x←g(a),u←g(a)}	Success

$\sigma(s_1) = \sigma(s_2) = g(f(f(g(a),a),g(g(a)))) = g(f(f(g(a),a),g(g(a))))$

– Ende der Klausur –