Bitte die Blätter nicht trennen!

Matrikelnummer:			
DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Stuttgart		Fakultät	**Technik**
		Studiengang:	**Informatik**
		Jahrgang:	**2024**
		Kurs:	**TINF24C/IN**
ÜBUNGSKLAUSUR		Studienhalbjahr:	**1. Semester**
Datum:	**Februar 2025**	Bearbeitungszeit:	**90 Minuten**
Modul:	**T4INF1002**	Dozent:	**Hladik, Kötter, Schulz**
Unit:	**Grundlagen und Logik**		
Hilfsmittel:	**Zwei beliebige Papierwerke, alternativ auch auf Tablet im Flugmodus**		

Aufgabe	Thema	erreichbar	erreicht
1	Mengen	11	
2	Relationen	8	
3	Scheme	10	
4	Normalisierung	10	
5	Tableaux	12	
6	Formalisierung	12	
7	Substitutionen	8	
8	Resolution	9	
Summe		80	

1. Sind Sie gesund und prüfungsfähig?
2. Sind Ihre Taschen und sämtliche Unterlagen, insbesondere alle nicht erlaubten Hilfsmittel, seitlich an der Wand zum Gang hin abgestellt und nicht in Reichweite des Arbeitsplatzes?
3. Haben Sie auch außerhalb des Klausurraumes im Gebäude keine unerlaubten Hilfsmittel oder ähnliche Unterlagen liegen lassen?
4. Haben Sie Ihr Handy ausgeschaltet und abgegeben?

(Falls Ziff. 2 oder 3 nicht erfüllt sind, liegt ein Täuschungsversuch vor, der die Note „nicht ausreichend“ zur Folge hat.)

Aufgabe 1 (1+2+3+1+2+2 Punkte)
Betrachten Sie die Menge $S = \{1, \ldots, 12\}$ von natürlichen Zahlen und die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto (x-4)^2$.
Geben Sie folgende Mengen als explizite Aufzählung von Elementen an:

a) $f(S)$ (das Bild von S unter f)

b) $\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \in S\}$

Betrachten Sie nun die Trägermenge der lateinischen Kleinbuchstaben von a bis o und die folgenden 3 Mengen A, B, C.

- $A = \{a, d, e, g, h, k, m\}$
- $B = \{a, c, d, g, k, l, m, o\}$
- $C = \{a, b, c, e, f, g, k\}$

c) Stellen Sie alle Mengen in einem Venn-Diagramm dar.

Bestimmen Sie die folgenden Mengen bzw. Werte. Geben Sie bei den Mengen die Elemente in alphabetischer Reihenfolge an.

d) $(A \backslash B) \cup C$

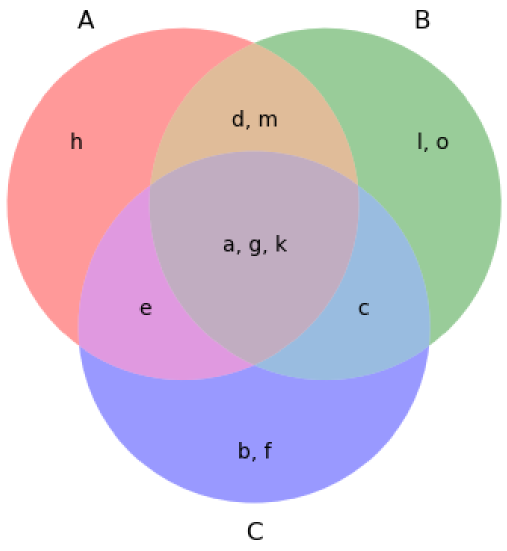
e) $(B \backslash (A \cup C)) \cup (A \cap B \cap C)$

f) $|(B \backslash (A \cup C)) \cup ((A \cup B) \cap C)|$

Lösung:

a) $f(S) = \{9, 4, 1, 0, 16, 25, 36, 49, 64\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64\}$

b) $\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \in S\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$



c)

d) $\{a, b, c, e, f, g, h, k\}$

e) $\{a, g, k, l, o\}$

f) $|\{a, c, e, g, k, l, o\}| = 7$

(Zusätzlicher Platz)

Aufgabe 2 (2+2+2+2 Punkte)
Betrachten Sie die Menge $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ und die folgenden Relationen:

- $R = \{(a, b), (b, c), (c, a), (d, e), (e, f), (f, d)\}$.
- $S = \{(a, d), (e, b)\}$

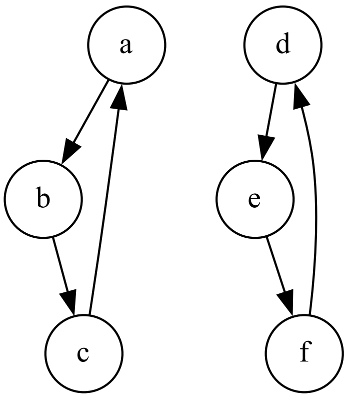
a) Stellen Sie R als Graph dar.

b) Bestimmen Sie R^3 und stellen Sie das Ergebnis als Menge von Tupeln dar.

c) Was ist die Mächtigkeit $|(R \cup S)^*|$?

d) Bestimmen Sie die kleinste Äquivalenzrelation, die R enthält und stellen Sie das Ergebnis als Tabelle dar.

Lösung:

a) 

b) $R^3 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f)\}$.

c) $(R \cup S)^* = A \times A$, damit $|(R \cup S)^*| = 36$.

d) **Relation** $(R \cup R^{-1})^*$

	a	b	c	d	e	f
a	1	1	1	0	0	0
b	1	1	1	0	0	0
c	1	1	1	0	0	0
d	0	0	0	1	1	1
e	0	0	0	1	1	1
f	0	0	0	1	1	1

(Zusätzlicher Platz)

Aufgabe 3 (1+1+4+4 Punkte)
Betrachten Sie die folgenden Scheme-Definitionen (in der Standard-Umgebung), die in der angegebenen Reihenfolge ausgewertet werden.

```
(define a '(1 2 3 4))
(define b '(5 4 3 2))
(define c (cons a b))
(define d (append a b))

(define (thisfun arg)
  (cond ((null? arg)
         0)
        ((pair? (car arg))
         (+ (thisfun (car arg))
            (thisfun (cdr arg))))
        (else
         (+ (car arg)
            (thisfun (cdr arg))))))

(define (thisfun2 arg)
  (apply + arg))

;; Die Fragen beziehen sich auf den Zustand ab hier

(thisfun a)
(thisfun2 a)
(thisfun c)
(thisfun d)
```

a) Was ist der Wert von `c`?

b) Was ist der Wert von `d`?

c1) Was ist der Wert von `(thisfun a)`?

c2) Was ist der Wert von `(thisfun2 a)`?

c3) Was ist der Wert von `(thisfun c)`?

c4) Was ist der Wert von `(thisfun d)`?

d) Beschreiben Sie kurz (1-3 Sätze) den wesentlichen Unterschied in der Funktionalität von `thisfun` und `thisfun2`.

Lösung:

a) `'((1 2 3 4) 5 4 3 2)`

b) `'(1 2 3 4 5 4 3 2)`

c1) `10`

c2) `10`

c3) `24`

c4) `24`

d) Die Funktion `thisfun2` summiert die Werte einer flachen Liste von Zahlen. Die Funktion `thisfun` summiert die Werte auch von rekursiv verschachtelten Listen von Zahlen.

(Zusätzlicher Platz)

Aufgabe 4 (6+4 Punkte)

a) Gegeben sei die aussagenlogische Formel φ mit den Aussagenvariablen A und B.

$$\varphi = (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$$

Transformieren Sie φ mit dem in der Vorlesung gezeigten Verfahren in die konjunktive Normalform und vereinfachen Sie das Ergebnis anschließend mit Hilfe der bekannten Äquivalenzen so weit wie möglich.

b) Gegeben sei die prädikatenlogische Formel ψ über der Signatur $\Sigma = (P, F, V)$ mit $P = \{R/2\}$, $F = \{f/1\}$, und der Variablenmenge $V = \{x, y, z, \ldots, x_0, x_1, \ldots\}$.

$$\psi = \exists x(R(x, f(x)) \lor \forall y \exists z R(y, z)) \land \forall x \forall y(\neg R(x, y) \lor \exists z(R(x, z) \land R(z, y)))$$

Transformieren Sie ψ in Prenex-Normalform und skolemisieren Sie die Formel mit dem in der Vorlesung gezeigten Verfahren. Sie müssen die skolemisierte Formel *nicht* in die KNF transformieren. Verwenden Sie die Skolemsymbole $sk_0, sk_1, sk_2, \ldots$.

Lösung:

a)

$$\begin{array}{lll}
 & (a \to b) \to (\neg b \to \neg a) & \\
\equiv & \neg(\neg a \lor b) \lor \neg\neg b \lor \neg a & \text{Auflösen} \to \text{(2P)} \\
\equiv & a \land \neg b \lor b \lor \neg a & \text{NNF (1P)} \\
\equiv & (a \lor b \lor \neg a) \land (\neg b \lor b \lor \neg a) & \text{KNF (2P)} \\
\equiv & W \land W & \text{inverses Element (0,5P)} \\
\equiv & W & \text{Idempotenz (0,5P)}
\end{array}$$

b)
- VN: $\exists x_0(R(x_0, f(x_0)) \lor \forall x_1 \exists x_2 R(x_1, x_2) \land \forall x_3 \forall x_4(\neg R(x_3, x_4) \lor \exists x_5(R(x_3, x_5) \land R(x_5, x_4)))$
- PNF: $\exists x_0 \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \forall x_4 \exists x_5(R(x_0, f(x_0)) \lor R(x_1, x_2) \land (\neg R(x_3, x_4) \lor (R(x_3, x_5) \land R(x_5, x_4))))$
- SNF: $\forall x_1 \forall x_3 \forall x_4(R(sk_0, f(sk_0)) \lor R(x_1, sk_1(x_1))$
  $\land(\neg R(x_3, x_4) \lor (R(x_3, sk_2(x_1, x_3, x_4)) \land R(sk_2(x_1, x_3, x_4), x_4))))$

(4P; je 1P VN, 1P PNF, 2P für Skolemisierung)

(Zusätzlicher Platz)

Aufgabe 5 (7+5 Punkte)
Betrachten Sie die unten gezeigten logischen Formeln φ_1 und φ_2 über $\Sigma = \{a, b, c\}$. Wenden Sie jeweils das aus der Vorlesung bekannte Tableau-Verfahren an, um ein vollständiges Tableau für die Formel zu konstruieren. Geben Sie jeweils an, ob die Formel erfüllbar oder unerfüllbar ist. Falls die Formel erfüllbar ist, geben Sie *ein* Modell der Formel an.

a)

$$\varphi_1 = \neg((a \land b) \leftrightarrow (a \land \neg(a \to \neg b)))$$

b)

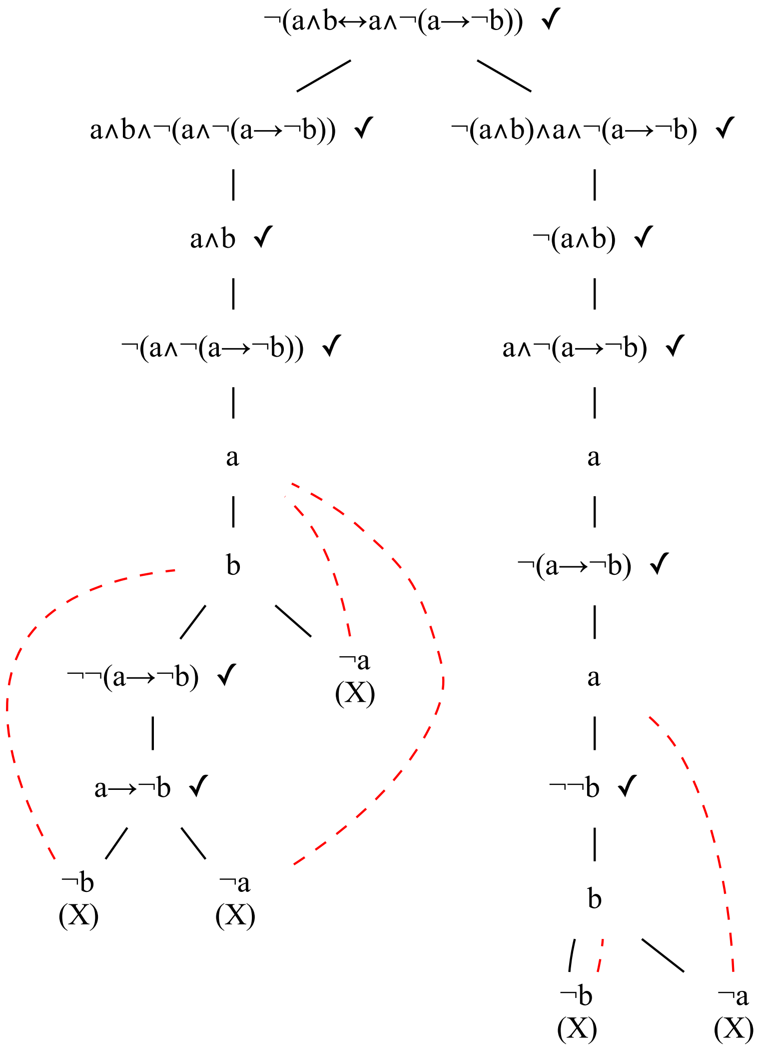
$$\varphi_2 = (\neg(a \land c) \to b) \land (a \lor b) \land (b \to (a \land c)) \land \neg b$$

φ_2 ist auf der nächsten Seite noch einmal abgedruckt.

$$\varphi_2 = (\neg(a \wedge c) \rightarrow b) \wedge (a \vee b) \wedge (b \rightarrow (a \wedge c)) \wedge \neg b$$

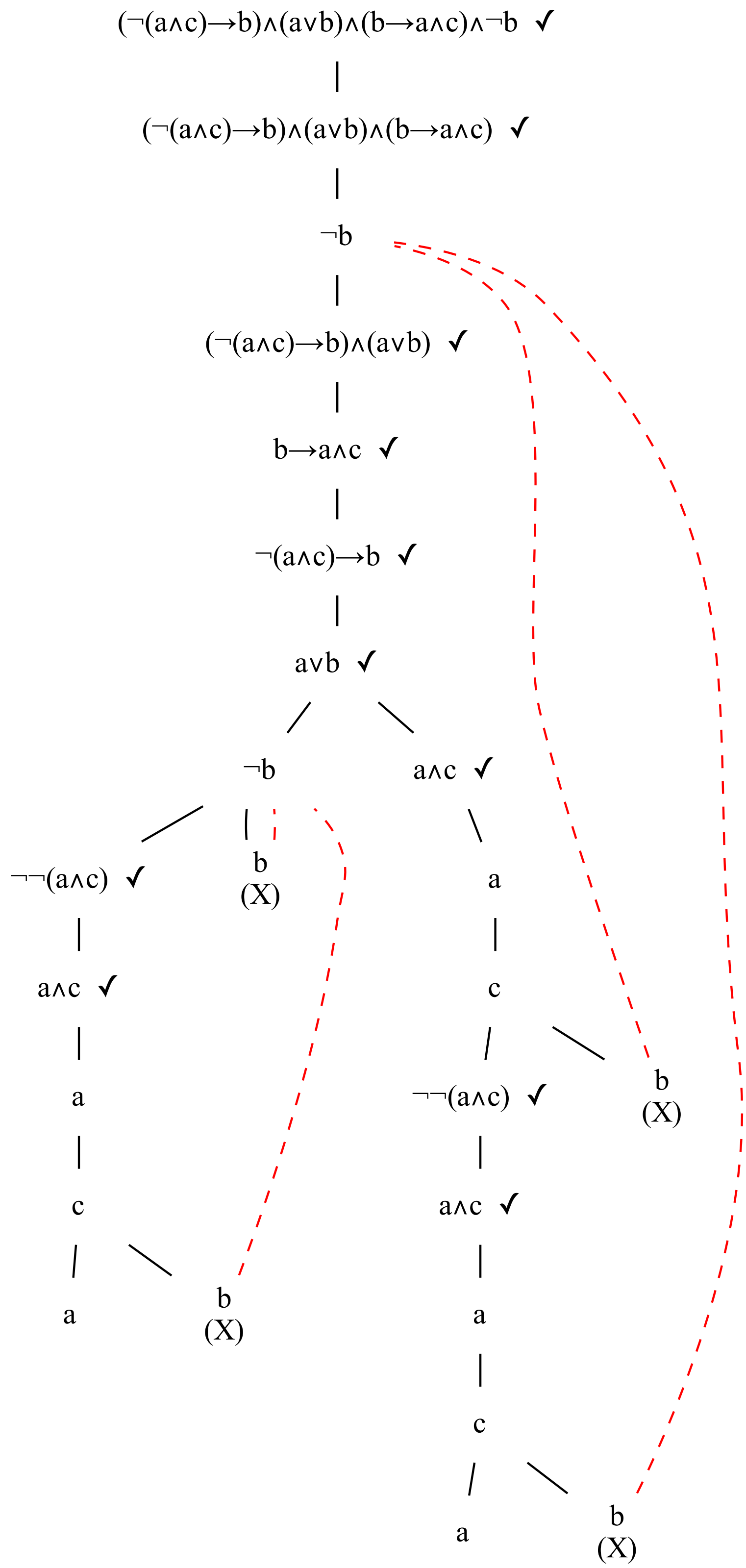
Lösung:

a) 6 Punkte Tableau, 1 Punkt für Unerfüllbarkeit



Die Formel ist unerfüllbar.

b) 4 Punkte Tableau, 1Punkt Modell



Es gibt ein Modell:

- $I_1 = \{a \mapsto 1, b \mapsto 0, c \mapsto 1\}$

Aufgabe 6 (2+2+2+2+2+2 Punkte)
Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in der Prädikatenlogik:

1. Jeder Nazgul dient Sauron.
2. Alle Menschen, die einen Ring tragen, sind Nazgul.
3. Celebrimbor schmiedet alle Ringe bis auf den Einen Ring.
4. Galadriel ist elbisch und trägt einen elbischen Ring.
5. Alle Ringe, die nicht elbisch sind, dienen dem Einen Ring.
6. Der Eine Ring dient Sauron und nur Sauron.

Verwenden Sie hierzu

- die Konstantensymbole c (für Celebrimbor), g (für Galadriel), s (für Sauron), o (für den Einen Ring);
- die einstelligen Prädikate
  - $Elb(x)$ (x ist elbisch),
  - $Mensch(x)$ (x ist menschlich),
  - $Nazgul(x)$ (x ist ein Nazgul),
  - $Ring(x)$ (x ist ein Ring)
- die zweistelligen Prädikate:
  - $Traegt(x, y)$ (x trägt y),
  - $Dient(x, y)$ (x dient y),
  - $Schmiedet(x, y)$ (x schmiedet y)
  - $x = y$ (Gleichheit von Elementen der Domäne)
- und die Variablenmenge $\{x, y, z \ldots\}$.

Achtung: Beachten Sie, dass der *Eine Ring* ein spezieller Ring ist, während *ein Ring* irgendein Ring sein kann.

Lösung:

1. $\forall x(Nazgul(x) \rightarrow Dient(x, s))$
2. $\forall x(Mensch(x) \wedge \exists y(Ring(y) \wedge Traegt(x, y)) \rightarrow Nazgul(x))$
3. $\neg Schmiedet(c, o) \wedge \forall x(Ring(x) \wedge \neg(x = o) \rightarrow Schmiedet(c, x))$
4. $Elb(g) \wedge \exists x(Ring(x) \wedge Elb(x) \wedge Traegt(g, x))$
5. $\forall x(Ring(x) \wedge \neg Elb(x) \rightarrow Dient(x, o))$
6. $Dient(o, s) \wedge \neg\exists x(Dient(o, x) \wedge \neg(x = s))$

(Zusätzlicher Platz)

Aufgabe 7 (1+1+1+1+1+3 Punkte)
Gegeben seien die Signatur $\Sigma = (P, F, V)$ mit $P = \{P/2, Q/1, R/1\}, F = \{f/1, g/1, h/2, a/0, b/0, c/0\}$ und $V = \{x, y, z, \ldots\}$.

a) Gegeben seien weiterhin fünf Funktionen.
Geben Sie für jede Funktion an, ob es sich um eine korrekte (im Sinne der Definition) Substitution handelt.
Falls ja, wenden Sie die Substitution auf $P(g(x), h(y, z)))$ an.
Falls nein, begründen Sie kurz, warum nicht.

a1) $\rho = \{h(y, z) \leftarrow h(a, b), g(x) \leftarrow g(f(a))\}$

a2) $\sigma = \{x \leftarrow f(a), y \leftarrow g(b), y \leftarrow h(c)\}$

a3) $\tau = \{x \leftarrow y, y \leftarrow z, z \leftarrow R(c)\}$

a4) $\xi = \{x \leftarrow f(c), y \leftarrow f(x), z \leftarrow f(y)\}$

a5) $\nu = \{y \leftarrow b, b \leftarrow f(c), z \leftarrow f(a)\}$

b1) Wenden Sie das in der Vorlesung gezeigte Unifikationsverfahren auf das folgende Paar von Atomen an. Geben Sie im Erfolgsfall den gefundenen Unifikator und die gemeinsame Instanz an. Auf der nächsten Seite finden Sie eine Tabelle.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= P(f(x), h(y, z)) \\ \varphi_2 &= P(y, h(f(z), g(c))) \end{aligned}$$

Tabelle für **b)**

Gleichungen	σ	Regel
$\{P(f(x), h(y,z)) = P(y, h(f(z), g(c)))\}$	$\{\}$	

Lösung:

a1) Keine korrekte Substitution, Term gegen Term nicht erlaubt

a2) Keine korrekte Substitution, h ist zweistellig

a3) Keine korrekte Substitution, ein Atom ist kein Term

a4) Korrekt, $P(g(f(c)), h(f(x), f(y))))$

a5) Keine korrekte Substitution, Konstanten dürfen nicht substituiert werden

b) Unifizierbar (3 Punkte)

Tabelle für **b)**

Gleichungen	σ	Regel
{p(f(X),h(Y,Z))=p(Y,h(f(Z),g(c)))}	{}	Decompose p(f(X),h(Y,Z)) = p(Y,h(f(Z),g(c)))
{f(X)=Y, h(Y,Z)=h(f(Z),g(c))}	{}	Orient f(X) = Y
{h(Y,Z)=h(f(Z),g(c)), Y=f(X)}	{}	Decompose h(Y,Z) = h(f(Z),g(c))
{Y=f(X), Y=f(Z), Z=g(c)}	{}	Binding Y ← f(X)
{f(X)=f(Z), Z=g(c)}	{Y←f(X)}	Decompose f(X) = f(Z)
{Z=g(c), X=Z}	{Y←f(X)}	Binding Z ← g(c)
{X=g(c)}	{Y←f(X),Z←g(c)}	Binding X ← g(c)
{}	{Y←f(g(c)),Z←g(c),X←g(c)}	Success

Test: p(f(g(c)),h(f(g(c)),g(c))) = p(f(g(c)),h(f(g(c)),g(c))) (3 Punkte)

Aufgabe 8 (9 Punkte)
Gegeben seien die prädikatenlogische Signatur $\Sigma = (P, F, V)$ mit $P = \{P/1, Q/1, R/2, S/1, T/2\}$, $F = \{c/0, f/1, g/2\}$ und $V = \{m, n, u, v, w, x, y, z, i, j, \ldots\}$.

Wenden Sie das in der Vorlesung gezeigte Resolutionsverfahren für die Prädikatenlogik auf die Menge M an, die aus den unten angegebenen Klauseln 1–6 besteht.

Falls für einen Resolutionsschritt eine echte Unifikation notwendig ist, geben Sie jeweils den entsprechenden Unifikator an.

1. $\neg R(x, y) \vee \neg P(y) \vee \neg S(x)$
2. $R(v, g(w, w)) \vee \neg Q(f(v))$
3. $P(g(i, f(j))$
4. $\neg T(c, f(u))$
5. $S(z) \vee T(z, f(z))$
6. $R(m, g(f(m), f(m))) \vee Q(f(m))$

Ist M erfüllbar oder nicht?

Lösung:

7. $S(c)$ aus 4, 5 mit $\{u \leftarrow c, z \leftarrow c\}$
8. $\neg R(c, y) \vee \neg P(y)$ aus 1, 7 mit $\{x \leftarrow c\}$
9. $\neg R(c, g(i, f(j)))$ aus 3, 8 mit $\{y \leftarrow g(i, f(j))\}$
10. $\neg Q(f(c))$ aus 2,9 mit $\{v \leftarrow c, w \leftarrow f(j), i \leftarrow f(j)\}$
11. $Q(f(c))$ aus 6, 9 mit $\{m \leftarrow c, i \leftarrow f(c), j \leftarrow c\}$
12. $\square$ aus 10,11

1 Punkt für jeden Resolutionsschritt, 0,5 Punkte pro Unifikator, 1 Punkt für Unerfüllbarkeit. (Wer das korrekte Ergebnis mit weniger Schritten erreicht, erhält die volle Punktzahl.)

(Zusätzlicher Platz)

– Ende der Klausur –